MATRICES BIPROPORCIONALES Y CAMBIO DE INSUMO-PRODUCTO

por

JORGE DANIEL FISCHMAN

MI/143
g 2

MATRICES BIPROPORCIONALES Y CAMBIO DE INSUMO-PRODUCTO

Este informe tiene como propósito presentar ante el grupo de investigadores del INDEC un modelo de proyección de matrices de insumo-producto, extraído del libro de MICHAEL BACHARACH "BIPROPORCIONAL MATRICES AND INPUT-OUTPUT CHANGE".

Además de su utilidad en la proyección de matrices de insumo-producto su importancia actual se debe a la utilización del mismo en el modelo de estadísticas nacionales integradas de RICHARD STONE de reciente aparición.

La descripción matemática de este modelo es la siguiente:

"Dada una matriz de coeficientes de insumo-producto para un período inicial $t = o$, $L(o) = \{l_{ij}(o)\}$ hallar una matriz de insumo-producto para $t = 1$: $L(1) = \{l_{ij}(1)\}$ que satisface las siguientes restricciones:

$$l_{ij}(1) \geqslant o \qquad (i = 1a m, j = 1a n)$$

$$r_i \, l_{ij}(o) \, S_j = l_{ij}(1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_i l_{ij}(o) S_j \, q_j(1) = u_i(1) \quad (i = 1a m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i l_{ij}(o) q_j(1) = v_j(1) \quad (j = 1a n)$$

donde $u_i(1)$ y $v_j(1)$ son respectivamente los insumos y productos intermedios para $t = 1$ y $q_j(1)$ es el producto bruto observado para $t = 1$.

La hipótesis del modelo consiste entonces en suponer que los coeficientes de insumo-producto para $t = 1$ son proporcionales a los coeficientes r_i por filas y S_j por columnas.

MI/143

2

Es decir que los coeficientes variarán en forma proporcional a la "tendencia de sustitución de insumos" y a la "tendencia de fabricación de los productos".

Las principales propiedades de este modelo se detallan a continuación:

1º) existe un método iterativo de la solución del problema que ha llevado a resultados satisfactorios en las aplicaciones empíricas.

2º) mantiene los coeficientes de insumo-producto estables a través del tiempo, es decir, que los coeficientes $l_{ij}(1)$ a aproximan a los $l_{ij}(o)$.

3º la matriz L(1) conserva los ceros de la matriz L(o). Es decir, si para un par $(i_1 j)$ de índices se verifica $l_{ij}(o) = o$, también será $l_{ij}(1) = o$

4º posee la propiedad de invariancia ante cambios del producto bruto, es decir que para distintos valores de $q_j(1)$ se obtiene la misma solución.

5º pueden introducirse en este modelo econométrico elementos estocásticos. Dadas las distribuciones de los insumos y productos intermedios $u_i(1)$ y $v_j(1)$ puede deducirse la distribución de los oeficientes de la matriz $l_{ij}(1)$

6º pueden obtenerse resultados duales sobre el comportamiento de las estimaciones ante las variaciones de los precios de los productos.

El modelo biproporcional constituye un paso adelante respecto al método de proyección de coeficientes fijos. Si bien se hicieron otros intentos para introducir cambios en el tiempo de los coeficientes de insumo-producto estos han carecido de algunas de las propiedades que se acaban de describir o en la posibilidad de encontrar una solución positiva.

Esta falencia en la búsqueda de solución para modelos alternativos se debió en algunos casos a la falta de un método de solución del problema planteado y en otros casos a la excesiva información requerida para hallarla.

En principio el método de proyección puede extenderse a los períodos para los que existe información sobre los incumos y productos intermedios, pero puede generalizarse para períodos en los que no se dispone esta información,

LA HIPOTESIS DE INVARIABILIDAD EN EL TIEMPO DE LA MATRIZ DE INSUMO-PRODUCTO

Cuando Leontief formuló su teoría de insumo-producto la base de la misma fue que los coeficientes de la matriz no variarían con el nivel de producción.

