

SECRETARIA DE ASUNTOS TECNICOS  
DIRECCION NACIONAL DEL SERVICIO ESTADISTICO

**Curso de**  
**Matemáticas para Estadísticas**

Por

Ing. PEDRO DOMINGUEZ

# CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOSTRACION DE TECNICAS DE MUESTREO AGRICOLA

MATEMATICAS, CURSO "A"

Profesor: Ing. Pedro Domínguez

Mat - A

1a. Conferencia

Marzo 9 - 1955

## 1.- INTRODUCCION

Denomínase ANALISIS MATEMATICO a la ciencia edificada sobre el concepto de número. Se divide este análisis en algebraico y trascendente.

El primero estudia las operaciones con los números y el segundo comprende el estudio general de las funciones.

El desarrollo de las distintas cuestiones que comprende el Análisis Algebraico, origina las distintas ramas; como ser: la Aritmética, la Teoría de los números, la Combinatoria, el Algebra, etc.

La Aritmética, que es la parte más abstracta del Análisis Algebraico, se desarrolló inicialmente partiendo del número natural prescindiendo de todas las propiedades físicas, químicas, geométricas de los objetos de la vida real, y por sucesivas ampliaciones, creando nuevos entes numéricos, generaliza el concepto de número.

Admitimos poseer el concepto de número natural, que se maneja desde los primeros años de la escuela primaria, así como las operaciones fundamentales: adición y multiplicación y sus respectivas inversas: sustracción y división.

Toda combinación de operaciones fundamentales, efectuadas con números cualesquiera y que da origen a un nuevo número, se llama algoritmo que es una palabra derivada del matemático árabe Muhammed ibn Musâ Alchwarizmi (siglo IX d.J.C.) autor del Aldscher walmukâbala donde a su vez deriva la palabra Algebra, otra de las ramas del Análisis Algebraico, a la que luego nos referiremos:

a) Suma de NúmerosPROPIEDADES PRINCIPALES

I) Propiedad conmutativa : El orden de los sumandos no altera la suma.

Será, -por ejemplo :

$$a+b+c+d = d+a+b+c = b+c+a+d = \dots = d+c+b+a$$

$$3+5+7+2 = 2+3+5+7 = 5+7+3+2 = \dots = 2+7+5+3$$

II) Propiedad asociativa : En una suma, se pueden sustituir varios sumandos por su suma efectuada.

Por ejemplo :

$$a+b+c+d+e+f = (a+d)+(b+f)+c = d + (a+c)+e+(f+b) = \text{etc.}$$

$$2+5+8+3+6+9 = (2+3)+(5+9)+8 = 9 + (2+8)+6+(3+5) = \text{etc.}$$

III) Propiedad distributiva : El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando por éste cada sumando.

Vale decir que :

$$(a+b+c+\dots+l).m = am+bm+cm+\dots+lm.$$

$$(3+7+9) \times 5 = 3 \times 5 + 7 \times 5 + 9 \times 5$$

IV) Módulo de la adición : El número 0, cuya suma con otro no lo altera, se llama módulo.

Es decir :

$$a+0=0+a=a$$

$$3+0=0+3=3$$

El cero es el único número que sumado a cualquier otro da una suma igual a éste.

b) Símbolo  $\sum$ 

Cuando los diversos sumandos de una suma se deducen de una misma expresión, dando valores sucesivos a un número indeterminado que en ella figura, se representa abreviadamente esa operación escribiendo delante del mismo, el símbolo de sumación sigma ( letra mayúscula del alfabeto griego equivalente a la S del castellano ) y escribiendo arriba y abajo de ese signo los valores primero y último que toma ese número indeterminado. Así por ejemplo :

$$\sum_{n=1}^{10} n^2$$

de  
indica la suma los cuadrados de los diez primeros números naturales, es decir :

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

Otro ejemplo :

$$\sum_{i=5}^9 2i = 10 + 12 + 14 + 16 + 18$$

indica la suma de los cinco primeros números pares que siguen a 8.

Otro ejemplo :

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{n=2}^4 a^m \cdot b^n = ab^2 + ab^3 + ab^4 + a^2b^2 + a^2b^3 + a^2b^4 + a^3b^2 + a^3b^3 + a^3b^4$$

### c) Multiplicación de números

I) La multiplicación como caso particular de la suma :

$$a \cdot m = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_m \text{ sumandos}$$

El producto de am es igual a la suma de m sumandos iguales a a

### Propiedades principales

II) Propiedad conmutativa : El producto es independiente del orden de los factores.

Así :

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

III) Propiedad asociativa : Se puede efectuar el producto parcial de varios factores sin que altere el producto.

Ejemplo :

$$abcd = a(b \cdot c) \cdot d = \dots = (ab)(cd) = \dots$$

$$2 \times 7 \times 4 \times 5 = 2(7 \times 4) \times 5 = \dots = (2 \times 7)(4 \times 5) = \dots$$

IV) Módulo de la multiplicación : El número 1 es el único que multiplicando por cualquier otro da por resultado el mismo número.

Así :

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$$

Cuando los factores de un producto son números que se deducen de una expresión única, en la cual figura un número indeterminado i, dando a éste valores sucesivos, se representa el producto brevemente utilizando el signo pi ( letra mayúscula del alfabeto griego equivalente a la P castellana ) y se lee producto de, antepuesto a dicha expresión y escribiendo arriba y abajo de ese signo los valores extremos que adopta i. Ejemplos :

$$\prod_{i=1}^7 i^3 = 1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 \cdot 6^3 \cdot 7^3$$

$$\prod_{h=3}^6 2h = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 6) =$$

$$= 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$$

$$\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n$$

este último ejemplo representa el producto de los n primeros números naturales.

#### e) Factorial de n.

El producto de los n primeros números naturales, se denomina factorial de n y se presenta con mucha frecuencia en los cálculos, sobretodo en Análisis Combinatorio, como veremos más adelante. Por esa razón, se lo designa con una notación especial :

n o bien n!

que se lee : factorial de n.

Es decir, que

$$\prod_{k=1}^n k = n!$$

Así :

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5.040$$

$$20! = 243.290 \times 10^{13}$$

$$75! = 248.091 \times 10^{104}$$

$$100! = 933.262 \times 10^{152}$$

Para el cálculo de estos factoriales, cuyas cifras aumentan extraordinariamente ya a partir de los diez primeros números naturales, se han construido tablas, de las cuales se han extraído los tres últimos resultados.

e) Sustracción

- I) Definición : Dados los números naturales a y b, tal que  $a \geq b$ , se llama diferencia del primero por el segundo, a un tercer número c tal que sumado al b de por resultado el a :

$$a - b = c \quad \text{si } c + b = a$$

se llama :

a = minuendo

b = sustraendo

c = diferencia

- II, Paréntesis : Se introduce en los cálculos el paréntesis como un vínculo para indicar que se someten determinados datos a nuevas operaciones. Así

$$[a \cdot (b+c) \cdot d] + [(m+n) \cdot p]$$

indica que en el primer corchete debe efectuarse previamente  $(b+c)$  para luego efectuar el producto de a por  $(b+c)$  como un solo número. Lo mismo en el segundo corchete.

- III) Polinomios : Cuando una expresión aparece solamente compuesta por adiciones y sustracciones de números, se llama polinomio o forma polinómica, que puede ser binomio, trinomio, etc. según que conste de 2, 3, etc. términos componentes.

Así, con los números :

$$3x^3; 5x^2; 7z^4$$

puede formarse el siguiente trinomio :

$$3x^3 - 5x^2 + 7z^4$$

Se llama grado de un monomio al número de los factores literales que lo forman. Así

$$3x^3 z^2 \text{ es de } 5^\circ \text{ grado}$$

Se llama grado de un polinomio al mayor de los grados de sus términos.

Ejemplo

$$6x^2 yz^3 - 2x^3 z^5 + 9z^3 - 3xyz \text{ es un polinomio de } 8^\circ \text{ grado.}$$

f) División

- I) Definición : Dados dos números naturales a y b, tal que a sea múltiplo de b y  $b \neq 0$ , se llama cociente exacto de a por b a un tercer número natural c, que multiplicado por b de por resul-

taño a a.

En símbolos

$a:b=c$  siempre que  $c.b=a$

$a$ = dividendo

$b$ = divisor

$c$ = cociente exacto

Si  $b=0$  la división no tiene sentido.

II) Propiedad fundamental : El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente.

III) Definición : Si  $a$  no es múltiplo de  $b$ , se llama división entera de  $a$  por  $b$  a un tercer número  $c$  tal que su producto por  $b$  sea menor o igual que  $a$ .

En símbolos :  $a:b=c$  si  $cb \leq a$

IV) Resto : A la diferencia del dividendo menos el producto del divisor por el cociente se llama resto. Así :

$$r = a - bc$$

Si  $r=0$  la división es exacta

V) Propiedad fundamental : El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto :

$$a = bc + r$$

Ejemplo :

$$\text{Si } 17:5=3 \quad r=17-5 \times 3=2$$

$$\text{es } 17:5 \times 3 + 2$$

## c) Potencia

I) Definición : La potenciación como caso particular de la multiplicación :

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{m \text{ factores}}$$

La potencia  $m$ ésima de un número  $a$  es igual al producto de  $m$  factores iguales a  $a$ .

$a$  = base

$m$  = exponente

### Ejemplo

$$3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ factores}} = 81$$

### Propiedades

#### II) Producto de potencias de igual base :

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

$$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2 = 2^{3+4+1} = 2^8$$

#### III) Cociente de potencias de igual base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{4^7}{4^3} = 4^{7-3} = 4^4$$

#### IV) Potencia de una potencia

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$$

#### h) Operaciones inversas de la potenciación

##### Radicación

I) Definición : La raíz  $m$ -ésima exacta de un número natural  $a$  es otro número natural  $b$ , tal que la potencia  $m$ -ésima de  $b$  es igual a  $a$ . En símbolos

$$\sqrt[m]{a} = b \quad \text{si} \quad b^m = a$$

$a$  = radicando o subradical

$b$  = raíz

$\sqrt{\phantom{x}}$  = radical

$m$  = índice

### Ejemplo

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\text{pues } 4^3 = 64$$

### Propiedades

#### II) Raíz $m$ -ésima de un producto

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$$

$$\sqrt{25 \times 64 \times 4} = \sqrt{25} \times \sqrt{64} \times \sqrt{4} = 5 \times 8 \times 2 = 80$$

### III) Raíz emésima de un cociente

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt[m]{64}}{\sqrt[m]{16}} = \frac{8}{4} = 2$$

### IV) Raíz de una raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{25}} = \sqrt[3 \times 2]{25} = \sqrt[6]{25}$$

## Logaritmación

- I) Definición : Se llama logaritmo de un número positivo  $\beta$ , en base  $\alpha > 0$  y distinta de 1, al exponente  $\lambda$  con que hay que elevar la base  $\alpha$  para obtener el número  $\beta$ . En símbolos :

$$\log_{\alpha} \beta = \lambda \quad \text{si es } \alpha^{\lambda} = \beta$$

Ejemplo:

$$\log_3 81 = 4 \quad \text{pues } 3^4 = 81$$

### Propiedades

### II) Logaritmo de un producto

$$\log_{\alpha} (\beta \cdot \gamma) = \log_{\alpha} \beta + \log_{\alpha} \gamma$$

$$\log_2 (4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

III) Logaritmo de un cociente

$$\log_{\alpha} \left( \frac{\beta}{\gamma} \right) = \log_{\alpha} \beta - \log_{\alpha} \gamma$$

$$\log_3 \left( \frac{81}{9} \right) = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$$

IV) Logaritmo de una potencia

$$\log_{\alpha} \beta^{\gamma} = \gamma \cdot \log_{\alpha} \beta$$

$$\log_3 81^9 = 9 \times \log_3 81 = 9 \times 4 = 36$$

V) Logaritmo de una raíz

$$\log_{\alpha} \sqrt[\gamma]{\beta} = \frac{1}{\gamma} \cdot \log_{\alpha} \beta$$

$$\log_2 \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3} \log_2 64 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

Bibliografía :

1) Julio Rey Pastor : "Elementos de Análisis Algebraico". Madrid 1930.

2) T. Dauzing : " El Número ". Ed. Librería del Colegio. Bs. Aires. 1950.

MATEMATICAS, CURSO "A"

Mat - A  
2a. Conferencia  
Marzo 10- 1955

## ANALISIS COMBINATORIO SIMPLE

### 1.- INTRODUCCION

Se tienen noticias de que los primeros conocimientos de combinatoria lo tenían los chinos. Los griegos no prestaron a este asunto mayor atención y pasó casi inadvertido para ellos. Recien, alrededor del año 510, después de Cristo, el matemático latino Boethius nos da el número de permutaciones de  $n$  objetos.

Alrededor de 1150, el matemático hindú Bhaskara da las reglas para hallar el número de permutaciones con  $n$  objeto, sin repetición de alguno de ellos, así como también la que permite hallar el número de combinaciones. Alrededor de 1140, el matemático hebreo Rabbi ben Ezra, estudiando las posibles conjunciones de los planetas conocidos por él, en número de 7, aplica la regla general para hallar el número de combinaciones. En 1321, otro matemático hebreo Levi ben Gerson publica también las reglas generales para el cálculo del número de permutaciones y combinaciones.

Una moderna aplicación de las reglas de las combinaciones para el juego de dados, fué dada en 1523 por Nicolás Tartaglia (1500-1557) notable matemático italiano que fué el primero que resolvió la ecuación cúbica. Buteo en 1559 estudió el número de combinaciones posibles que se obtienen arrojando cuatro dados. A partir de estas fechas el estudio de la combinatoria adquiere mayor incremento, pasando a ser una de las ramas más interesantes del Análisis Algebraico, con importantes aplicaciones en el cálculo de probabilidades y en la Estadística.

### 2)- ARREGLOS, COMBINACIONES Y PERMUTACIONES

Dados  $m$  elementos, ya sean objetos, números o individuos de cualquier naturaleza, distintos entre sí, tomemos un conjunto  $n$  de dichos objetos. Tal conjunto, puede ser considerado bajo dos formas distintas, a saber:

a) teniendo en cuenta el orden de estos elementos  
b) no teniendo en cuenta el orden  
de modo, que dos conjuntos que tengan el mismo número  $n$  de elementos se considerarán distintos si:

a) dos elementos iguales no ocupan el mismo lugar en los dos conjuntos.  
b) dos elementos no son iguales en ambos conjuntos.  
Por ejemplo: si los  $m$  elementos dados son:

a, b, c, d, .....

y tomamos un conjunto de 3 elementos de éstos ( $n = 3$ ), tal como el, acd, cuando se prescinde del orden, los conjuntos  
 $acd ; adc ; cad ; dca ; etc.$   
 son todos iguales, mientras que tales conjuntos son distintos cuando se los considera ordenados.

Cuando un conjunto  $n$  de los  $m$  objetos dados se lo considera ordenado, se tiene un Arreglo de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$ ; en tanto que si del conjunto se abstrae el orden, se tiene una combinación de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$ .

Cuando  $n = m$ , hay una sola combinación, mientras que los arreglos de  $m$  objetos tomados todos ellos a la vez se obtienen ordenando de todas las maneras posibles a esos  $m$  objetos. Estos arreglos especiales se llaman permutaciones de  $m$  elementos

### 3.- ARREGLOS, DISPOSICIONES O COORDINACIONES

Definición:

Arreglos, disposiciones o coordinaciones de  $m$  objetos distintos, tomados de  $n$  en  $n$  a la vez ( $n \leq m$ ) son todos los posibles grupos de  $n$  objetos tomados entre los  $m$  dados, de modo tal, que dos de ellos se diferencien o bien por el orden de los objetos o bien por la naturaleza de los mismos.

Ejemplo: Dados 3 objetos

$a, b$  y  $c$

los arreglos de esos tres objetos tomados de 1 en 1 son

$a - b - c$

y se los indica así  $A_3^1 = 3$

Los arreglos de dos en dos son:

$ab ; ba ; ca$   
 $ac ; bc ; cb$

y se los indica:

$A_3^2 = 6$

y finalmente, los arreglos de 3 en 3 son:

$abc ; bac ; cab$   
 $acb ; bca ; cba$

luego

$A_3^3 = 6$

### 4.- CALCULO DEL NUMERO DE ARREGLOS

Dados  $m$  objetos, todos distintos:

$a, b, c, \dots, h, l$

el número de arreglos, tomándolos de 1 en 1 a la vez es

$$A_m^1 = m$$

Para formar los arreglos de esos mismos objetos tomándolos de 2 en 2, bastará colocar a la derecha de cada  $A_m^1$ , cada uno de los objetos que faltan, es decir los restantes  $(m-1)$  objetos, y tendremos así

$ab\ ac\ : \dots\ ah\ al$   
 $ba\ bc\ \dots\ bh\ bl$   
 $ca\ cb\ \dots\ ch\ cl$   
 $\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$   
 $ha\ hb\ \dots\ hl$   
 $la\ lb\ \dots\ lh$

solof  
sol  
-erbn

solof  
sol  
-erbn

obtendríamos tantas hileras horizontales como objetos hay, es decir  $m$ , y en cada hilera habrá  $(m-1)$  arreglos. El número total será  $m(m-1)$ :

$$A_m^2 = m(m-1)$$

Para formar los arreglos de  $m$  objetos, tomándolos de 3 en 3 agregaríamos a cada  $A_m^2$  anterior, a su derecha, cada uno de los  $(m-2)$  objetos restantes, obteniendo el cuadro siguiente:

```

abc ..... abh    abl
acb ..... ach    acl
.....
eha ehb ehc .....

```

y obtendríamos así tantas hileras horizontales como arreglos teníamos antes, o sea,  $m(m-1)$  hileras, cada una de las cuales contiene  $(m-2)$  arreglos.

De modo que

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2)$$

Analogamente

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

y observando que el sustraendo del último factor es inferior en una unidad al orden del arreglo correspondiente, deducimos que:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]$$

o sea

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)$$

es decir que:

El número de arreglos de  $m$  objetos tomados de  $n$  en  $n$ , es igual al producto de  $n$  factores consecutivos decrecientes, a partir de  $m$ .

Ejemplos:

I) Tres viajeros llegan a un pueblo donde solo hay 4 hoteles. De cuántas maneras pueden ocupar sus cuartos, debiendo estar cada uno en un hotel diferente?