De aquí a formular una hipótesis sobre la invariabilidad de la matriz en el tiempo había un solo paso.

Este paso fue dado por varios investigadores que intentaron la verificación empírica de esta hipótesis.

Las pruebas que se hicieron en tal sentido siguieron dos direcciones claramente diferenciadas.

El primer tipo de pruebas realizadas consistió en comparar los insumos intermedios observados en un período y los deducidos de una matriz correspondiente a un período anterior.

Luego se cotejaron estas diferencias con los errores de observación, si las diferencias resultaban significativas se rechazaba esta hipótesis de invariabilidad.

El segundo tipo de pruebas consistía en el cotejo entre matrices correspondientes a diferentes períodos.

Ambos tipos de prueba llevaron a una misma conclusión: el rechazo de la hipótesis de la invariabilidad en el tiempo de la matriz de insumo producto.

En efecto, en ambos tipos de pruebas las diferencias observadas mostraban una tendencia en el tiempo, que reflejaba a su vez una tendencia en los coeficientes de la matriz.

Esta diferencia se atribuyó en principio a la diferencia en la estructura de cada producción específica.

Sin embargo, ambos métodos presentaban problemas.

Mientras que el primer tipo de pruebas no ofrecía ninguna alternativa a la hipótesis de invariabilidad en el tiempo el segundo tipo requería contar con la información consistente en un conjunto de matrices extendidas en el tiempo. Estas matrices debían se comparables.

Varios países cuentan con un conjunto de matrices correspondientes a distintos períodos que no resultan comparables ya sea por una incompatibilidad en la desagregación o porqué algunas matrices fueron construídas a precios de consumidores y otras a precios de productores.

Este problema fue resuelto por Arrow y Hoffenberg quienes en lugar de utilizar coeficientes directamente observados, utilizaron coeficientes estimados en base a los insumos observados.

Para ello construyeron un modelo en el cual cada transacción se expresaba mediante la suma de una proporción de la producción y una variable en el tiempo.

Esto les permitió estimar los coeficientes de la matriz mediante ecuaciones de la forma

$$u_i = \sum_j l_{ij} q_j + \sum_j e_{ij}(t) \qquad (1)$$

donde:

u_i = insumo intermedio

q_j = producción del bien j

e_{ij} = variable en el tiempo

Este modelo contiene un gran número de parámetros a estimar, por lo que es necesario una serie larga de insumos para poder efectuar las estimaciones con un número suficiente de grados de libertad.

Una vez estimados los coeficientes Arrow y Hoffenberg supusieron que las variables $e_{ij}(t)$ eran función lineal de diferentes variables por lo estimaron los parámetros de dos funciones lineales.

En el primer caso supusieron que los insumos correspondientes a una producción específica podían clasificarse en dos tipos diferentes.

El primero de ellos incluía insumos proporcionales al nivel de producción, pero con un coeficiente de proporcionalidad variable en la escala de producción.

En el segundo se incluía a insumos que podían economizarse con la disponibilidad de mejores equipos pero de los que era necesario una cierta cantidad para la formación de stock. Además se suponía que los coeficientes variaban linealmente en el tiempo.

La segunda función colocaba a los coeficientes de insumo-producto como una función lineal de las siguientes variables: disponibilidad de ingresos, relación entre los gastos de defensa y el P.B.N. y el tiempo.

La inclusión de la disponibilidad de ingresos como variable explicativa se debía a la hipótesis de que a una mayor disponibilidad le correspondía una estructura diferente para cada producción (mejores productos).

La relación entre los gastos de defensa y el P.B.N. se incluyó entre las variables explicativas teniendo en cuenta que la serie de insumos para los que se disponía de información incluía el lapso de la Segunda Guerra Mundial. Se pensaba que cuanto mayor fuese esta relación mayor sería la proporción en que cada producción estaba integrada por productos militares. Finalmente la inclusión del tiempo explicaba la tendencia hacia un cambio de tecnología y la del gusto de los consumidores que afectaba a la estructura de cada producción.

Para obtener los parámetros de estas funciones utilizaron el método de máxima verosilimitud.