El primer viajero puede elegir uno de los cuatro hoteles, y cuando ha seleccionado su hotel, el segundo viajero le quedan solo 3 hoteles para elegir, y por consiguiente los dos primeros viajeros pueden elegir su comodidad de  $4 \times 3$  maneras.

El tercer viajero puede escoger su hotel de dos maneras. El número pedido de maneras será

$$A_4^3 = 4.3.2 = \underline{24 \text{ maneras}}$$

II) Cuántos números diferentes de seis cifras pueden formarse con los nueve dígitos 1, 2, 3, ..... 9?

El número de objetos distintos es 9 que se tomarán de seis a la vez. La cantidad pedida es:

$$V_9^6 = 9.8.7.6.5.4 = \underline{60,480}$$

## 5.- PERMUTACIONES

Son los arreglos de  $m$  objetos tomándolos todos a la vez, y su número se representa por  $P_m$ ; es decir, que:

$$P_m = A_m^m$$

luego

$$P_m = m(m-1)(m-2) \dots (m-m+1)$$

o sea

$$P_m = m(m-1)(m-2) \dots 1$$

o bien

$$P_m = m!$$

El número de permutaciones de  $m$  objetos es igual al factorial de  $m$ .

Ejemplos:

I) Cuántas permutaciones podrán formarse con la palabra omni-  
bus?

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5.040$$

II) De cuántas maneras distintas pueden sentarse 5 comensales al-  
rededor de una mesa

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

## 6.- COMBINACIONES

Se llaman combinaciones de  $m$  objetos, tomados de  $n$  en  $n$ , los diferentes grupos que pueden formarse con ellos, tomando  $n$  ob-  
jetos cada vez, sin repetir ningún objeto en un mismo grupo, y de  
manera que cada uno de éstos se diferencie de los restantes por lo  
menos en un objeto.

Considerando el cuadro de los  $A_m^2$  obtenido anteriormente:

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| ab    | ac    | ..... | ah    | al    |
| ba    | bc    | ..... | bh    | bl    |
| ca    | cb    | ..... | ch    | cl    |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| ha    | hb    | ..... | hl    |       |
| la    | lb    | ..... | lh    |       |

se observa que dos arreglos, tales como ab y ba; ac y ca; .....; hl  
y lh, no son combinaciones distintas, ve que entran los mismos obje-  
tos y para serlo, deben diferenciarse por lo menos en un objeto ya  
que el simple cambio de orden de los objetos no origina combinacio-  
nes diferentes.

Designando con  $C_m^n$  a las combinaciones de  $m$  objetos tomados  
de  $n$  en  $n$ , el cuadro anterior nos dice que si tuvieramos formadas  
las  $C_m^n$  y permutamos de todas las maneras posibles los  $n$  objetos de  
cada grupo, el conjunto de todos los grupos obtenidos son los arra-

glos de  $m$  objetos tomados de  $n$  en  $n$ , es decir que:

$$A_m^n = C_m^n \times P_n$$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{n!}$$

Multiplicando, numerador y denominador del segundo miembro por  $(m-n)!$  se obtiene:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)!}{n! (m-n)!}$$

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)(m-n-1) \dots 3.2.1}{(m-n)! n!}$$

es decir:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! n!}$$

Ejemplos:

1) Si tenemos 12 libros de cuántas maneras puede hacerse una selección de 5, cuando un libro determinado se incluye siempre y cuando un libro determinado se excluye siempre?

a) Cuando un libro se incluye solo se pueden escoger 4 de los 11 libros restantes

$$\therefore C_{11}^4 = \frac{11!}{(11-4)! 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$$

$$\therefore C_{11}^4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330 \text{ maneras}$$

b) Cuando un libro se excluye siempre, tenemos que elegir 5 libros entre los 11 restantes.

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)! 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$$

$$C_{11}^5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462 \text{ maneras}$$

## 7.- COMBINACIONES COMPLEMENTARIAS

El número de combinaciones de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$  es igual al número de combinaciones de esos mismos elementos tomados de  $(m-n)$  en  $(m-n)$ .

$C_m^n$  y  $C_m^{m-n}$  son combinaciones complementarias. Se debe demostrar que:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! n!} \quad (1)$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{[m-(m-n)]! (m-n)!} = \frac{m!}{(m-m+n)! (m-n)!} = \frac{m!}{n! (m-n)!} \quad (2)$$

De (1) y (2) es:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

Ejemplo:

$$C_{10}^6 = C_{10}^4$$

En efecto:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)! 6!} = \frac{10, 9, 8, 7, \cancel{6, 5, 4, 3, 2, 1}}{4, 3, 2, 1, \cancel{6, 5, 4, 3, 2, 1}} = 210$$

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)! 4!} = \frac{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}{6, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1} = 210$$

## 8.- BIBLIOGRAFIA

E. Morales: "Algebra Elemental"  
Ed. Ivaldi y Checchi - Bs. As.

Hall y Knight: "Algebra Superior"  
Traducc. de Rafael García Díez  
Ed. U.T.E.H.A. - México 1948

G.M. Bruño: "Elementos de Algebra"  
Ed. Ch. Bouret- México.

1.2) ANALISIS COMBINATORIO CON REPETICION1.2.1) ARREGLOS, VARIACIONES O COORDINACIONES

Definición: Son los diferentes grupos que se pueden formar con m objetos tomados de n en n pudiendo cada objeto estar repetido varias veces en el mismo grupo. Se consideran grupos diferentes a los que difieren en el orden en que están agrupados los objetos, o en algunos de ellos.-

Casos { 1º) Todos los objetos pueden repetirse n veces.-  
2º) Sólo alguno o algunos objetos se repitan y esas repeticiones sean de distinto número.-

Notación:  $A_{rm}^n$  : arreglos con repetición de m objetos tomados de n en n.-

Formación: Sean a, b, c, los objetos dados.-

$A_{r3}^1$  : a, b, c. Total = 3

$A_{r3}^2$  :  

|    |    |    |
|----|----|----|
| aa | ab | ac |
| ba | bb | bc |
| ca | cb | cc |

Total = 9

$A_{r3}^3$  :  

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| aaa | aab | aac | baa | bab | bac | caa | cab |
| cac | aba | abb | abc | bba | bbb | bbc | bca |
| ccb | bcc | caa | cab | cac | cba | cbb | cbc |
| cca | ccb | ccc |     |     |     |     |     |

Total = 27

Número de arreglos

a) 1er Caso:  $A_{rm}^n$  pudiendo cada objeto estar repetido n veces en un mismo grupo.

Supongamos conocer el número de  $A_{rm}^{n-1}$  ; si a cada uno de estos arreglos le agregamos uno a uno ( al principio o al final ) los m objetos dados, de cada  $A_{rm}^{n-1}$  objetos resultarán m arreglos de n objetos, repitiéndose una vez más en cada grupo, uno al menos de los objetos que lo forman.- El total de arreglos de m objetos tomados de n en n es

$$A_{rm}^n = A_{rm}^{n-1} \cdot m$$

Sí hacemos  $N = 1, 2, 3, \dots, n$  se tiene:

$$A_{rm}^1 = m$$

$$A_{rm}^2 = A_{rm}^1 \cdot m$$

$$\times \quad A_{rm}^3 = A_{rm}^2 \cdot m$$

$$\dots$$

$$A_{rm}^n = A_{rm}^{n-1} \cdot m$$

---


$$\boxed{A_{rm}^n = m^n}$$

para

$$m = 3$$

$$n = 1$$

$$A_{r3}^1 = 3$$

$$m = 3$$

$$n = 2$$

$$A_{r3}^2 = 3^2 = 9$$

$$m = 3$$

$$n = 3$$

$$A_{r3}^3 = 3^3 = 27$$

que son los arreglos efectuados anteriormente

b) 2º Caso: Una sola letra se repite  $\alpha$  veces. Sea la letra a que se repite  $\alpha$  veces entre las m letras. 1) Los arreglos en los cuales no entra a serán todos diferentes y su número será los arreglos simples de  $(m - \alpha)$  letras tomadas de n en n

es decir:

$$A_{m-\alpha}^n = C_{m-\alpha}^n \cdot P_n$$

II) Serán también diferentes los arreglos en los que a entra solo una vez y su número se deduce del número de combinaciones simples de  $(m - \alpha)$  letras, tomadas de  $n - 1$  en  $n - 1$  a los que se agrega luego una a a cada uno, efectuando las permutaciones posibles en c/ grupo, es decir;

$$C_{m-\alpha}^{n-1} \cdot P_n \text{ arreglos distintos.}$$

III) Los arreglos en los cuales a entra dos veces se deducen de las

$$C_{m-\alpha}^{n-2} \text{ a las cuales agregamos dos letras } \underline{a} \text{ y efectuando en cada grupo}$$

resultante todas las permutaciones posibles; pero los arreglos así obtenidos no serán todos distintos, pues al permutar las dos letras a resultan arreglos iguales, luego dividiendo dichos arreglos por las  $P_2$  se tendrán los que son distintos, vale decir:

$$\frac{C_{m-\alpha}^{n-2} \cdot P_n}{P_2}$$

IV) Si a entra 3 veces se tendrán los arreglos distintos:

$$\frac{C_{m-\alpha}^{n-3} \cdot P_n}{P_3}$$

V) Si a entra  $\alpha$  veces es:

$$\frac{C_{m-\alpha}^{n-\alpha} \cdot P_n}{P_\alpha}$$

y la suma de todos estos arreglos nos dará el número total de los que se buscan:

$$\begin{aligned} & P_n C_{m-\alpha}^n + \frac{C_{m-\alpha}^{n-1} \cdot P_n}{P_1} + \frac{C_{m-\alpha}^{n-2} \cdot P_n}{P_2} + \frac{C_{m-\alpha}^{n-3} \cdot P_n}{P_3} + \dots \\ & + \dots + \frac{C_{m-\alpha}^{n-\alpha} \cdot P_n}{P_\alpha} = \\ & = P_n \left[ C_{m-\alpha}^n + \frac{C_{m-\alpha}^{n-1}}{P_1} + \frac{C_{m-\alpha}^{n-2}}{P_2} + \frac{C_{m-\alpha}^{n-3}}{P_3} + \dots + \right. \\ & \left. + \dots + \frac{C_{m-\alpha}^{n-\alpha}}{P_\alpha} \right] = P_n \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{C_{m-\alpha}^{n-i}}{P_i} \end{aligned}$$

VI) Supongamos que en los m objetos dados haya  $\alpha$  iguales a a y  $\beta$  iguales a b; en este caso, los arreglos en los cuales no entran ni los a ni los b serían

$$C_{m-\alpha-\beta}^n \cdot P_n$$

todas diferentes mientras sea  $n < m - \alpha - \beta$ .

Los demás arreglos, en que entran los objetos a y los b repetidos, diferente número de veces, tendrán por expresión general

$$\frac{C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu} \cdot P_n}{P_\mu \cdot P_\nu}$$

en donde  $\mu$  = número de objetos iguales a a  
 $\nu$  = " " " " " " b

En efecto, se formarían las  $C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu}$  de  $m - \alpha - \beta$  objetos diferentes, y le agregaríamos a cada una de ellas,  $\mu$  objetos iguales a a y  $\nu$  iguales a b, con lo que obtendríamos grupos de  $n$  elementos. Permutaríamos luego entre sí los  $n$  elementos de  $c/$  uno de los grupos obteniendo el número total de arreglos:

$$C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu} \cdot P_n$$

pero no todos serían diferentes, pues permutando entre sí los  $\mu$  objetos iguales a  $\underline{a}$  y los  $\nu$  iguales a  $\underline{b}$ , se obtienen siempre los mismos grupos. Luego el número de arreglos distintos sería:

$$\frac{C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu} \cdot P_n}{P_\mu \cdot P_\nu}$$

se obtiene así el número de arreglos distintos que se pueden hacer con  $m$  objetos dados en los cuales hay  $\alpha$  iguales a  $\underline{a}$  y  $\beta$  iguales a  $\underline{b}$ , en el caso en que entrarán  $\mu$  objetos  $\underline{a}$  y  $\nu$  objetos  $\underline{b}$ .

Para

$$\mu = 0, 1, \dots, \alpha$$

$$\nu = 0, 1, \dots, \beta$$

la expresión:

$$\sum_{\substack{\nu=\beta \\ \mu=\alpha \\ \nu=0 \\ \mu=0}} \frac{C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu} \cdot P_n}{P_\mu \cdot P_\nu}$$

nos da el número total de arreglos posibles.

## 1. 2. 2) PERMUTACIONES

### a) Número de permutaciones

Súpongamos efectuadas las permutaciones simples con  $n$  objetos, supuestos todos distintos es:

$$P_n = n!$$

Sí ahora admitimos que entre los  $n$  objetos haya  $\alpha$  iguales a  $\underline{a}$ , permutados entre sí esos  $\alpha$  objetos iguales; no se obtienen grupos diferentes, sino el mismo grupo, luego el número de permutaciones distintas será:

$$\frac{P_n}{P_\alpha} = \frac{n!}{\alpha!}$$

Sí además suponemos que entre los  $n$  objetos haya  $\alpha$  iguales a  $\underline{a}$  y  $\beta$  iguales a  $\underline{b}$ , con idéntico razonamiento, el número de permutaciones distintas será:

$$\frac{P_n}{P_\alpha \cdot P_\beta} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta!}$$

Y en general, habiendo  $\alpha$  objetos iguales a  $\underline{a}$ ,  $\beta$  iguales a  $\underline{b}$ ,  
 -----,  $\lambda$  iguales a  $\underline{c}$  se tiene:

$$P_n^{\alpha, \beta, \dots, \lambda} = \frac{P_n}{P_\alpha \cdot P_\beta \cdot \dots \cdot P_\lambda}$$

$$P_n^{\alpha, \beta, \dots, \lambda} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \dots \cdot \lambda!}$$

en la cuál se deberá tener:

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$$

### 1. 2. 3.) COMBINACIONES COMPLETAS

#### a) Definición:

Son los diferentes grupos que se pueden formar con  $m$  objetos tomados de  $n$  en  $n$  los que pueden encontrarse repetidos en un mismo grupo, debiéndose diferenciar un grupo de otro por lo menos en uno de los objetos que lo forman.

#### b) Formación:

Supongamos que se han dado cuatro objetos:

a                      b                      c                      d

y se nos pide que formemos las combinaciones con repetición, en las que toda las letras se repitan igual número de veces. Si  $n = 1$  se tienen:

$D_4^1$  :            a                      b                      c                      d                      Total = 4

Si  $n = 2$  es:

$D_4^2$  :            { aa            ab            ac            ad  
                   bb            bc            bd  
                   cc            cd  
                   dd                                      Total = 10

Si  $n = 3$  es:

$D_4^3$  :            { aaa            abb            acc            add  
                   aab            abc            acd  
                   aac            abd  
                   aad                                      bbd  
                   bbb            bbc            bcd  
                   bcc            bcd  
                   bdd                                      ccd  
                   ccc                                      ccd  
                   cdd  
                   ddd                                      Total = 20

c) Cálculo del número de combinaciones:

1) Las letras se repiten igual número de veces

Supongamos tener formadas ya las combinaciones completas de  $m$  objetos, tomados de  $n$  en  $n$  y para mayor claridad supongamos que se trata de  $m$  letras.-

El número total de letras que entran en la formación de esas  $D_m^n$  combinaciones, es de  $D_m^n \cdot n$ : por ser  $n$  el número de letras que entra en cada  $D_m^n$ .- y como todas las letras son tomadas igual número de veces, el número de veces que entra cada una de ellas será:

$$\frac{D_m^n \cdot n}{m}$$

Vamos a calcular éste mismo número de otro modo. Supongamos que se apartan todas las combinaciones en que entra un objeto determinado, por ejemplo la letra  $a$ . Si a cada una de éstas combinaciones le quitamos una  $a$ , nos quedan las  $D_m^{n-1}$ . como cada  $D_m^{n-1}$  tiene  $(n-1)$  elementos o letras, y hay un total de  $D_m^{n-1}$ , el número total de letras que contienen éstas combinaciones es de

$$D_m^{n-1} \cdot (n-1)$$

y como todas las letras entran igual número de veces, el número de veces que entrará la  $a$  será:

$$\frac{D_m^{n-1} \cdot (n-1)}{m}$$

al cuál debemos agregar el número  $a$  que quitamos, que fué de  $D_m^{n-1}$ , puesto que quitamos una  $a$  cada combinación. Tendremos así que el número total de letras  $a$  es de

$$\frac{D_m^{n-1} \cdot (n-1)}{m} + D_m^{n-1}$$

el cuál deberá ser igual al número total de veces que una cualquiera de dichas letras entra en las  $D_m^n$  combinaciones:

$$\frac{D_m^n \cdot n}{m} = \frac{D_m^{n-1} \cdot (n-1)}{m} + D_m^{n-1}$$

$$\therefore D_m^n = \frac{D_m^{n-1} \cdot (m+n-1)}{n}$$

Si damos a  $n$ , valores tales:

$$n = 2, 3, \dots, n$$

se obtendrá:

$$D_m^1 = m$$

$$D_m^2 = D_m^1 \cdot \frac{m+1}{2}$$

X

$$D_m^3 = D_m^2 \cdot \frac{m+2}{3}$$

$$D_m^n = D_m^{n-1} \cdot \frac{m+n-1}{n}$$

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{n!}$$

## 2) Las letras no se repiten igual número de veces

Supongamos que entre las  $m$  letras haya  $\alpha$  iguales a  $a$  y  $\beta$  iguales a  $b$ .

Supongamos tener una cualquiera de las combinaciones con repetición de  $m$  objetos, en la cuál hay  $\mu$  letras  $a$  y  $\nu$  letras  $b$ . Si quitamos de la misma todas las  $a$  y todas las  $b$  queda una combinación simple de  $(m - \alpha - \beta)$  objetos tomados de  $(n - \mu - \nu)$  en  $(n - \mu - \nu)$ , luego

$$C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu}$$

será el número de las combinaciones distintas en las que entran  $\mu$  veces  $a$  y  $\nu$  veces  $b$

Haciendo variar a  $\mu$  y  $\nu$  respectivamente de  $0$  a  $\alpha$  y de  $0$  a  $\beta$

$$\mu = 0, 1, 2, \dots, \alpha$$

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, \beta$$

el número total de combinaciones con repetición buscado estará dado por la suma de expresiones análogas a la anterior:

$$\sum_{\mu=0}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\beta} C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu}$$

## Propiedades

1) El número de combinaciones completas que se pueden formar con  $m$  objetos tomados de  $n$  en  $n$ , es igual al número de combinaciones completas que se pueden formar con  $m$  objetos tomados de  $(n-1)$  en  $(n-1)$ , más el número de combinaciones completas que se pueden formar con  $(m-1)$  objetos tomados de  $n$  en  $n$ .

$$T) D_m^n = D_m^{n-1} + D_{m-1}^n$$

Formemos las  $D_m^n$  para  $m = 4$

$$n = 1, 2, 3$$

$$D_4^1 : \quad \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix}$$

$$D_4^2 : \quad \begin{cases} aa & ab & ac & ad \\ bb & bc & bd & \\ cc & cd & & \\ dd & & & \end{cases}$$

$$D_4^3 : \quad \begin{cases} aaa & aab & aac & aad \\ abb & abc & abd & \\ acc & acd & & \\ add & & & \\ bbb & bbc & bbd & \\ bcc & bcd & & \\ bdd & & & \\ ccc & ccd & & \\ cdd & & & \\ ddd & & & \end{cases}$$

Estas combinaciones pueden dividirse en dos grupos:  
a) Contienen un elemento dado. b) No contienen un elemento dado.  
Nosotros las podemos dividir así:

aaa; aab; aac; aad; abb; abc; abd; acc; acd; add  
bbb; bbc; bbd; bcc; bcd; bdd; ccc; ccd; cdd; ddd

un primer grupo donde están las combinaciones que contienen la letra a; un segundo grupo que no la contienen.-

El primer grupo, con sólo suprimirle la letra a, queda reducido a las  $D_4^2$ ; las del segundo grupo, desde que no contienen a a, son las combinaciones completas de las tres letras b, c, d tomadas de 3 en 3, es decir,  $D_3^3$ . Luego pues:

$$D_4^3 = D_4^2 + D_3^3$$

En general

$$D_m^n = D_m^{n-1} + D_{m-1}^n$$

En efecto:

$$D_m^{n-1} = \frac{m(m+1)(m+2) \cdots (m+n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{n}{n}$$

$$D_{m-1}^n = \frac{(m-1)(m)(m+1) \cdots (m+n-2)}{(n-1)!}$$

Sumando es:

$$D_m^{n-1} + D_{m-1}^n = \frac{m(m+1)(m+2) \cdots (m+n-2)}{(n-1)!} + \frac{(m-1)(m)(m+1) \cdots (m+n-2)}{(n-1)!} = D_m^n$$

11) El número de combinaciones completas que se pueden hacer con m elementos tomados de n en n es igual a la suma de las com-

binaciones completas que sucesivamente se pueden hacer con uno, con dos, ---- hasta con  $m$  objetos, tomados en todas ellas de  $(n-1)$  en  $(n-1)$ .- 24

$$T) D_m^n = D_1^{n-1} + D_2^{n-1} + D_3^{n-1} + \dots + D_m^{n-1}$$

De la fórmula  $D_m^n = D_m^{n-1} + D_{m-1}^n$  (pág 10)

es para  $m = 2, 3, \dots, m.$

$$D_2^n = D_1^n + D_2^{n-1}$$

$$D_3^n = D_2^n + D_3^{n-1}$$

$$+ \dots + \dots$$

$$D_{m-1}^n = D_{m-2}^n + D_{m-1}^{n-1}$$

$$D_m^n = D_{m-1}^n + D_m^{n-1}$$

---


$$D_m^n = D_1^{n-1} + D_2^{n-1} + D_3^{n-1} + \dots + D_{m-1}^{n-1} + D_m^{n-1}$$

y como  $D_1^n = D_1^{n-1} = 1$

es  $D_m^n = D_1^{n-1} + D_2^{n-1} + D_3^{n-1} + \dots + D_m^{n-1}$

111) El número de combinaciones completas que se pueden formar con  $m$  objetos tomados de  $n$  en  $n$ , es igual al número de combinaciones simples que se pueden hacer con  $(m+n-1)$  objetos tomados de  $n$  en  $n$ .-

$$T) D_m^n = C_{m+n-1}^n$$

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2) \dots (m+n-1)}{n!}$$

que puede escribirse así:

$$D_m^n = \frac{(m+n-1) \dots (m+2)(m+1)[(m+n-1)-n+1]}{n!} = C_{m+n-1}^n$$

$$\therefore \boxed{D_m^n = C_{m+n-1}^n}$$

pero además, como

$$C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1} \quad \text{por ser combinaciones complementarias.}$$

será:

$$D_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = \frac{(m+n-1) \cdots [(m+n-1)-(m-1)+1]}{(m-1)!}$$

$$\therefore \boxed{D_m^n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!}}$$

Qué es la fórmula más usada en las aplicaciones

#### 1. 2. 4) BIBLIOGRAFIA

- S. Pincherle: " Algebra Complementaria " Ed. M Zamichelli. Bolonia.-  
 J. de la C. Puig: " Complementos de Algebra " Ed. Biedma. Bs As. 1909.-  
 F. Severi: " Lecciones de Análisis " Ed. Labor. Bs As. 1951.-

Mats-A  
4º Conferencia  
Marzo 15- 55

## 2.- POTENCIA DE UN POLINOMIO

### 2.1.- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta.

#### I) Producto de una suma por un número :

El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos parciales de cada uno de los sumandos por dicho número.-

En símbolos :

$$(a+b+c+\dots+l).m = am + bm + cm + \dots + lm$$

#### II) Producto de una suma por otra

El producto de una suma por otra es igual a la suma de los productos parciales que se obtienen multiplicando cada uno de los sumandos de una sucesivamente por los sumandos de la otra.-

En símbolos :

$$(a+b+c+d) \cdot (m+n) = am + bm + cm + dm + \\ + an + bn + cn + dn$$

Observación : La propiedad distributiva se cumple también para la resta con solo tener en cuenta el signo de cada factor en los productos parciales que se van obteniendo.

#### III) Producto de dos binomios

Aplicando la propiedad anterior, se tiene :

$$(x+a) \cdot (x+b) = x^2 + \begin{array}{l} a \\ + b \end{array} x + ab$$

#### IV) Producto de tres binomios

Análogamente, se obtiene :

$$(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) = x^3 + \begin{array}{l} a \\ + b \\ + c \end{array} x^2 + \begin{array}{l} ab \\ + ac \\ + bc \end{array} x + abc$$

En forma análoga, es :

$$(x + a).(x + b).(x + c).(x + d) = x^4 + \begin{array}{c} + a \\ + b \\ + c \\ + d \end{array} x^3 + \begin{array}{c} + ab \\ + ac \\ + ad \\ + bc \\ + bd \\ + cd \end{array} x^2 + \begin{array}{c} + abc \\ + abd \\ + acd \\ + bcd \end{array} x + abcd$$

Observaciones :

- 1) Cada producto es un polinomio ordenado según las potencias de crecientes del término común x.
- 2) El número de términos de cada polinomio es uno más que el número de factores.
- 3) El exponente de x en el primer término del polinomio es igual al número de factores del producto. En los términos sucesivos este exponente disminuye en una unidad hasta ser cero en el último término.
- 4) El coeficiente del primer término es 1, el del segundo término es la suma de los términos no comunes de los binomios dados; el del tercero es la suma de los productos binarios de dichos términos no comunes; el del cuarto, es la suma de los productos ternarios, y así sucesivamente.

VI) Generalizando, de acuerdo con lo expuesto, el producto de m factores :

$$(x + a).(x + b).(x + c) \text{ ----- } (x + h).(x + l) =$$

$$= x^m + \begin{array}{c} + a \\ + b \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ + h \\ + l \end{array} x^{m-1} + \begin{array}{c} + ab \\ + ac \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ + ah \\ + al \end{array} x^{m-2} + \begin{array}{c} + abc \\ \text{---} \\ \text{---} \\ + abh \\ + abl \\ \text{---} \\ + chl \end{array} x^{m-3} + \text{---} + abc \text{ ---} hl$$

es un polinomio ordenado de grado m en x que tiene m+1 términos.

Ahora bien, si todos los binomios del producto dado son iguales, vale decir, que :

$a = b = c = \text{---} = h = l$   
en consecuencia :

$$(x + a) (x + b) (x + c) \text{ --- } (x + h) (x + l) = \dots$$

$$\text{--- m factores ---}$$

$$= (x + a) (x + a) (x + a) \text{ --- } (x + a) (x + a) = (x + a)^m$$

luego, en el desarrollo anterior, en el segundo miembro, se obtendrá el polinomio siguiente :

Primer coeficiente = 1

Segundo coeficiente =  $\overbrace{a + a + a + \dots + a}^m = a \cdot m$

Tercer coeficiente =  $ab + ac + \dots + ah + al =$   
 $= a^2 + a^2 + \dots + a^2 + a^2$

repetidas tantas veces como combinaciones binarias pueden formar-se con m elementos, tomados de 2 en 2, es decir :

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2!}$$

Análogamente, el cuarto coeficiente sería  $C_m^3 \cdot a^3 =$   
 $= \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} a^3 =$

Finalmente, se tendría el siguiente desarrollo

$$(x + a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \cdot a^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^{m-3} a^3 + \dots + a^m$$

Esta identidad recibe el nombre de desarrollo del Binomio de Newton, siendo m un exponente entero y positivo.

Utilizando las notaciones del análisis combinatorio, el desarrollo anterior se acostumbra a escribir así :

$$(x + a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} a + C_m^2 x^{m-2} a^2 + C_m^3 x^{m-3} a^3 + \dots + a^m$$

Observaciones :

- 1) El desarrollo del binomio de Newton es un polinomio homogéneo de grado m, que mientras disminuye el grado de x, aumenta el de a.
- 2) El exponente de a en cualquier término es igual al número de términos que le preceden y el de x es igual al número de los que le siguen.

## 2.2.- Noticias históricas del binomio de Newton

Alrededor del año 300 a.J.C., Euclides halló el desarrollo de

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  que fué el primer desarrollo del teorema del binomio. El poeta hindú y filósofo Omar Khayvám, 1100 d.J.C.,

parece haber descubierto la ley general del desarrollo del binomio, pues fué capaz de hallar la 4a., 5a. y 6a. potencia de  $(a + b)$ . En 1742, el matemático italiano Salvemini demostró el teorema del binomio para valores positivos de  $m$ .

Sir Isaac Newton (1642 - 1727) demostró el teorema del binomio para valores negativos y fraccionarios de  $m$ , y parece que ningún otro, anterior a él, sospechó de la validez de la fórmula para esos valores.

En 1774, Euler, demostró el teorema para valores fraccionarios de  $m$ . Alrededor de 1825, el matemático noruego Abel, demostró el teorema del binomio para todo valor de  $m$  incluyendo los números complejos. Fueron necesarios veinte siglos, de Euclides a Abel, para descubrir el significado total del teorema del binomio y demostrar que él es cierto en todos los campos de la Aritmética.

### 2.3.- Números Combinatorios

Con la notación

$$\binom{m}{n} = C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+2)}{n!}$$

se indica el valor o número de las combinaciones que pueden formar se con  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$ ; expresión que se ha llamado número combinatorio y se lee  $m$  sobre  $n$ .

Con esta notación, el binomio de Newton se puede escribir así:

$$(x + a)^m = \binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} a + \binom{m}{2} x^{m-2} a^2 + \cdots + \binom{m}{m} a^m$$

que presente mayor simetría en la escritura

### 2.4 : Desarrollo de $(x - a)^m$

$$(x - a)^m = \left[ x + (-a) \right]^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} (-a) + C_m^2 x^{m-2} (-a)^2 + C_m^3 x^{m-3} (-a)^3 + \cdots + (-a)^m$$

y recordando que :

1) Toda potencia par de un número negativo da un valor positivo, es decir, que :

$$(-a)^{2k} = + a^{2k}$$

2) Toda potencia impar de un número negativo da un valor negativo, o sea que :

$$(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$$

el desarrollo anterior, teniendo en cuenta los signos, toma la forma siguiente :

$$(x - a)^m = x^m - C_m^1 x^{m-1} a + C_m^2 x^{m-2} a^2 - C_m^3 x^{m-3} a^3 + \dots + a^m$$

### Observación

$a^m$  será positivo o negativo, según que  $m$  sea par o impar.

### 2.5.- Ejemplo

$$(x + a)^6 = x^6 + C_6^1 x^5 a + C_6^2 x^4 a^2 + C_6^3 x^3 a^3 + C_6^4 x^2 a^4 + C_6^5 x a^5 + C_6^6 x^0 a^6 =$$

$$(x + a)^6 = x^6 + 6x^5 a + \frac{6.5}{2!} x^4 a^2 + \frac{6.5.4}{3!} x^3 a^3 + \frac{6.5.4.3}{4!} x^2 a^4 + \frac{6.5.4.3.2}{5!} x a^5 + \frac{6.5.4.3.2.1}{6!} x^0 a^6$$

$$(x + a)^6 = x^6 + 6x^5 a + 15x^4 a^2 + 20x^3 a^3 + 15x^2 a^4 + 6x a^5 + a^6$$

### 2.6 Propiedades de los coeficientes

#### 1) Coeficiente de un término cualquiera

Es igual al coeficiente anterior multiplicado por el exponente de  $x$  y dividido por el exponente de  $a$  aumentado en una unidad.

Ejemplo : En el desarrollo de  $(x + a)^6$ , tomemos el quinto término, su coeficiente, es :

$$\frac{6.5.4.3}{4!} = 15$$

el del sexto término será :

$$\frac{6.5.4.3.2}{4!.5} = \frac{6.5.4.3.2}{5!} = 6$$

#### 2) Coeficientes de los términos equidistantes de los extremos

Consideremos los coeficientes del desarrollo, ordenados según su posición en el polinomio, se tendrá :

Término :  $1^a$  ;  $2^a$  ;  $3^a$  ---- ;  $(m-1)^a$  ;  $m^a$  ;  $(m+1)^a$

Coeficientes :  $C_m^0$  ;  $C_m^1$  ;  $C_m^2$  ----  $C_m^{m-2}$  ;  $C_m^{m-1}$  ;  $C_m^m$

Recordando que:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

por ser combinaciones complementarias, resulta que

$$C_m^0 = C_m^m ; C_m^1 = C_m^{m-1} ; C_m^2 = C_m^{m-2} ; C_m^3 = C_m^{m-3} , \text{ etc}$$

es decir, que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos del desarrollo, son iguales, con lo que en la práctica será suficiente calcular la mitad de los coeficientes del desarrollo, como se observa en el cálculo de  $(x + a)^6$ .

### 2.7. Término General

Con las propiedades anteriores, se puede escribir un término cualquiera del desarrollo sin haber calculado previamente a los anteriores. Así, el término que ocupa el lugar  $n + 1$  que llamaremos término general, y lo indicaremos con  $T_{n+1}$ , tendrá la siguiente expresión :

$$T_{n+1} = C_m^n x^{m-n} a^n$$

Ejemplo : Hallar el 5º término del desarrollo

$$(2x + 3y)^5$$

$$T_{4+1} = C_5^4 (2x)^{5-4} (3y)^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} (2x)^1 (3y)^4$$

$$T_{4+1} = 5 \cdot 2x \cdot 3^4 y^4 = 16 \cdot 81 \cdot xy^4$$

$$T_{4+1} = 810xy^4$$

### 2.8.- Forma más simple

Una forma más simple del desarrollo del teorema del binomio se obtiene en el desarrollo de  $(1 + x)^m$ , que se obtiene de la forma general 2.1 y 2.3 colocando 1 en lugar de  $x$  y  $x$  en lugar de  $a$ . Luego :

$$(1 + x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^r x^r + \dots + x^m$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + x^m$$

siendo

$$C_m^n x^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{n!} x^n$$

su término general.

A esta forma puede reducirse cualquier otra, por ejemplo

$$(x + a)^m = \left( \left( \frac{x}{a} + 1 \right) \cdot a \right)^m = a^m \left( 1 + \frac{x}{a} \right)^m$$

y haciendo  $\frac{x}{a} = z$  es :

$$(x + a)^m = a^m (1 + z)^m$$

Lo mismo si se tuviera :

$$(x + y)^m = \left[ x \left( 1 + \frac{y}{x} \right) \right]^m = x^m \left( 1 + \frac{y}{x} \right)^m = x^m (1 + z)^m$$

siendo  $z = \frac{y}{x}$

Ejemplo : Hallar el coeficiente de  $x^{16}$  en el desarrollo de  $(x^2 - 2x)^{10}$

$$(x^2 - 2x)^{10} = \left[ x^2 \left( 1 - \frac{2}{x} \right) \right]^{10} = x^{20} \left( 1 - \frac{2}{x} \right)^{10}$$

y como  $x^{20}$  es factor de todos los términos del desarrollo de

$\left( 1 - \frac{2}{x} \right)^{10}$ , debemos buscar en este desarrollo el coeficiente del término que contiene  $\frac{1}{x^4}$ , pues :

$$x^{20} \cdot \frac{1}{x^4} = x^{20-4} = x^{16}$$

$$\text{Término que contiene a } \frac{1}{x^4} = C_{10}^4 \cdot \left( -\frac{2}{x} \right)^4 =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} \cdot 2^4 \cdot \frac{1}{x^4} = 3360 \cdot \frac{1}{x^4}$$

siendo 3360 el coeficiente buscado

## 2.9.- Desarrollo del binomio para exponente fraccionario

En el desarrollo de :

$$(1 + x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + C_m^3 x^3 + \dots + C_m^r x^r + \dots + x^m$$

dada en 2.8, si hacemos

$$m = \frac{h}{k}$$

se obtiene el desarrollo para exponente fraccionario demostrado por Newton, y el binomio, en este caso adopta la siguiente forma, reemplazando a  $\frac{h}{k}$  en :

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + x^m$$

es decir :

$$(1+x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \frac{h}{k}x + \frac{\frac{h}{k}(\frac{h}{k}-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\frac{h}{k}(\frac{h}{k}-1)(\frac{h}{k}-2)\dots(\frac{h}{k}-r+1)}{r!}x^r + \dots$$

Ejemplo :

Calcular los cuatro primeros términos del desarrollo de

$$\sqrt{(1-x)^3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-x)^3} &= (1-x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}(-x) + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2!}(-x)^2 + \\ &+ \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{3!}(-x)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\sqrt{(1-x)^3} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

## 2.10.- Desarrollo del binomio para exponente negativo

Si  $m = -n$

en el desarrollo de 2.8 se obtiene :

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

el desarrollo para exponente negativo.