Pero obtuvieron un fracaso debido a que algunos parámetros estimados resultaron negativos y otros excesivamente grandes.

Esto les hizo recurrir a otro método consistente en un programa lineal donde se intentaba minimizar las sumas de las diferencias absolutas entre los insumos estimados con los resultantes de una estimación con coeficientes de insumo-producto fijos.

Lograron así buenos ajustes.

Si bien el método sofisticado de Arrow y Hoffenberg puede resultar útil en las planificaciones a largo plazo, para las planificaciones a corto plazo es necesario contar con un método, que haciendo uso de los insumos y productos intermedios observados permita estimar rápidamente los cambios en el tiempo de los coeficientes de insumo-producto. En este sentido las matrices biproporcionales presentadas en el informe anterior resultan el método más exitoso.

METODO ITERATIVO PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE MATRIZ BIPROPORCIONAL

Dada la matriz A de coeficientes insumo-producto para el período $t = 0$ y los insumos intermedios u_i y los productos intermedios v_j para $t = 1$ se llama **matriz biproporcional** de coeficientes de insumo-producto correspondiente a $t = 1$ a una matriz A^B tal que

$$A^B \geq 0$$

$$a_i \geq 0 \qquad a_j \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_i \, a_{ij} \, s_j \, q_j (1) = u_i \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \, a_{ij} \, s_j \, q_j (1) = v_j \, (1)$$

Si se puede encontrar un par de Vectores $R = (r_1 \; r_2 \; \ldots\ldots \; m)$ $S = (S_1 \; S_2 \ldots\ldots S_n)$ tales que satisfagan estas condiciones, se dice que el problema de matriz biproporcional tiene solución.

Puede demostrarse bajo condiciones débiles que tal solución, existe, que es única y que el procedimiento iterativo que se utiliza para hallarla converge a ella.

Este teorema se demuestra comenzando por asegurar la convergencia del método iterativo, lo que asegura así la existencia de la solución y una vez probada que esta existe se demuestra su unicidad.

Por lo tanto es conveniente presentar en primer término el método iterativo y este puede verse con claridad si se lo acompaña con un ejemplo numérico sencillo.

Sea para ello la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

y el vector de producción bruta $Q = \begin{bmatrix} 100 \\ 75 \end{bmatrix}$

Multiplicando cada columna de A por la producción bruta correspondiente se tiene la matriz de transacciones

$$T = \begin{bmatrix} 30 & 15 \\ 20 & 30 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Sea además los vectores de insumos y productos intermedios para t = 1

$$u = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix}$$ y de productos intermedios v = 60, 70

Método de solución 1er. Paso: Partiendo de la matriz r se obtiene una primera matriz r_1 que satisface las restricciones por fila correspondiente a t = 1.

Para ello se multiplica cada fila por una constante que resulta del cociente entre el insumo intermedio correspondiente a t = 1 y el correspondiente a t = 0

$$\begin{array}{c} T_1 = \begin{bmatrix} 26,667 & 13,333 \\ 24 & 36 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 40 \\ 60 \\ 30 \end{array} \\ \quad 62,667 \qquad 67,333 \end{array}$$

La matriz T_1 satisface las restricciones por fila pero no por columna.

Por ello es necesario efectuar un

2º Paso: Multiplicar cada columna por un coeficiente numérico apropiado para obtener una matriz r_2 que satisface las restricciones por columna pero no por fila:

$$\begin{array}{c} T_2 = \begin{bmatrix} 25,532 & 13,861 \\ 22,979 & 37,426 \\ 11,489 & 18,713 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 39,393 \\ 60,405 \\ 30,202 \end{array} \\ \quad 60 \qquad 70 \end{array}$$

Ahora la matriz r_2 satisface las restricciones por columna, pero la forma de obtenerla hizo que se destruyeran las condiciones por filas que eran válidas para r_1. Sin embargo podemos ver que como consecuencia de la aplicación anterior del primer paso las sumas por filas son más próximas a los valores de insumos intermedios que en la matriz r.