Ejemplo : Calcular los cuatro primeros términos del desarrollo de

$$(2+3x)^{-4}$$

$$(2+3x)^{-4} = \left[ 2\left(1 + \frac{3x}{2}\right) \right]^{-4} = 2^{-4} \left(1 + \frac{3x}{2}\right)^{-4} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \left[ 1 + (-4)\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{(-4)(-5)}{2!}\left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!}\left(\frac{3x}{2}\right)^3 + \dots \right]$$

$$(2+3x)^{-4} = \frac{1}{16} \left( 1 - 6x + \frac{45}{2}x^2 - \frac{135}{2}x^3 + \dots \right)$$

## 2.11.- Cuadrado de un polinomio

Sea el polinomio  $P = a + b + c + d + e$

cuyo cuadrado se desea hallar. Si hacemos :

$$a+b+c+d = x$$

tendremos :

$$P^2 = (a + b + c + d + e)^2 = (x + e)^2$$

$$P^2 = x^2 + 2ex + e^2$$

$$\text{pero } x^2 = (a + b + c + d)^2$$

$$\text{y haciendo } a + b + c = y$$

es :

$$x^2 = (a + b + c + d)^2 = (y + d)^2 = y^2 + 2dy + d^2$$

para determinar  $y^2$  haremos

$$a + b = z$$

y tendremos

$$y^2 = (a + b + c)^2 = (z + c)^2 = z^2 + 2cz + c^2$$

y finalmente

$$z^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

sustituyendo este valor arriba es :

$$y^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c(a + b) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

volviendo a sustituir este valor de  $y^2$  más arriba, se obtiene :

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

este valor, sustituido en  $P^2$  nos da :

$$P^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)$$

y en el paréntesis se obtiene la suma de las combinaciones simples que se pueden hacer con a, b, c, d, e tomadas de 2 en 2.-

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos, más el duplo de la suma de los productos de sus términos tomados dos a dos.-

Ejemplo :  $P^2 = (1 + 3x + 5x^2)^2 =$

$$= 1 + 9x^2 + 25x^4 + 2(3x + 5x^2 + 15x^3)$$

$$= 1 + 9x^2 + 25x^4 + 6x + 10x^2 + 30x^3$$

$$P^2 = 1 + 6x + 19x^2 + 30x^3 + 25x^4$$

## 2.12 Cubo de un polinomio

En la misma forma se calcula el cubo de

$$P = a + b + c + d$$

tendremos :

$$P^3 = (a + b + c + d)^3$$

$$\text{hacemos } a + b + c = x$$

$$\begin{aligned} \text{resulta : } P^3 &= (a + b + c + d)^3 = (x + d)^3 = \\ &= x^3 + 3x^2d + 3xd^2 + d^3 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{haciendo } a + b = y$$

$$\text{es } x^3 = (a + b + c)^3 = (y + c)^3$$

$$x^3 = y^3 + 3y^2c + 3yc^2 + c^3$$

$$x^2 = y^2 + 2yc + c^2$$

$$\text{pero : } y^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$y^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} \text{luego : } x^3 &= a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 + 3c(a^2 + 2ab + b^2) + \\ &+ 3c^2(a + b) + c^3 \end{aligned}$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab + 2c(a + b) + c^2$$

o lo que es lo mismo :

$$x^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + ca^2 + c^2a + b^2c + bc^2) + 6abc$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

valores que sustituidos en (1) nos dan :

$$\begin{aligned} P^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + a^2d + ad^2 + b^2c + \\ &+ c^2b + b^2d + bd^2 + c^2d + cd^2) + 6(abc + abd + acd + bcd) \end{aligned}$$

El cubo de un polinomio cualquiera es igual a la suma de los cubos de sus diferentes términos, más el triplo de la suma de los productos que se obtienen multiplicando el cuadrado de un término cualquiera por otro, más seis veces la suma de los productos de los diferentes términos tomados de tres en tres.

### 2.13. Potencia emésima de un polinomio

El procedimiento seguido en 2.11 y 2.12 es general, pero las reglas que se deducen para potencias superiores a la tercera son cada vez más complicadas.

Con el análisis combinatorio se soluciona elegantemente esta cuestión. En efecto, el desarrollo de la potencia emésima de  $(a + b + c + d + \dots + 1)$  no es más que el resultado del producto de  $m$  factores iguales al dado, cosa que se obtiene sumando los productos parciales que se pueden hacer considerando un término de cada uno de ellos de todas las maneras posibles.

Tomando el término  $a$  como factor de  $\alpha$  polinomios, el  $b$  en  $\beta$ , el  $c$  en  $\gamma$ , --- es decir, formando una de las combinaciones completas de esos  $m$  objetos tomados de  $n$  en  $n$ , obtenemos un término del desarrollo de la potencia emésima de dicho polinomio, cuya forma sería :

$$a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \dots 1^{\lambda}$$

en donde se verifica que

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m.$$

Ahora, como los  $\alpha$  objetos  $a$ ; los  $\beta$  objetos  $b$ , etc, se toman en los  $m$  polinomios  $(a + b + c + \dots + 1)$  de todas las maneras posibles, habrá tantos como permutaciones con repetición se pueden formar con  $m$  objetos entre los cuales hay  $\alpha$  iguales a  $a$ ,  $\beta$  iguales a  $b$ ,  $\gamma$  iguales a  $c$ , --- etc. igual número de veces resultará repetida la combinación anterior, de modo pues que :

$$\frac{P_m}{P_{\alpha} \cdot P_{\beta} \cdot P_{\gamma} \dots P_{\lambda}} \cdot a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \dots 1^{\lambda}$$

será la expresión general de un término cualquiera y la potencia buscada no será otra cosa que la suma de expresiones análogas, luego será, :

$$(a + b + c + \dots + 1)^m = \sum \frac{P_m}{P_{\alpha} \cdot P_{\beta} \cdot P_{\gamma} \dots P_{\lambda}} \cdot a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \dots 1^{\lambda}$$

De lo anterior se deduce :

37

El número de términos del desarrollo es igual al número de combinaciones completas que se pueden formar con n objetos, suponiendo que sea n el número de términos del polinomio, tomados de m en m, es decir :

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2) \dots (m+n-1)}{n!}$$

#### 2.14 : Calculo de un término cualquiera del desarrollo

Consideremos un polinomio :

$$P = A_n + A_{n-1}x + A_{n-2}x^2 + A_{n-3}x^3 + \dots + A_0x^n$$

cuya potencia enésima se desea hallar; será :

$$P^m = \sum \frac{P_m}{P^\alpha \cdot P^\beta \cdot P^\gamma \dots P^\lambda} \cdot A_n^\alpha \cdot (A_{n-1}x)^\beta \cdot (A_{n-2}x^2)^\gamma \dots (A_0x^n)^\lambda$$

$$P^m = \sum \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!} A_n^\alpha \cdot A_{n-1}^\beta \dots A_0^\lambda \cdot x^{\beta + 2\gamma + 3\delta + \dots + n\lambda}$$

Para formar un término cualquiera del desarrollo, por ejemplo, el que contiene x<sup>p</sup>, deberemos hacer :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m \\ \beta + 2\gamma + 3\delta + \dots + n\lambda = p \end{cases}$$

Cada sistema de valores enteros y positivos que satisfagan a este sistema de ecuaciones de condición, nos dará un valor determinado para

$$\frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot A_n^\alpha \cdot A_{n-1}^\beta \dots A_0^\lambda \quad (1)$$

y la suma de todos esos valores dará el coeficiente del término que contiene a x<sup>p</sup> del desarrollo

Ejemplo : Calcular el término en x<sup>4</sup> del desarrollo

$$P^5 = (1 + 3 + 5x^2)^5$$

Ecuaciones de condición :

$$\alpha + \beta + \gamma = 5$$

$$\beta + 2\gamma = 4$$

Para determinar los valores enteros y positivos que satisfagan simultáneamente a ambas ecuaciones, damos a  $\gamma$  el máximo valor que puede tomar, en este caso  $\gamma = 2$

Si  $\gamma = 2 \quad \therefore \quad \beta = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = 3$

Si  $\gamma = 1 \quad \therefore \quad \beta = 2 \quad \alpha = 2$

Si  $\gamma = 0 \quad \therefore \quad \beta = 4 \quad \alpha = 1$

Entonces así la siguiente tabla de valores :

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|----------|---------|----------|
| 3        | 0       | 2        |
| 2        | 2       | 1        |
| 1        | 4       | 0        |

Sustituyendo estos valores en (1) y recordando que se conviene para  $0! = 1$ , resulta para el primer sistema de valores lo siguiente :

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 1^3 \cdot 1 \cdot 5^2 = \frac{120}{6 \times 2} \times 25 = \underline{250}$$

Para el segundo sistema :

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} \cdot 1^2 \times 3^2 \times 5^1 = \underline{1350}$$

y para el tercero :

$$\frac{5!}{4!} \cdot 1 \cdot 4 = 405$$

El coeficiente del término en  $x^4$  es :

$$250 + 1350 + 405 = \underline{2005}$$

y el término pedido es :

$$2005 x^4$$

2.15 Bibliografía

- 1) Juan de la C. Puig " Complemento de Algebra "  
Ed. Biedma - Bs.Aires - 1909
- 2) Esteban Morales : " Lecciones de Algebra Elemental "  
Ed. Ivaldi y Checchi. Bs.As.
- 3) H.S.Hall y S.R. Knight " Algebra Superior "  
Ed. U.T.E.H.A. - México - 1948

2 - 16

TRIANGULO ARITMETICO DE PASCAL - TARTAGLIAa) NOTA HISTORICA

Alrededor del año 1303, un matemático chino llamado TSCHUH SCHI KIH dió la regla que permitía calcular los coeficientes de los términos del desarrollo del binomio de Newton, disponiéndolos de modo tal que formaban un triángulo aritmético. En 1527, APIANUS vuelve a referirse, por primera vez en Europa, a este triángulo aritmético, aún cuando parece que también lo hizo, antes que APIANUS, el matemático M. STIFEL ( 1487-1567). Cien años más tarde, el célebre matemático y filósofo BLAS PASCAL (1623-1662) investiga las propiedades de ese triángulo aritmético, y descubre algunos teoremas importantes sobre él. Sin embargo, se supone que NICOLO TARTAGLIA ( 1500 -1557 ), también célebre matemático italiano, lo trata extensamente en su obra GENERAL TRATTATO DI NUMERO ET MISURA, 2, Venecia, 1556, antes que Pascal, razón por la cual se lo conoce hoy como triángulo de Pascal - Tartaglia.

b) FORMACION

Observando los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton, y disponiéndolos en columna, como se indica en el siguiente cuadro, se obtiene :

|                      |       |                                                                |
|----------------------|-------|----------------------------------------------------------------|
| para : $(a + b)^0$ : | _____ | 1                                                              |
| para : $(a + b)^1$ : | _____ | 1 1                                                            |
| para : $(a + b)^2$ : | _____ | 1 2 1                                                          |
| para : $(a + b)^3$ : | _____ | 1 3 3 1                                                        |
| para : $(a + b)^4$ : | _____ | 1 4 6 4 1                                                      |
| para : $(a + b)^5$ : | _____ | 1 5 10 10 5 1                                                  |
| para : $(a + b)^6$ : | _____ | 1 6 15 20 15 6 1                                               |
| para : $(a + b)^7$ : | _____ | 1 7 21 35 35 21 7 1                                            |
| para : $(a + b)^m$ : | _____ | 1 $C_m^1$ $C_m^2$ $C_m^3$ $C_m^4$ $C_m^5$ $C_m^6$ $C_m^7$ .... |

el triángulo aritmético que se conoce con el nombre de TRIANGULO ARITMETICO DE PASCAL TARTAGLIA.

Los números de la segunda columna forman la serie natural de los números naturales y se llaman números figurados de primer orden o naturales. Los de la tercer columna están formados por el número de combinaciones que se puedan formar sucesivamente con 2 objetos, con 3, con 4,.... con  $m$  objetos, tomados siempre de dos en dos y se los conoce como números figurados de segundo orden o triangulares. Los de la cuarta columna son las combinaciones que se pueden hacer con 3 objetos, con 4, con 5,...., con  $m$  objetos, tomados de tres en tres y se llaman números figurados de tercer orden o piramidales. La quinta columna está formada por el número de combinaciones que se pueden formar con 4 objetos, con 5,...., con  $m$  objetos, tomados de cuatro en cuatro, llamándoselos números figurados de cuarto orden o triángulo triangulares. En general, los números que constituyen la columna  $(n + 1)^{\text{ésima}}$ , se llaman números figurados de enésimo orden.

En cambio, los números de una fila cualquiera de orden  $(n + 1)$  son los números de combinaciones que se pueden formar con  $m$  objetos tomados de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, etc.

### PROPIEDADES

1) Un número cualquiera del triángulo de Pascal es igual a la suma del que está inmediatamente arriba, más el que está a la izquierda de este último.

Así por ejemplo: el número 21 de la columna tercera y fila octava es igual a la suma del 15 que está inmediatamente arriba, más el 6 que está a su izquierda. Esta propiedad nos permite escribir una fila cualquiera del triángulo conociendo la anterior y construirlo con rapidez.

2) Un número cualquiera del triángulo de Pascal es igual a la suma de todos los de la columna anterior que están por encima de su fila.

Así, el número 35 de la 4a. columna y 8a. fila es igual a :

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1$$

### d) TRIANGULO ARITMETICO CENERAL

El triángulo aritmético de Pascal no es más que un caso particular del siguiente triángulo general :

|   |        |          |           |          |        |   |
|---|--------|----------|-----------|----------|--------|---|
| a |        |          |           |          |        |   |
| a | b      |          |           |          |        |   |
| a | a + b  | b        |           |          |        |   |
| a | 2a + b | a + 2b   | b         |          |        |   |
| a | 3a + b | 3a + 3b  | a + 3b    | b        |        |   |
| a | 4a + b | 6a + 4b  | 4a + 6b   | a + 4b   | b      |   |
| a | 5a + b | 10a + 5b | 10a + 10b | 5a + 10b | a + 5b |   |
| - | -      | -        | -         | -        | -      | - |

En el que también se verifica :

1) Un número cualquiera es igual a la suma del inmediato superior, más el que está a la izquierda de este último.

Ejemplo :

$$4a + 6b = (a + 3b) + (3a + 3b)$$

2) Un número cualquiera es igual a la suma de todos los de la columna inmediata anterior que estén arriba de la fila del número considerado.

Ejemplo :

$$(10a + 10b) = (6a + 4b) + (3a + 3b) + (a + 2b) + b$$

d) APLICACION

Una de las más directas aplicaciones del triángulo mencionado, es la del cálculo del número de balas esféricas que pueden haber una pila de forma triangular, cuadrangular y rectangular.

2. 17

EL NUMERO e

Existe un binomio particular  $(1 + \frac{1}{n})$  cuya potencia  $e$ -nésima llevada al límite cuando  $n$  se acrecienta cada vez más hasta tomar valores superiores a cualquiera fijado, por grande que éste sea, que tiene una importancia extraordinaria en el Análisis Matemático. Consideremos la expresión

$$z = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Si damos a  $n$  valores crecientes,  $z$  tomará los valores que se leen en el cuadro :

|                           |   |       |       |       |        |         |
|---------------------------|---|-------|-------|-------|--------|---------|
| n                         | 1 | 10    | 100   | 1.000 | 10.000 | 100.000 |
| $z = (1 + \frac{1}{n})^n$ | 2 | 2,594 | 2,705 | 2,717 | 2,7182 | 2,71827 |

Se observa que  $z$  tiende a aproximarse a un valor límite cuyas tres primeras cifras decimales ya se van repitiendo :2,718 cuando  $n$  va tendiendo a valores cada vez mayores.

Para poder calcularlos, desarrollemos el binomio

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2!} + \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3}}{3!} + \frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}}{4!} + \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{4!} + \dots$$

A medida que  $n$  adquiere valores más grandes, aumenta el número de términos de esa suma y son cada vez menores los valores de  $\frac{1}{n}$ ;  $\frac{2}{n}$ ;  $\frac{3}{n}$  --- y cuando  $n \rightarrow \infty$ , el número de sumandos es infinito, con lo cual la suma se ha convertido en una serie y  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

lo mismo que  $\frac{2}{n}$ ;  $\frac{3}{n}$ , etc., en tal caso, se podrá escribir :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

y en Análisis Matemático se demuestra que la serie del segundo miembro converge a un valor determinado, comprendido entre 2 y 3, que se denomina número e, compuesto de infinitas cifras decimales y que no es raíz de ninguna ecuación algebraica, y cuyo valor exacto lo da e esa serie, que abreviadamente se escribe así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818285 \dots$$

3.- CONSTANTES Y VARIABLES - FUNCIONES -3.1.- Variables y Constantes

Una variable es una cantidad que puede adoptar diferentes valores. El conjunto de tales valores puede estar limitado a determinadas restricciones, y variar sólo entre un cierto grupo de números fijados. Así, una variable puede ser el número de naranjas de determinado tamaño que pueden ser acondicionadas en una caja dada por distintos empaquetadores. Sin lugar a dudas que el número de naranjas para cada caja no es el mismo; pueden empaquetarse 59, 60, 61, -----72 según sea la forma de disponerlas.

Una constante es una cantidad que siempre conserva el mismo valor cualquiera sea el problema dado o la discusión, por ejemplo, 2, 5,  $\sqrt{7}$ , etc.

3.2.- Funciones

Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.-

Ejemplo: I) El área del círculo viene dada por la fórmula

donde  $\pi = 3,1415926$  ----- es relación de la longitud de la circunferencia a su diámetro y  $x$  es el valor del radio.

El área  $y$  del círculo se halla determinada en función del radio del mismo.-

II) Si  $S$  es el espacio que recorre un móvil, animado de un movimiento uniforme con velocidad  $v$ , durante un intervalo de tiempo  $t$ , se tiene que  $S = vt$

expresa que el espacio recorrido es una función del tiempo.-

III) En un gas perfecto, a temperatura constante, la presión  $p$  y el volumen específico  $v$  están ligados por la relación siguiente:

$$p \cdot v = k$$

$k$  es constante  
llamada ley de Boyle (1626-1691), que es equivalente a ésta otra:

que da el volumen específico del gas a temperatura constante, en función de la presión.-

3.3.- Notación

La función  $y$  de  $x$  se indica con los símbolos

$$y = f(x) ; y = e(x) ; y = \varphi(x) ; \text{etc.}$$

Se llama función uniforme o de un sólo valor, cuando a un valor de la variable  $x$ , llamada independiente, le corresponde uno y sólo un valor para la  $y$ , llamada variable dependiente

Ejemplo:

$$y = \pi x^2$$

es uniforme; en cambio la  $y^2 = 1 - x^2$

(\*).-Por error, se imprimió como 42 Conferencia las que correspondían de 42 a 92 Conferencias, dictadas los días 14,15,16,17 y 18 de marzo.

no es uniforme, pues, para cada valor de  $\underline{x}$  en el intervalo  $(-1 / +1)$ , es decir

$$-1 \leq x \leq +1$$

se obtienen dos valores para  $y$ , ya que, despejando a la  $y$  solamente, es:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

obteniéndose para  $x = x_1$ , los valores:

$$y_1 = +\sqrt{1 - x_1^2} \quad y_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$$

También puede ser  $y$  variable dependiente de dos o más variables independientes que varían con arbitrariedad, indicándose esto con la notación

$$y = f(x, t); \quad y = \varphi(x, t, u) \text{ etc.}$$

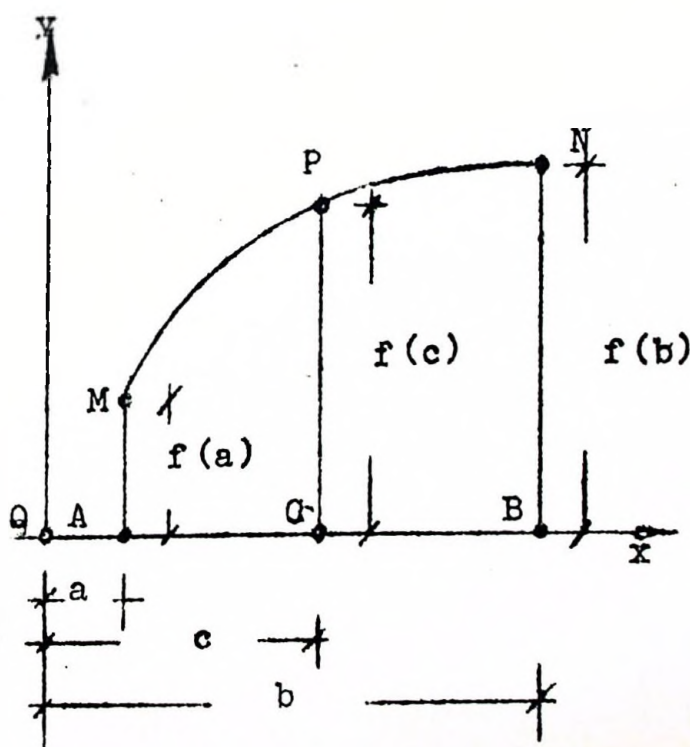
### 3.4.- Representación Gráfica

$$\text{Si } y = f(x)$$

es una función de  $\underline{x}$ , para  $a \leq x \leq b$

es  $(a / b)$  el intervalo o campo de variación de  $\underline{x}$ . Sea  $\underline{c}$  un valor de  $\underline{x}$  comprendido entre  $a$  y  $b$ , el valor correspondiente a  $y$  será  $f(c)$

Si sobre un sistema de dos ejes perpendiculares llevamos sobre uno de ellos, el horizontal, los valores de  $\underline{x}$  comprendidos entre  $a$  y  $b$  y sobre el vertical los que resultan para  $y$ , obtenemos un conjunto de puntos  $P$ , para cada par de valores de  $\underline{x}$  e  $y$ , que se hallarán sobre una curva que llamaremos representación gráfica o diagrama de la función dada.-

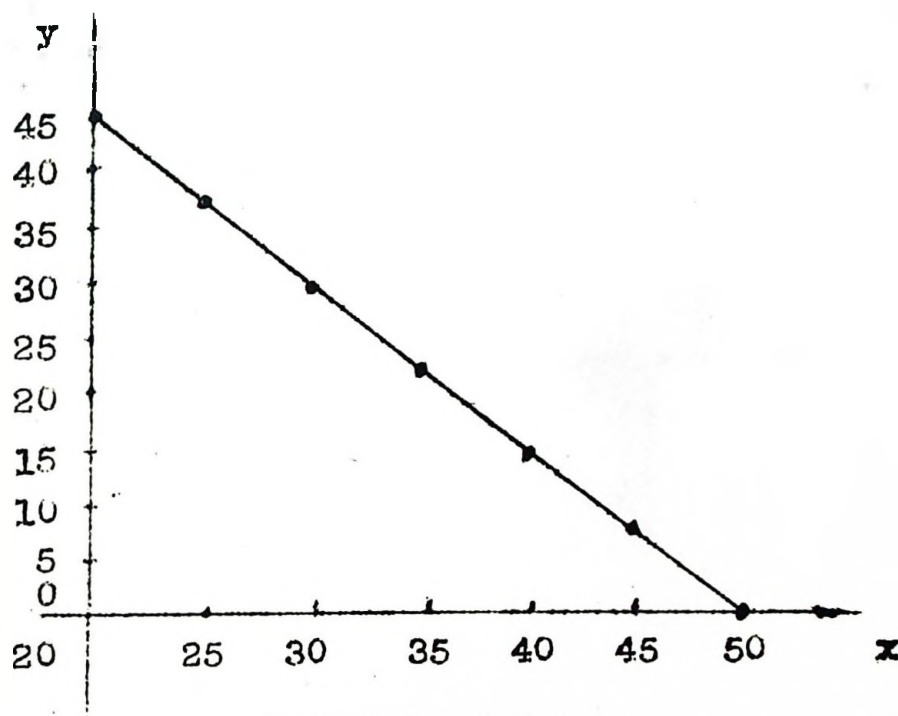


Las funciones pueden venir dadas por expresiones analíticas, como se vió antes o por expresiones empíricas como : Ejemplo I: Ley de Tait que es una fórmula empírica que da aproximadamente el número  $y$  de hijos generados en el espacio de un año por un grupo de 100 mujeres casadas, en edad fecunda, esto es, entre 16 y 50 años más o menos, de edad media  $x$ . Dicha ley viene expresada así :

$$y = k ( 50 - x )$$

donde  $k$  es el coeficiente de fecundidad matrimonial de Tait, que puede tomarse aproximadamente igual a 1,50. Entre 20 y 45 años, esa fórmula da resultados bastante aceptables, expresando que la fecundidad se acerca a 0 alrededor de los 50 años.

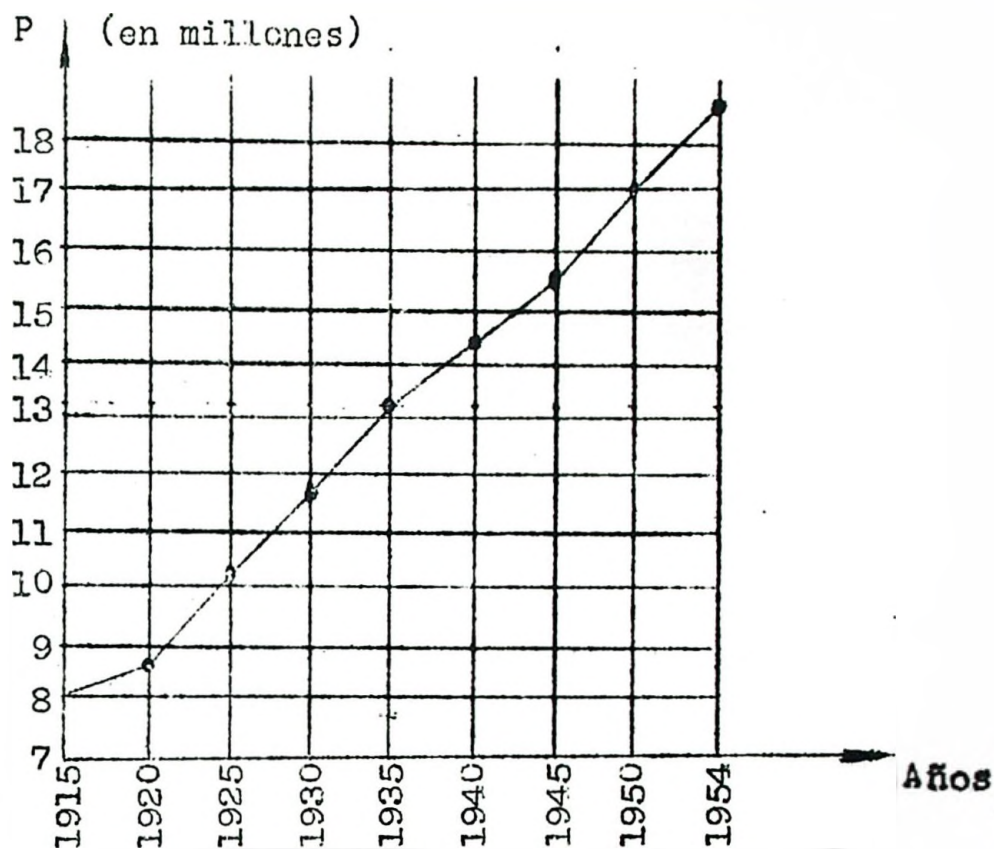
Para  $k = 1,50$  se obtiene



| x    | y     |
|------|-------|
| Años | Hijos |
| 20   | 45    |
| 25   | 37,5  |
| 30   | 30    |
| 35   | 22,5  |
| 40   | 15    |
| 45   | 7,5   |
| 50   | 0     |

una recta. Este tipo de funciones, de la forma general  
 $y = ax + b$  se llaman lineales

Ejemplo II) La población P de un país varía con el tiempo  
 t. En efecto, en la República Argentina la población ha crecido en la forma indicada en la siguiente tabla:



| Año  | P ( habitantes ) |
|------|------------------|
| 1914 | 7.885.237        |
| 1915 | 8.072.387        |
| 1920 | 8.861.310        |
| 1925 | 10.357.963       |
| 1930 | 11.896.382       |
| 1935 | 13.043.758       |
| 1940 | 14.169.167       |
| 1945 | 15.389.986       |
| 1950 | 17.188.526       |
| 1954 | 18.566.000       |

Se obtiene una poligonal. Este es el caso en el cuál la relación de dependencia de  $y$  con respecto al tiempo  $x$ , que en éste caso es la variable independiente, no se conoce analítica ni empíricamente.-

### 3.5, POTENCIA Y LOGARITMO

#### Sucesivas extensiones del concepto de potencia

a) Potencia de exponente positivo:  $n > 0$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

n factores

$a$  = base

$n > 0$  exponente

b) Potencia de exponente negativo:  $n < 0$

Toda potencia de exponente negativo es igual a 1 sobre esa misma potencia con exponente positivo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

c) Potencia de exponente fraccionario

Toda potencia de exponente fraccionario es igual una raíz de índice igual al denominador de la fracción y cuyo subradical es la base de la potencia con un exponente igual al numerador, -

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Aplicando la definición de las potencias de exponente negativo, se puede escribir que:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Ejemplo:  $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4} = 0,25$

d) Propiedades:

I) Producto de potencias de igual base

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

II) Cociente de potencias de igual base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

III) Potencia de una potencia

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

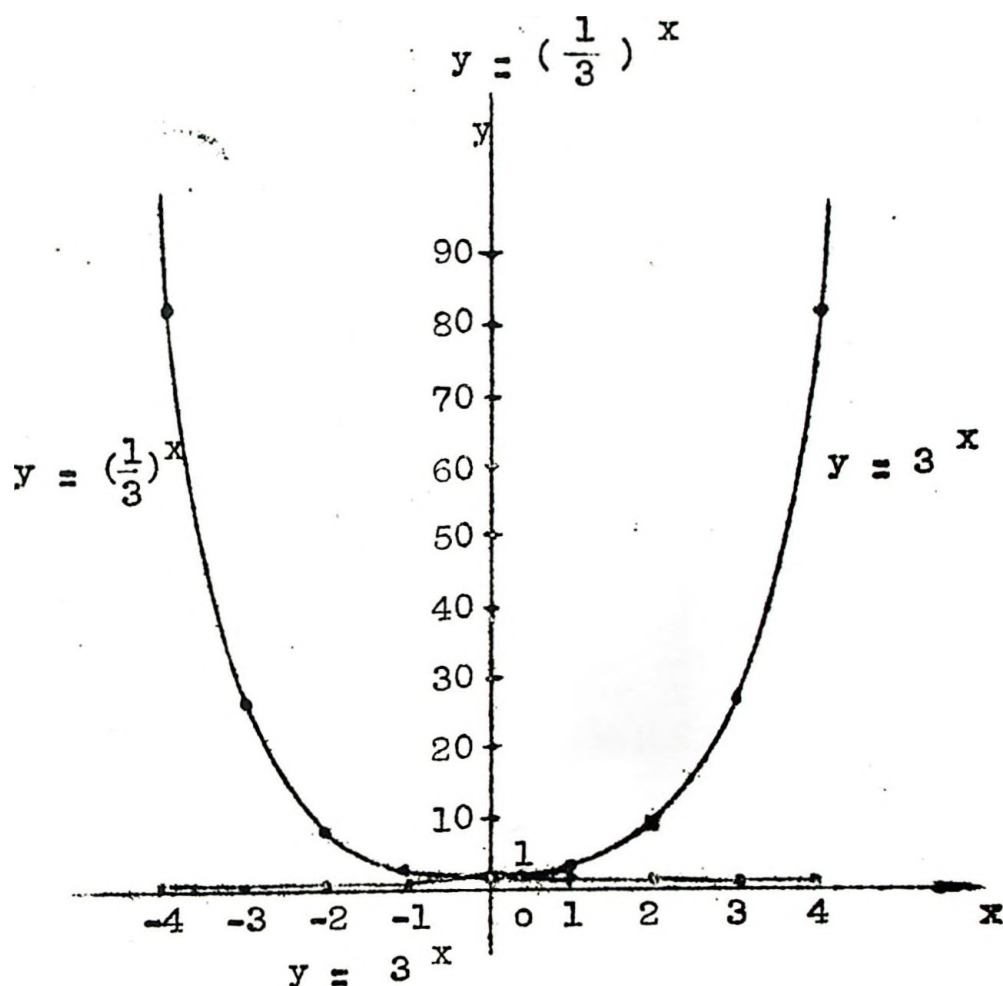
e) LA FUNCION EXPONENCIAL

Fijado un valor de  $a > 0$ , se puede considerar el valor  $y$  de la potencia  $a^x$  como función del exponente  $x$ , es decir:

esta función se llama exponencial de base  $a$ . -

Para cada valor de  $a > 0$  se tendrá una función exponencial determinada.

Ejemplo: Sean



| $x$ | $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ | $3^x$ |
|-----|------------------------------|-------|
| -4  | 81                           | 0,012 |
| -3  | 27                           | 0,04  |
| -2  | 9                            | 0,11  |
| -1  | 3                            | 0,33  |
| 0   | 1                            | 1     |
| 1   | 0,33                         | 3     |
| 2   | 0,11                         | 9     |
| 3   | 0,04                         | 27    |
| 4   | 0,012                        | 81    |

Se observa que para  $a > 1$ , en este caso  $a = 3$ , la función crece; en cambio, cuando  $a < 1$ , es decir, para  $a = \frac{1}{3}$ , la función es decreciente.-

## f ) LA FUNCION LOGARITMICA

Suponiendo siempre que  $a > 0$ , se puede también, considerar inversamente a  $x$  como función de  $y$ . En éste caso, se dice que  $x$  es el logaritmo de  $y$  en base  $a$  y se puede escribir que sí:

$$y = a^x \quad \text{es} \quad x = \log_a y$$

El logaritmo de un número es el exponente con que hay que elevar la base para obtener el número dado.-

Ejemplo:

$$\text{I) } \log_2 8 = 3 \quad \text{pues} \quad 2^3 = 8$$

$$\text{II) } \log_2 0,125 = 3 \quad \text{pues} \quad 2^3 = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\text{III) } \log_{10} 1000 = 3 \quad \text{pues} \quad 10^3 = 1000$$

$$\text{IV) } \log_{10} 1856 = 3,26858 \quad \text{pues} \quad 10^{3,26858} = 1856$$

### 1) Propiedades

#### I) Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.-

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2 (4 \cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16 = 2 + 4 = 6$$

#### II) Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el del divisor.-

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 \left( \frac{16}{4} \right) = \log_2 16 - \log_2 4 = 4 - 2 = 2$$

### III) Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_2 16^4 = 4 \log_2 16 = 4 \times 4 = 16$$

### IV) Logaritmo de una raíz

El logaritmo de una raíz es igual al cociente del logaritmo del subradical sobre el índice de la raíz.-

$$\log_a \sqrt[y]{x} = \frac{\log_a x}{y}$$

$$\log_2 \sqrt[4]{16} = \frac{\log_2 16}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

## 2) Reseña histórica

El sistema numérico de los griegos fué aún más inconveniente que el de los romanos. El inconveniente era aún mayor cuando se trataba hacer operaciones tales como  $1243 \times 685$  con la notación romana MCCXLIII X DCLXXXV. La notación hindú de base 10 fué perfeccionada en la India durante los siglos V y VI después de J.C. fué una de las más grandes invenciones del cálculo. La segunda de las grandes invenciones numéricas fué la extensión de la notación hindú a los decimales; ésta fué realizada por STEVIN de Holanda en 1585 el que la aplicó a las fracciones decimales. La tercera gran invención numérica, fueron los logaritmos, efectuada por el matemático escocés JHON NAPIER, Lord de MERCHISTON ( 1550 - 1617 ) que la dió a conocer en 1614.-

HENRY BRIGGS ( 1561 - 1631 ), profesor del GRESHAM COLLEGE conoció a Napier y discutió con él su invención numérica, y después de su muerte, ocurrida en 1617, halló en su amigo Briggs un continuador que completó su obra. En 1624, Briggs creó un sistema de logaritmos de base 10, que aún hoy se usa, cuya operatoria es mucho más fácil que el sistema de Napier de base  $e$ . Las tablas que confeccionó traían los logaritmos de los números de 1 a 20.000 y de 90.000 a 100.000, todos ellos con 14 cifras decimales.-

En 1626, ADRIAN VLACQ publicó una tabla de logaritmos de los números de 1 a 100.000.-

## 3.- Cálculo de los logaritmos

Los logaritmos descubiertos por Napier se llamaron neperia-

nos o naturales y su base es el número  $e = 2,71828$  ----- y los de Briggs, de base 10, decimales. Estos últimos son los que vamos a calcular.- Dado un número  $N$ , su logaritmo decimal contiene una parte entera, llamada característica, que se obtiene fácilmente como veremos enseguida, y una parte decimal, llamada mantisa que se busca en una tabla de logaritmos.- Ejemplo:

$$I) \log_{10} 4817,2 = \log_{10} (10^3 \cdot 4,8172) = \log_{10} 10^3 + \log_{10} 4,8172$$

$$= 3 + \log_{10} 4,8172$$

( característica )                      ( mantisa )

$$II) \log_{10} 0,00048172 = \log_{10} (10^{-4} \cdot 4,8172) =$$

$$= -4 + \log_{10} 4,8172$$

( característica )                      ( mantisa )

Es una tabla de logaritmos decimales se encuentra

$$\log_{10} 4,8172 = 0,68279$$

luego

$$\log_{10} 4817,2 = \underline{3,68279}$$

$$\log_{10} 0,00048172 = \underline{\bar{4},68279}$$

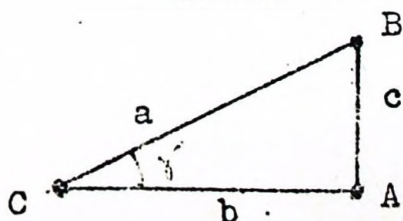
Regla 1 ) Si  $N > 1$  la característica es positiva e igual al número de cifras enteras menos 1.-

Regla 2 ) Si  $0 < N < 1$  la característica es negativa e igual al número de ceros que preceden a la primera cifra significativa.-

El cálculo de la mantisa y operaciones con logaritmos, así como el cálculo del antilogaritmo, será efectuada en la parte práctica.-

## g ) LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

1 ) Definiciones:



En el triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ , se llama:

$$\operatorname{sen} \gamma' = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{cosec} \gamma' = \frac{a}{c}$$

$$\cos \gamma' = \frac{b}{a}$$

$$\sec \gamma' = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cotg} \gamma' = \frac{b}{c}$$

Estas seis relaciones se deben considerar como funciones del ángulo  $\gamma' = \angle B \hat{C} A$ .