Ahora el método consiste en aplicar reiterada y alternativamente los pasos 1 y 2. Se obtiene así la siguiente sucesión de matrices:

$$T_3 = \begin{array}{cc|c} \left[\begin{array}{cc} 25,926 & 14,074 \\ 22,825 & 37,175 \\ 11,412 & 18,588 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 40 \\ 60 \\ 30 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 60,163 & 69,837 \end{array} & \end{array} \qquad T_4 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 25,856 & 14,107 \\ 22,763 & 37,262 \\ 11,381 & 18,631 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 39,963 \\ 60,025 \\ 30,012 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 60 & 70 \end{array} & \end{array}$$

$$T_5 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 25,880 & 14,120 \\ 22,754 & 37,246 \\ 11,376 & 18,624 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 40 \\ 60 \\ 30 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 60,010 & 69,990 \end{array} & \end{array} \qquad T_6 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 25,876 & 14,122 \\ 22,750 & 37,251 \\ 11,374 & 18,627 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 39,998 \\ 60,001 \\ 30,001 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 60 & 70 \end{array} & \end{array}$$

Puede verse que las matrices con subíndice impar satisfacen las restricciones por fila y las de orden par las restricciones por columna. Además observando 2 matrices de orden impar se ve que si bien no satisfacen l s restricciones por columna, cada vez se acercan más a las mismas. Se observa igual hecho para las matrices de orden par y las restricciones por fila.

Habiéndose obtenido la matriz T_6, donde las restricciones por fila se satisfacen salvo error mínimo, se decide dar por terminado el proceso, considerando que las diferencias pueden ser menores que los errores probables de observación de los insumos.

El procedimiento seguido muestra que la matriz r_6 es biproporcional a la matriz r.

Para obtener los coeficientes de proporcionalidad, se tiene comparando las matrices r y r_6 que:

$$\begin{array}{llll} r_1\ 30\ S_1 = 25,876 & \qquad & r_1\ 15\ S_2 = 14,122 \\ r_2\ 20\ S_1 = 22,750 & & r_2\ 30\ S_2 = 37,251 \\ r_3\ 10\ S_1 = 10 & & r_3\ 15\ S_2 = 18,627 \end{array}$$

de los cuales, por cociente entre las distintas relaciones se obtienen los siguientes valores:

$r_1 = 1 \qquad r_2 = r_3 = 1,319 \qquad S_1 = 0,8625 \qquad S_2 = 0,9414$

Para pasar de la matriz de transacciones a la matriz de insumo-producto es necesario indicar la producción bruta correspondiente a t = 1. Por razones de comparación se supondrá que $Q\ (1) = Q\ (0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 75 \end{bmatrix}$

Luego, dividiendo cada columna de r_6 por la correspondiente producción bruta se hallan los coeficientes de la matriz de insumo-producto proyectada para t = 1.

$$A^B = \begin{bmatrix} 0{,}259 & 0{,}189 \\ 0{,}227 & 0{,}497 \\ 0{,}113 & 0{,}248 \end{bmatrix}$$

Cotejando las matrices A y A^B puede observarse que los coeficientes correspondientes al insumo 1 son inferiores para A^B que para A. Esto es consecuencia de que para obtener igual producción bruta, fué necesario para t = 1 una cantidad menor del insumo 1 (40 v_s 45). En cambio los coeficientes correspondientes a los insumos 2 y 3 son mayores para A^B que para A porqué fué necesario en t = 1 realizar un mayor insumo para obtener la misma producción final.

Nota: La nomenclatura utilizada para este informe es la siguiente:

a_{ij} = coeficientes de insumo-producto para t = 0

$u_i(0)$ = insumo intermedio del bien i para t = 0

$u_i(1)$ = " " " " " " t = 1

$V_j(0)$ = producción intermedia para t = 0

$V_j(1)$ = " " " t = 1

$Q_j(0)$ = producción bruta del artículo j para t = 0

$Q_j(1)$ = " " " " j " t = 1

Jorge Daniel Fischman

JORGE DANIEL FISCHMAN