## 2) Propiedades

Teniendo presente el teorema de Pitágoras y las definiciones anteriores, se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$a) \quad \operatorname{sen}^2 \gamma' + \cos^2 \gamma' = 1$$

$$b) \quad \operatorname{tg} \gamma' = \frac{\operatorname{sen} \gamma'}{\cos \gamma'}; \quad \operatorname{cotg} \gamma' = \frac{\cos \gamma'}{\operatorname{sen} \gamma'}$$

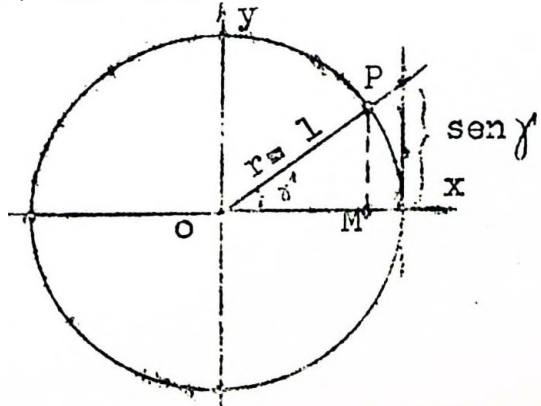
$$c) \quad \operatorname{tg} \gamma' \operatorname{cotg} \gamma' = 1$$

$$d) \quad \operatorname{cosec} \gamma' = \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma'}; \quad \sec \gamma' = \frac{1}{\cos \gamma'}; \quad \operatorname{cotg} \gamma' = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma'}$$

$$e) \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \gamma' = \sec^2 \gamma'$$

## 3) La circunferencia trigonométrica

Si se toma una circunferencia de radio  $= 1$  y un ángulo  $\gamma'$  agudo, las funciones trigonométricas tienen una representación especial. En efecto:



1) Si  $y = \operatorname{sen} \gamma'$ , en el triángulo

rectángulo  $\widehat{MOP}$  es

$$\operatorname{sen} \gamma' = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PM}}{1} = \text{med. } \overline{PM}$$

$$\text{med. } \overline{PM} = \operatorname{sen} \gamma'$$

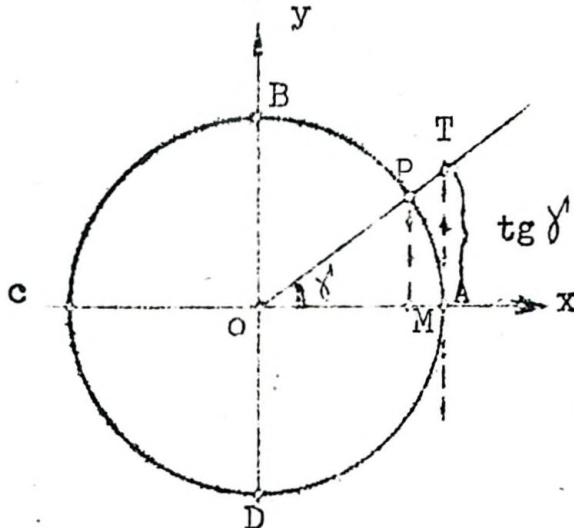
2) Si  $y = \cos \gamma'$

en  $\triangle MOP$  es:

$$\cos \gamma' = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \text{med. } \overline{OM}$$

luego

$$\boxed{\text{med. } \overline{OM} = \cos \gamma'}$$



Si

$$y = \tan \gamma'$$

se traza la tangente en A a la circunferencia y consideramos la semejanza de los triángulos rectángulos:

$$\triangle OPM \sim \triangle OAT$$

$$\tan \gamma' = \frac{PM}{OM}$$

pero  $\frac{PM}{OM} = \frac{AT}{OA}$

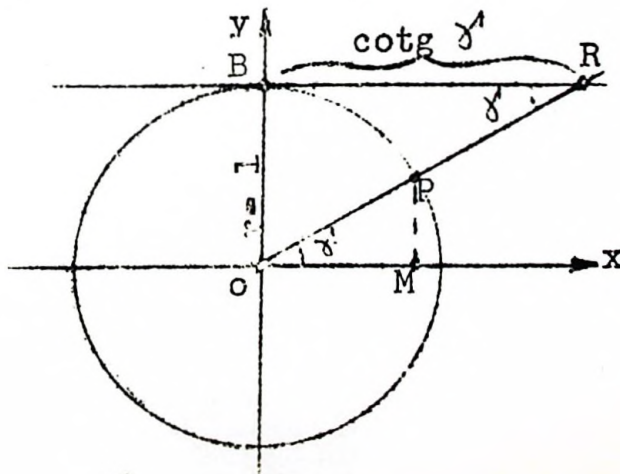
luego

$$\tan \gamma' = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = \text{med. } \overline{AT}$$

$$\boxed{\tan \gamma' = \text{med. } \overline{AT}}$$

4 )

Si  $y = \cotg \gamma'$



se traza la tangente a la circunferencia en B y considerando la semejanza de los triángulos rectángulos:

$$\triangle OMP \text{ y } \triangle OBR \text{ resulta:}$$

$$\cotg \gamma' = \frac{\overline{OM}}{\overline{PM}}$$

pero siendo:

$$\triangle OMP \sim \triangle OBR$$

$$\frac{OM}{PM} = \frac{BR}{OB} = \frac{BR}{1} = \text{med. } \overline{BR}$$

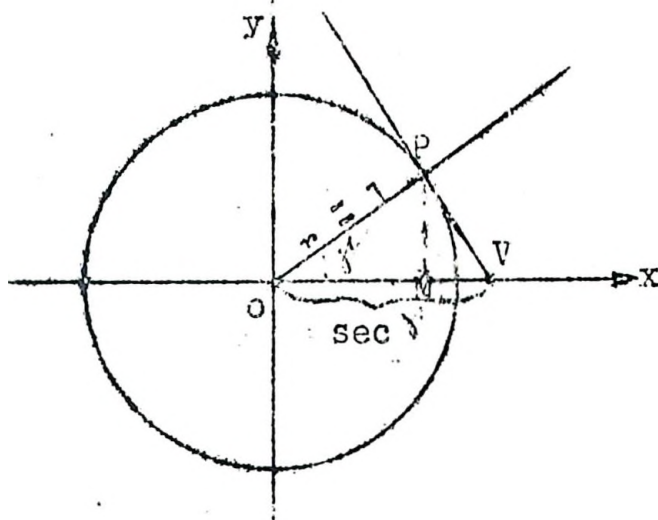
luego es

$$\cotg \gamma' = \text{med } \overline{BR}$$

5)

Si

$$y = \sec \gamma'$$



Se traza la tangente a la circunferencia en P y se consideran los triángulos  $\triangle OMP$  y  $\triangle OPV$  que son semejantes.-

$$\sec \gamma' = \frac{OP}{OM}$$

pero

$$\triangle OMP \sim \triangle OPV$$

luego

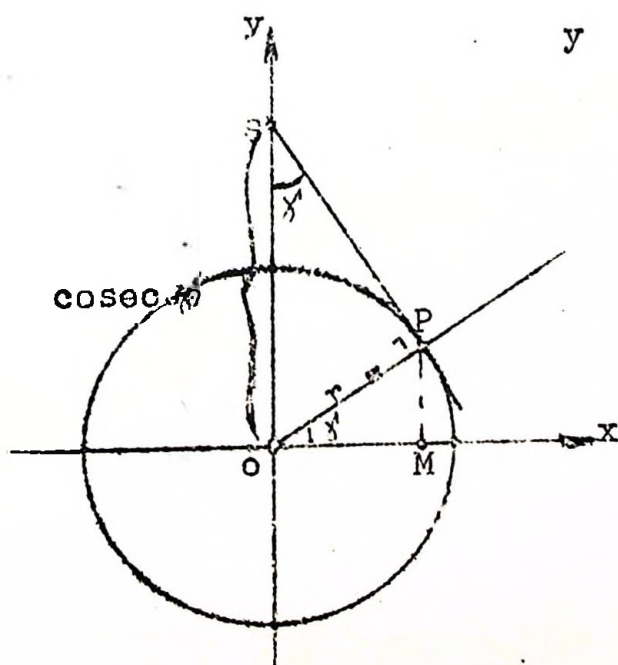
$$\frac{OP}{OM} = \frac{OV}{OP} = \frac{OV}{1} = \text{med } \overline{OV}$$

es

$$\sec \gamma' = \text{med. } \overline{OV}$$

6)

$$y = \text{cosec } \gamma'$$



Trazando la tangente al círculo en P y considerando los triángulos rectángulos  $\triangle OMP$  y  $\triangle OPS$  que son semejantes, se tiene:

$$\text{cosec } \gamma' = \frac{OP}{PM}$$

pero siendo  $\triangle OPM \sim \triangle OPS$  es:

$$\frac{OP}{PM} = \frac{OS}{OP} = \frac{OS}{1} = \text{med } \overline{OS}$$

luego es

$$\text{cosec } \gamma' = \text{med. } \overline{OS}$$

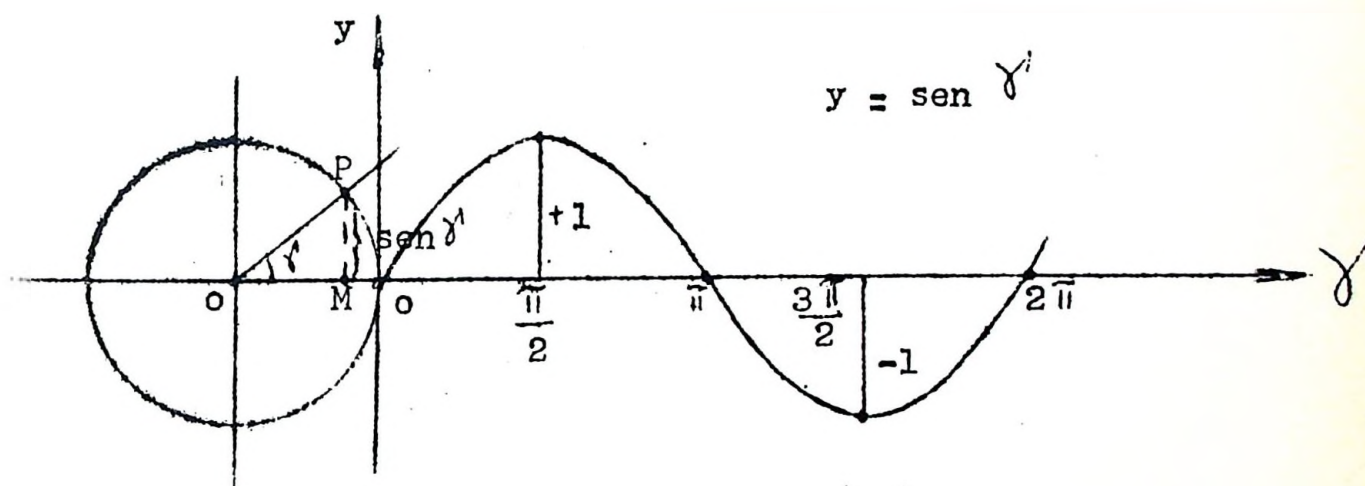
4.-

VARIACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICASa) Variación del seno

En 1) si  $\gamma'$  crece de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , la medida del segmento P M, que da el sen  $\gamma'$ , varía de 0 a 1. Si  $\gamma'$  crece de  $90^\circ$  a  $180^\circ$ , el sen  $\gamma'$  disminuye de 1 a 0; si ahora  $\gamma'$  crece de  $180^\circ$  a  $270^\circ$ , el sen  $\gamma'$  disminuye de 0 a -1, y finalmente, si  $\gamma'$  crece de  $270^\circ$  a  $360^\circ$  completando un giro, el sen  $\gamma'$  crece de -1 a 0. Estas variaciones del seno quedan tabuladas en la siguiente tabla:

| $\alpha$     | $0^\circ$ a $90^\circ$ | $90^\circ$ a $180^\circ$ | $180^\circ$ a $270^\circ$ | $270^\circ$ a $360^\circ$ |
|--------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| sen $\gamma$ | 0 a 1                  | 1 a 0                    | 0 a -1                    | -1 a 0                    |

Si llevamos sobre un eje horizontal los valores de  $\gamma'$  en radianes y sobre el eje vertical los valores de sen  $\gamma'$  se obtiene la siguiente curva, llamada senoide cuya forma se



repite en cada giro de  $\gamma'$ , por ello se dice que el seno es una función periódica, de período  $360^\circ$  ó  $2\pi$  radianes, vale decir, que:

$$\text{sen}(\gamma' + k \cdot 360^\circ) = \text{sen } \gamma' \quad (\text{en grados})$$

o bien 
$$\text{sen}(\gamma' + 2k\pi) = \text{sen } \gamma' \quad (\text{en radianes})$$

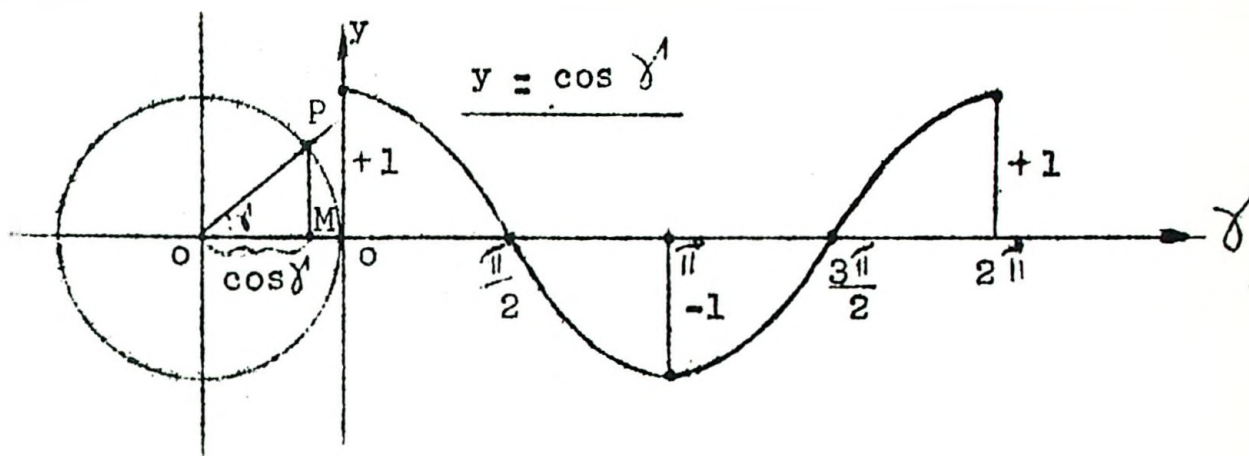
donde  $k$  es un número entero .-

b) Variaciones del coseno

Siendo la medida de  $OM$  la que nos da el cos  $\gamma'$ , si  $\gamma'$  varía de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , el segmento  $OM$  decrece de 1 a 0; si  $\gamma'$  aumenta de  $90^\circ$  a  $180^\circ$ , es cos  $\gamma' = 0$  para  $90^\circ$  y cos  $\gamma' = -1$  para  $180^\circ$ . Ahora, si  $\gamma'$  aumenta de  $180^\circ$  a  $270^\circ$ , el cos  $\gamma'$  aumenta de -1 a 0, y finalmente, si  $\gamma'$  crece de  $270^\circ$  a  $360^\circ$ , dando un giro completo, cos  $\gamma'$  crece de 0 a 1. Estas variaciones se consignan en el siguiente cuadro:

|                |                        |                          |                           |                           |
|----------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $\gamma'$      | $0^\circ$ a $90^\circ$ | $90^\circ$ a $180^\circ$ | $180^\circ$ a $270^\circ$ | $270^\circ$ a $360^\circ$ |
| $\cos \gamma'$ | 1 a 0                  | 0 a -1                   | -1 a 0                    | 0 a 1                     |

$\gamma'$  Efectuando análoga representación gráfica que para el sen, pero llevando en este caso segmento OM sobre el eje vertical, se obtiene la siguiente curva llamada cosinusoide, que es una curva que



se repite en cada giro de  $\gamma'$ , vale decir, que el coseno es una función periódica, de período  $360^\circ$  o  $2\pi$  radianes. En consecuencia

$$\cos(\gamma' + k 360^\circ) = \cos \gamma' \quad (\text{en grados})$$

$$\cos(\gamma' + 2k\pi) = \cos \gamma' \quad (\text{en radianes})$$

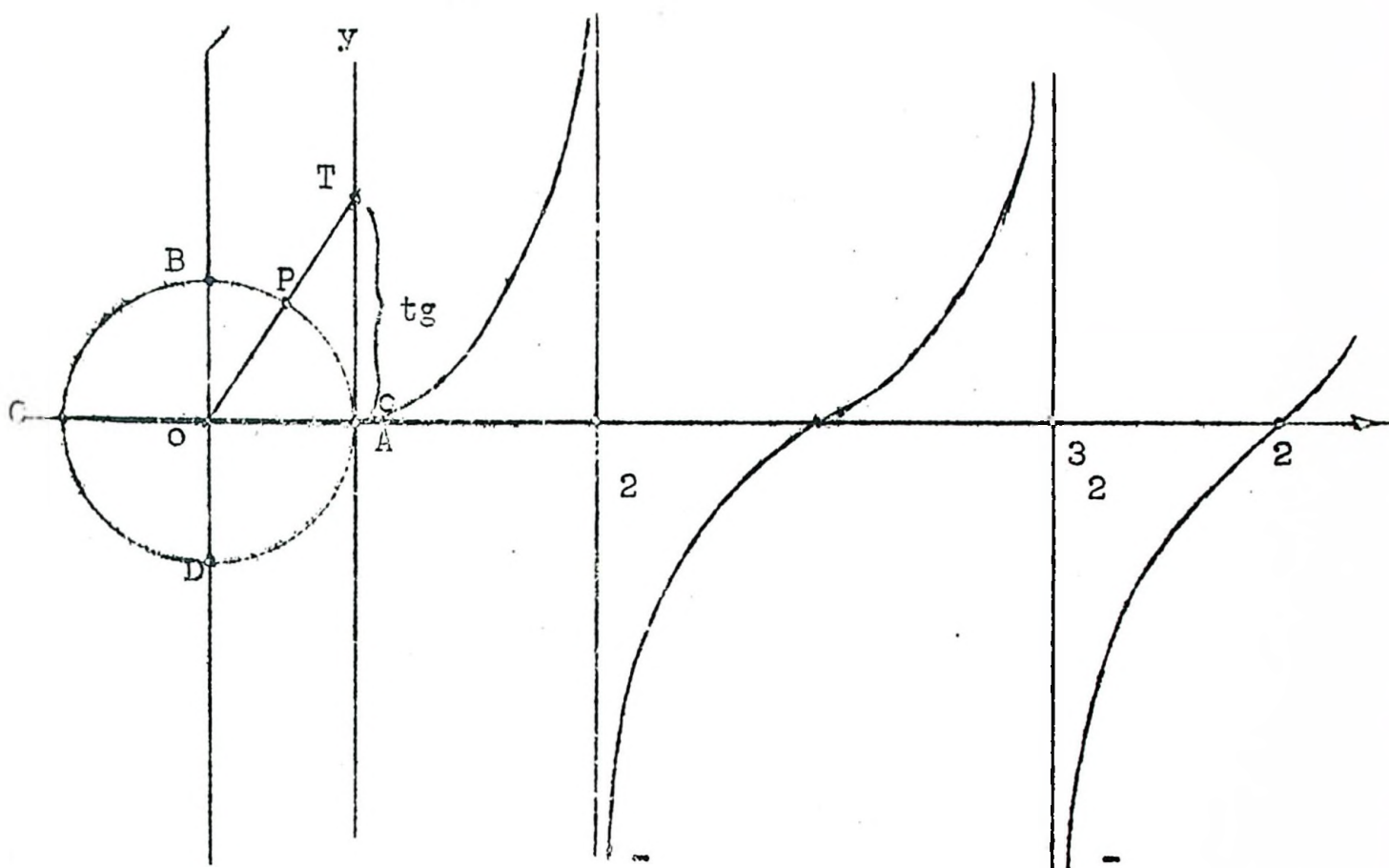
donde  $k$  es un número entero.-

### c) Variaciones de la tangente

Siendo la medida de  $\overline{AT}$  la que nos da la  $\text{tg } \gamma'$ , si  $\gamma'$  varía de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , el punto T se desplaza, sobre esa recta, desde A hasta  $\infty$  positivo, y en consecuencia,  $\text{tg } \gamma'$  varía de 0 a  $+\infty$ . Apenas P pasa a la izquierda de B, el punto T se desplaza de  $+\infty$  a  $-\infty$  apareciendo por debajo de A y la  $\text{tg } \gamma'$  varía de  $-\infty$  a 0 cuando P coincide con C. Al pasar P por debajo de C, el punto T pasa por encima de A y se aleja a  $+\infty$  cuando P coincide con D, en cuyo caso la tangente varía de 0 a  $+\infty$ . Cuando P pasa a la derecha de D, el punto P salta de  $+\infty$  a  $-\infty$  y cuando P coincide con A, dando  $\gamma'$  un giro completo, la  $\text{tg } \gamma'$  ha pasado de  $-\infty$  a 0. La siguiente tabla reúne estas variaciones:

|                      |                        |                          |                           |                           |
|----------------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $\gamma'$            | $0^\circ$ a $90^\circ$ | $90^\circ$ a $180^\circ$ | $180^\circ$ a $270^\circ$ | $270^\circ$ a $360^\circ$ |
| $\text{tg } \gamma'$ | 0 a $+\infty$          | $-\infty$ a 0            | 0 a $+\infty$             | $-\infty$ a 0             |

Llevando estos valores sobre dos ejes perpendiculares, se tiene la curva llamada tangentoide que tiene saltos de discontinuidad



infinita para  $\gamma' = \frac{3\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{2} + \pi$  y se repite cada medio giro de  $\gamma'$ , es decir que es periódica de período  $\pi$  o  $180^\circ$ , luego:

$$\operatorname{tg}(\gamma' + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \gamma' \quad (\text{en grados})$$

$$\operatorname{tg}(\gamma' + k \cdot \pi) = \operatorname{tg} \gamma' \quad (\text{en radianes})$$

## 5) Propiedades más notables

### a) Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\pm \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$$

b) Fórmulas de duplicación

( para  $\alpha = \beta$  )

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

c) Fórmulas de la bisección

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

d) Fórmulas de prostaferesis

( Transformaciones de una suma o resta de senos o de cosenos en producto ).

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

### 5) Reseña histórica

La trigonometría es tan vieja como Egipto, aunque en una forma rudimentaria. Tolomeo en el siglo II d J. C. en su Almagesto resumió las características principales de la Geometría Esférica, en donde la Trigonometría plana aparece como un suplemento para el cálculo de la Trigonometría Esférica. Los griegos utilizaron estos conocimientos trigonométricos egipcios para su astronomía pero sin dar gran avance a esta rama. Los hindúes, aproximadamente en el siglo IV, después de J.C., dieron un desarrollo considerable a la trigonometría griega, construyendo tablas de senos calculadas de 32,75 hasta 90°. Los árabes adoptaron y desarrollaron la trigonometría hindú y el primer progreso notable se debió al astrónomo A P - BATTANI en el siglo IX con el uso del seno, tg y cotg de los hindúes. En el siglo X se construyen tablas de tg y cotg, y se descubren la secante y cosecante. La sistematización de la Trigonometría como disciplina matemática se debe a Abul - Wefa al finalizar el siglo X. El primer texto árabe de trigonometría como ciencia independiente fué debido al astrónomo persa NASIR - EDDIN ( 1201 - 1274 ) que con la decadencia de la cultura árabe quedó olvidado. Recién en 1202, Leonardo de Pisa ( FIBONACCI ) da a conocer en Europa estas nociones del álgebra hindú arábica en su obra maestra LIBER ABACI.

### 3.6.- BIBLIOGRAFIA

Alzaa y Jaime: Trigonometría plana y esférica .  
Bs. Aires.-

W. A. Granville : Trigonometría plana y esférica  
Ed. V.T.E.H.A.- México- 1950.

EJERCICIOS1.- ANALISIS COMBINATORIO1.1.- Análisis combinatorio simple

1.- De 7 ingleses y 4 americanos se va a formar un comité de 6. De cuántas maneras puede formarse ?

a) Cuando haya en el comité 2 americanos

b) Cuando haya un mínimo de 2 americanos

Caso a: Tenemos que escoger 2 americanos y 4 ingleses.-

Los americanos pueden escogerse de  $C_4^2$  maneras y los ingleses de  $C_7^4$ . Cada uno de los primeros grupos puede asociarse con c/uno de los segundos; luego

$$\text{No de maneras} = C_4^2 \times C_7^4$$

$$= \frac{4!}{2! 2!} \cdot \frac{7!}{4! 3!} = \frac{7!}{2! 2! 3!}$$

$$= \underline{210}$$

Caso b: El comité puede contener 2, 3 ó 4 americanos.- Agotaremos todas las combinaciones posibles formando todos los grupos que contengan 2 americanos y 4 ingleses; después 3 americanos y 3 ingleses y por último, 4 americanos y 2 ingleses.- Luego

$$\text{No de maneras} = C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2$$

$$= \frac{4!}{2! 2!} \cdot \frac{7!}{4! 3!} + \frac{4!}{3! 1!} \cdot \frac{7!}{2! 4!} + 1 \cdot \frac{7!}{2! 5!}$$

$$= 210 + 140 + 21 = \underline{371}$$

2.- Hay 8 candidatos para un concurso de Literatura, 7 para uno de Matemáticas y 4 para uno de Ciencias Naturales ? De cuántas maneras pueden ser calificados los concursantes ?

3) Hallar el valor de  $A_8^7$ ;  $A_{25}^5$ ;  $C_{24}^4$ ;  $C_{19}^{14}$

4) ? Durante cuántas noches se puede establecer una guardia de 4 hombres tomados de un grupo de 24, de tal manera que ninguna pareja de veladores se repita. En cuántas de éstas noches se tomaría cualquier hombre?

$$C_{24}^4 = 10626$$

$$C_{23}^3 = 1771$$

5) En el consejo de una ciudad hay 25 consejeros y 10 oficiales ? Cuántos comités pueden formarse si deben constar de 5 consejeros y 3 oficiales?

$$C_{25}^5 \times C_{10}^3 = 6.375.600$$

6) Con cuatro oficiales y ocho soldados rasos, ? Cuántos grupos de 6 pueden formarse de manera que :

a) en cada grupo entre un oficial y uno sólo

b) en cada grupo entre por lo menos, un oficial

$$a) 4 \times C_8^5 = 224$$

$$b) 4 \times C_8^5 + C_4^2 \times C_8^4 + C_4^3 \times C_8^3 + C_4^4 \times C_8^2 = 896$$

7) Hállase  $r$  si:

$$\frac{A_{56}^{r+6}}{A_{54}^{r+3}} = 30.800 \quad r = 41$$

8) Hállase  $r$  si:

$$\frac{C_{28}^{2r}}{C_{24}^{2r-4}} = \frac{225}{11} \quad r = 7$$

9) ? Cuántos números mayores que un millón pueden formarse con los dígitos 2, 3, 0, 3, 4, 2, 3 ?

$$\frac{7!}{2! 3!} - \frac{6!}{2! 3!} = 360$$

10 ) Calcular

$$\frac{14!}{(3!)^2 (2!)^2} = 151.351.200.-$$

### 1.2.- Análisis combinatorio con repetición

1) Con 9 letras entre las cuales hay varias a se pueden formar 504 palabras diferentes ? Cuántas son las a?

$$P_a = \frac{9!}{504} = 720 = 6 !$$

2) Cuántas palabras de 3 vocales y 3 consonantes se pueden formar de modo que no estén dos vocales ni dos consonantes seguidas, tomando del alfabeto 5 vocales y 20 consonantes ?

$$A_{20}^2 \times A_5^3 \times 2 = 2.000.000.-$$

3) Hallar el número de arreglos que pueden formarse con las letras de las palabras:

I ) Independencia

II ) supersticioso

III ) instituciones

4) De cuántas maneras pueden ordenarse 17 bolas de billar si 7 son negras, 6 rojas y 4 blancas ?

$$\frac{17!}{7! 6! 4!} = 4.084.080$$

5) Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con las letras de la expresión  $a^3 b^2 c^4$  cuando está desarrollada ?

$$\frac{9!}{3! 2! 4!} = 1260$$

## 2 .- POTENCIA DE UN POLINOMIO

### 2.1.- Potencia de un binomio

- 1)  $(a + b)^5 =$
- 2)  $(a - c)^7 =$
- 3)  $(x + y)^{20} =$
- 4)  $(1 - y)^8 =$
- 5)  $(a - 4)^{18} =$
- 6)  $(a^2 - 5b)^7 =$
- 7)  $(3a^2 - 2b^3)^5 =$
- 8)  $(\frac{x^3}{a} - \frac{a^2}{x})^6$
- 9)  $(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^{10} =$
- 10)  $(\frac{3c}{x^2} - \frac{x}{2c^2})^{14} =$
- 11)  $(3,1)^6 = (3 + 0,1)^6 =$
- 12)  $(2,3)^8 = (2 + 0,3)^8 =$
- 13)  $(0,98)^{10} = (1 - 0,2)^{10} =$
- 14)  $(1,9)^{12} = (2 - 0,1)^{12} =$
- 15)  $(-2,9)^5 = (-2 - 0,9)^5 =$
- 16)  $(1 + y)^{\frac{1}{2}} =$
- 17)  $(1 - x)^{\frac{2}{3}} =$
- 18)  $(16 + x)^{-\frac{1}{2}} =$
- 19)  $(1 - x)^{-\frac{3}{2}} =$
- 20)  $38^{\frac{1}{2}} = (36 + 2)^{\frac{1}{2}} =$
- 21)  $50^{\frac{1}{2}} = (49 + 1)^{\frac{1}{2}} =$
- 22)  $(224)^{+\frac{1}{3}} = (216 + 8)^{+\frac{1}{3}} =$

$$24) (26)^{-\frac{1}{2}} = (25 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$25) (227)^{-\frac{1}{3}} = (216 + 11)^{-\frac{1}{3}} =$$

## 2.2.- Cálculo de un término fijado

$$1) \text{ Calcular el 7º término de } (a + b)^{15} .-$$

$$2) \text{ Idem el 5º término de } (a + b)^9 =$$

$$3) \text{ Idem el 7º término de } (a - b)^{14} =$$

$$4) \text{ Idem el 3º Término de } (a - 2x^2)^8 =$$

$$5) \text{ Idem el 4º término de } (x - \frac{1}{x})^{20} =$$

## 2.3.- Potencia de un polinomio

$$1) \text{ Calcular el coeficiente del término en } x^4 \text{ en el desarrollo de } (1 + 3x + 5x^2)^5$$

$R = 2005$

2) Obténgase ordenadamente los términos del desarrollo de la potencia de :

$$(4 + 2x + 3x^2)^3 =$$

$$= 27x^6 + 198x^4 + 152x^3 + 192x^2 + 96x + 64$$

$$3) \text{ Hallar los términos en : } x^{14}; x^{10}; x^8; x^2$$

del desarrollo de

$$(3x^4 - 4x^2 + 1)^7$$

$$4) \text{ Hallar el coeficiente del término de la forma: } x^4 y^2 \text{ en el desarrollo de :}$$

$$(1 + 2xy + 3x^2)^7$$

$$1260 x^4 y^2$$

5) Dado

$$(x^2 - \frac{3y}{x} + 4y^4 x)^5 \text{ hallar el término en } x^3 y^6 .-$$

## 3.- LOGARITMOS

1) Calcular el valor de  $x$ , con la tabla de logaritmos, en la expresión:

$$\frac{45 \times 651 \times 3026}{5831 \times 785} = 19,36$$

2) Idem :

$$\frac{9681 \times 7564 \times 250}{1569 \times 852 \times 53400} = 0,2559$$

3) Idem :

$$\frac{41,5 \times 62,35 \times 544,3}{89,36 \times 8,42 \times 2,13} = 877$$

4) Idem :

$$\frac{0,000764 \times 173,6 \times 0,09405 \times 1849}{49,54 \times 17,51 \times 0,00543} = 5,058$$

5) Idem :

$$x = \frac{654^3 \times 317^2 \times 4230}{812 \times 547^4} = 1637$$

$$6) \quad x = \frac{0,0542 \times 0,8546^5 \times 0,0589^4}{6,249 \times 0,459^3} = 0,0000006932$$

$$7) \quad x = \frac{\sqrt[3]{546} \times \sqrt{4175} \times 10,49}{\sqrt{8170} \times \sqrt[5]{2130}} = 13,24$$

$$8) \quad x = \frac{\sqrt[4]{1,213} \times \sqrt[3]{0,6809} \times \sqrt{0,000748}}{0,09765 \times 107,8 \times \sqrt[3]{0,0407}} = 0,006997$$

$$9) \quad x = \frac{\sqrt[7]{(36927)^3} \times \sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{(6259)^2}} = 1,2894$$

10)

$$x = \sqrt[157]{\left(\frac{829}{828}\right)^{361}} = 1.0027$$

4.- ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALITICA4.1.- Reseña histórica

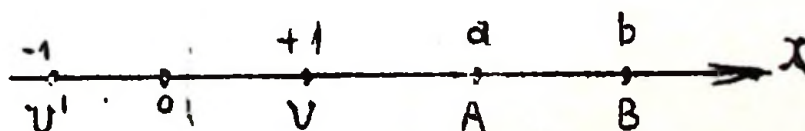
La matemática moderna se originó con cinco progresos principales que tuvieron lugar en el siglo XVII a saber: la geometría analítica de Fermat ( 1629 ) Descartes ( 1637 ); el cálculo diferencial e integral de Newton ( 1666 - 1684 ) y Leibnitz ( 1673 - 1675 ); el análisis combinatorio en ( 1654 ) y en particular, la teoría matemática de las probabilidades debida a Fermat y Pascal; la aritmética superior, alrededor de 1630 a 1665 debida a Fermat; la dinámica de Galileo ( 1591 - 1612 ) y de Newton con la gravitación universal de Newton.-

Junto con éstas cinco podemos agregar dos nuevas direcciones por la influencia posterior en el campo de la matemática : la geometría proyectiva sintética de Desargues y Pascal, entre 1636 y 1639 y el comienzo de la lógica simbólica con Leibnitz, entre 1665 y 1690.-

Debe buscarse el origen de la geometría analítica en la antigüedad griega. Sus primeros vestigios se los halla ya en los egipcios, pero más nítidos en el astrónomo griego HIPARCO, de la segunda mitad del siglo II antes de J.C. En el estudio de la posición de los planetas, Hiparco utilizó las coordenadas: longitud y latitud especialmente. Pueden considerarse como antecesores de Descartes y Fermat, en su creación de la geometría analítica, al geómetra griego APOLONIO (260 a 200 a. J.C. ) con su excelente estudio de las secciones cónicas; a NICOLE ORESME ( siglo XIV ) y J. KEPLER ( 1571 - 1630 ) en el estudio de los movimientos planetarios.-

La gloria de haber erigido a la Geometría Analítica como una rama de la Matemática, en un cuerpo de doctrina lógico y completo, se debe al genio de RENATO DESCARTES ( 1596 - 1650 ) matemático y filósofo francés que en su obra " Discurso del método para guiar bien la razón y buscar la verdad en las ciencias " en su tercero y último apéndice, titulado " La Geometría " contiene su revolucionaria invención.-

Pedro Fermat ( 1601 - 1665 ) jurisconsulto francés y aficionado a la matemática, precedió a Descartes en su invención, pues creó una geometría analítica más completa y sistemática, pero sus trabajos, que los comenzó en 1629, no los comunicó hasta 1636 y recién fueron publicados en 1679 después de su muerte.-

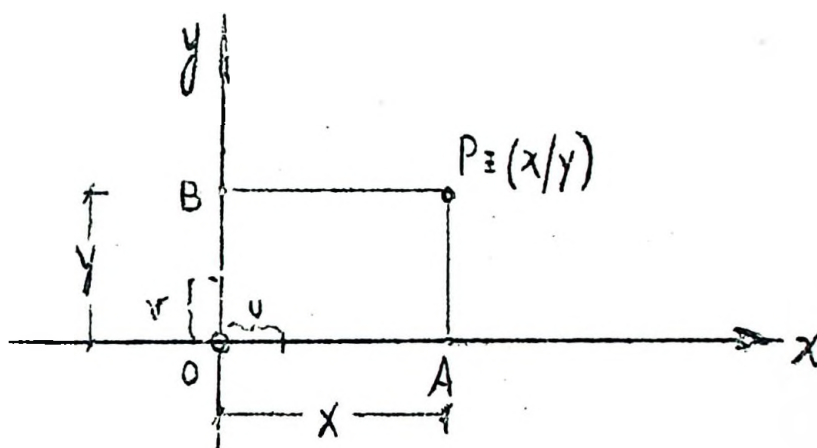
4.2.- Objeto y método en el sistema cartesiano de referenciaa) Abscisas sobre una recta

Dada una recta  $X$ , llamada eje, un punto  $O$  sobre ella, llamado origen; un segmento  $OU = 1$  llamado unidad y se fija uno de los dos sentidos con que un móvil puede recorrerla, llamado sentido positivo; se ha constituido un sistema de abscisas sobre la recta  $X$ .

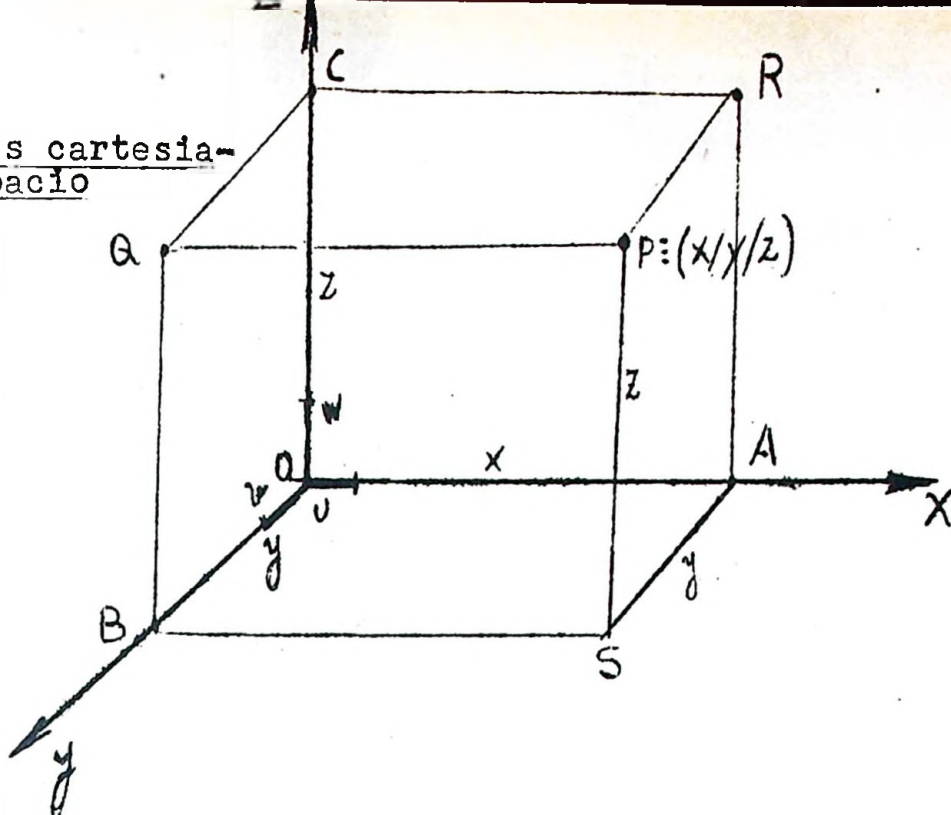
Un punto cualquiera de dicha recta, tal como  $A$  queda fijado en su posición por un número  $a$  (entero, fraccionario o irracional) llamado su abscisa que no es más que la medida del segmento  $OA$  con respecto a la unidad  $OU$  fijada. Viceversa, dado un número real  $a$ , abscisa de un punto, éste queda determinado en forma única, llevando la unidad a partir de  $O$ , en el sentido dado por el signo de  $a$ , tantas veces como lo indica el valor del número. Se ha establecido una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales que nos permite traducir en relaciones algebraicas las relaciones y propiedades de los puntos sobre la recta.-

El origen  $O$  tiene por abscisa cero; dos puntos simétricos con respecto a  $O$  poseen abscisas iguales y opuestas; si un punto se mueve sobre la recta alejándose indefinidamente de  $O$ , la abscisa aumenta en valor absoluto y tiende a  $+\infty$  ó  $-\infty$ , según sea el sentido que tiene el movimiento.-

#### b ) Coordenadas cartesianas en el plano



Dados dos ejes perpendiculares  $ox$  y  $oy$  en el plano, se fija sobre cada uno de ellos un sistema de abscisas, de origen común  $O$ , de sentidos positivos hacia la derecha y hacia arriba, y de unidades  $u$  y  $v$  respectivamente; se ha construido así un sistema cartesiano ortogonal ( ejes perpendiculares ) formado por dos ejes de abscisas, que para distinguirlos se designan: eje de las abscisas, al horizontal y eje de las ordenadas, al vertical. Fijado un punto  $P$  en el plano, su posición queda determinada por las distancias  $PB$  y  $PA$  a los ejes, que medidas sobre ellos, con las unidades  $u$  y  $v$  nos proporcionan dos números  $x$  e  $y$  llamados abscisa y ordenada del punto  $P$ . Viceversa, dados números reales  $x$  e  $y$ , y tomados: el primero como abscisa y el segundo como ordenada; nos permiten determinar dos segmentos sobre los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente:  $OA$  y  $OB$ , por cuyos extremos levantamos las perpendiculares a los ejes y en su intersección hallamos el punto  $P$  que tiene esos dos números dados como abscisa y ordenada. El par de números dados se denomina coordenadas del punto  $P$ . Se ha establecido, de esta manera, una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y el campo de los números reales, de modo tal, que a cada punto del plano le corresponde un único par de números reales, y a cada par de números reales, le corresponde de un modo único, un punto en el plano.-



Se traza por un punto O, llamado origen, tres rectas  $x, y$  y  $z$  perpendiculares que no estén en un mismo plano, y que llamaremos ejes coordenados, respectivamente eje  $x$ , eje  $y$ , eje  $z$ , y sobre cada eje se fija un sistema de abscisas, de origen O y unidades  $u, v, w$ . Los planos que tales ejes determinan dos a dos, serán los planos coordenados  $xy, xz, yz$ . Dado un punto cualquiera P del espacio, se trazan tres planos: P R A S paralelo al  $yz$ , P Q B S paralelo al  $xz$ , P R C Q paralelo al  $xy$ , que cortarán respectivamente a los ejes  $x, y, z$  en los puntos A, B, y C, de modo que quedan individualizados tres números:  $x = \text{med } OA$ ;  $y = \text{med } OB$ ;  $z = \text{med } OC$ .

Viceversa, dados tres números  $x, y, z$ , quedan determinados los tres puntos A, B y C sobre los tres ejes  $x, y, z$ , y por consecuencia, el punto P como intersección de tres planos paralelos a los planos coordenados.-

Los tres números reales  $x, y, z$ , se llaman coordenadas del punto P, respectivamente, primera coordenada o  $x$ ; segunda coordenada o  $y$  y tercera coordenada o  $z$ , escribiéndose  $P \equiv (x/y/z)$ . Los tres planos paralelos a los coordenados que pasan por P, determinan con los planos coordenados un paralelepípedo, uno de cuyo vértices es P y el opuesto es O, de modo que, la poligonal formada por las aristas OA, AS, y SP nos dan directamente las coordenadas de P.- Los vértices del paralelepípedo tendrán las siguientes coordenadas:

$$O \equiv (0/0/0) ; \quad A \equiv (x/0/0) ; \quad B \equiv (0/y/0) ; \quad C \equiv (0/0/z)$$

$$P \equiv (x/y/z) ; \quad Q \equiv (0/y/z) ; \quad R \equiv (x/0/z) ; \quad S \equiv (x/y/0)$$

En general, cada punto de un plano coordenado tiene la otra coordenada nula. Así los puntos del plano  $xy$  tienen  $z = 0$ ; los del plano  $xz$  tienen  $y = 0$ ; los del plano  $yz$ , tienen  $x = 0$ .

Cualquier punto perteneciente a un eje coordenado, tiene las otras coordenadas nulas; en efecto, en punto B, perteneciente al eje  $y$ , tiene  $x = 0$  y  $z = 0$ .

De éste modo, se ha establecido una correspondencia biunívoca

ca entre los puntos del espacio y las ternas de números reales, de modo tal, que a cada punto le corresponde una única terna de números y a cada terna, un único punto en el espacio.-

#### b) Definición y objeto de la Geometría Analítica

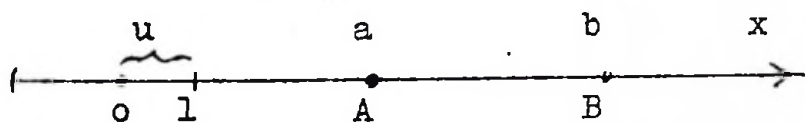
Dada una figura, en el plano o en el espacio, la Geometría Métrica y más generalmente, la Geometría Proyectiva estudia, con recursos exclusivamente geométricos, las relaciones y propiedades entre sus puntos, rectas, etc. Con la Geometría Analítica, mediante un sistema de coordenadas cartesianas, se traducen las propiedades geométricas en relaciones algebraicas entre las coordenadas de sus puntos; ahora, con los recursos del Algebra se opera sobre esas relaciones algebraicas o ecuaciones y los resultados obtenidos se interpretan geoméricamente.-

El Algebra ha servido para solucionar el problema geométrico planteado por la Geometría Proyectiva y la Geometría Analítica ha servido como puente de enlace de esas dos disciplinas.-

La Geometría Analítica no es una ciencia, sino un conjunto de métodos y no un conjunto de propiedades, que permite estudiar por vía Analítica o Algebraica las propiedades Geométricas que son objeto de la Geometría Proyectiva. Una misma cuestión geométrica puede ser tratada de dos maneras distintas: por vía sintética con recursos exclusivamente geométricos; éste es el objeto de la Geometría Proyectiva Sintética o Moderna; y por vía Analítica con recursos del Algebra; éste es el objeto de la Geometría Analítica.-

#### 4.3.- Distancia entre dos puntos

##### a) En la recta



Dados un sistema de abscisas sobre la recta  $x$  y dos puntos  $A$  y  $B$  sobre ella, de

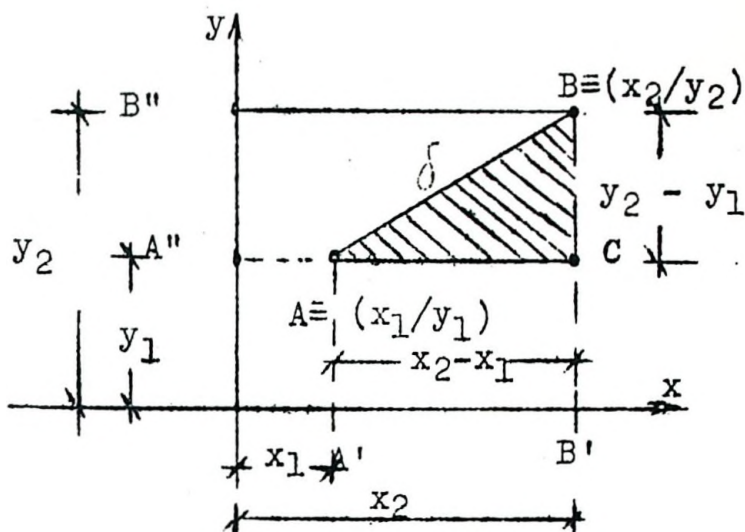
de abscisas  $a$  y  $b$ , se tiene que la distancia entre ellos:  $\overline{AB}$  viene dada por :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

es decir  $\boxed{\overline{AB} = b - a}$

La distancia entre dos puntos se expresa por la diferencia entre la abscisa del segundo y la abscisa del primero.-

b) En el plano



Dado un sistema cartesiano ortogonal (  $x$  y  $y$  ) y dos puntos en el plano:  $A \equiv (x_1/y_1)$  y  $B \equiv (x_2/y_2)$ , se trazan las distancias a los ejes coordenados, con lo cual queda formado el triángulo rectángulo  $ABC$ , en el cual se cumple, por el teorema de Pitágoras; que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

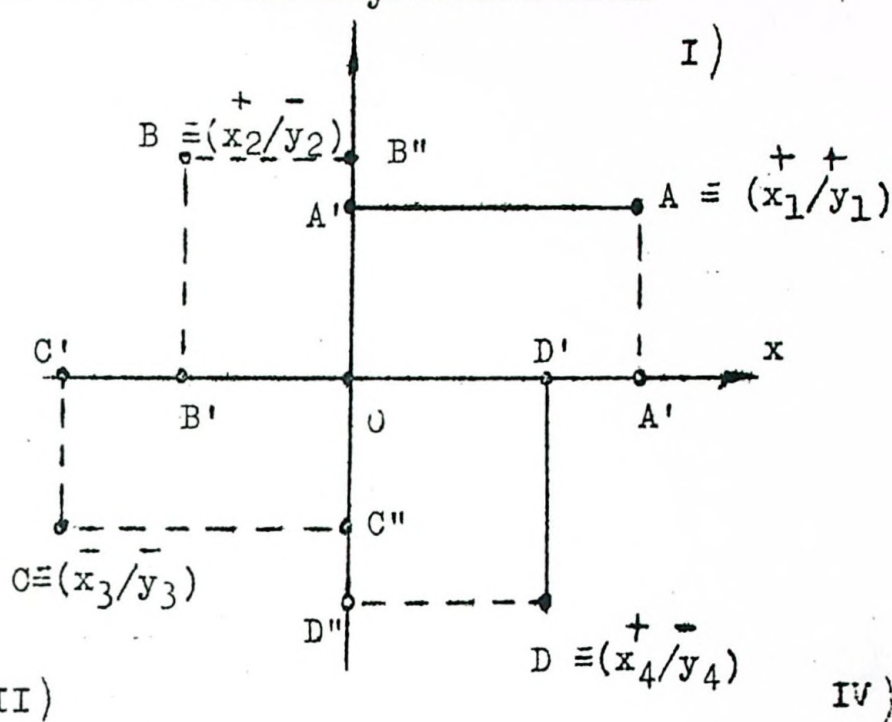
es decir: 
$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y designando la distancia  $\overline{AB}$  con  $\delta$  resulta: '

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

II)

I)



Los dos ejes del sistema cartesiano dividen el plano en cuatro cuadrantes cada uno de los cuales se caracteriza por los signos de las coordenadas de sus puntos. En efecto, sea  $A = (x_1 / y_1)$  un punto del primer cuadrante sus coordenadas se miden sobre los semi ejes positivos  $x$  e  $y$ , en consecuencia  $A = (+/+)$ . Un punto  $B = (x_2 / y_2)$  del segundo cuadrante, tiene abscisa negativa y ordenada positiva; un punto  $C = (x_3 / y_3)$  del tercer cuadrante tiene abscisa y ordenada negativas y finalmente, un punto  $D = (x_4 / y_4)$  del cuarto cuadrante tiene abscisa positiva y ordenada negativa.- Resumiendo, se tiene

| cuadrante | abscisa | ordenada |
|-----------|---------|----------|
| I )       | +       | +        |
| II )      | -       | +        |
| III )     | -       | -        |
| IV )      | +       | -        |

4.5.- Representación analítica de la recta

1) Cualquier punto del eje de abscisas tiene ordenada nula, de modo que

$$y = 0$$

será la ecuación del eje de abscisas

2) Cualquier punto del eje de ordenadas tiene abscisa nula, de modo que:

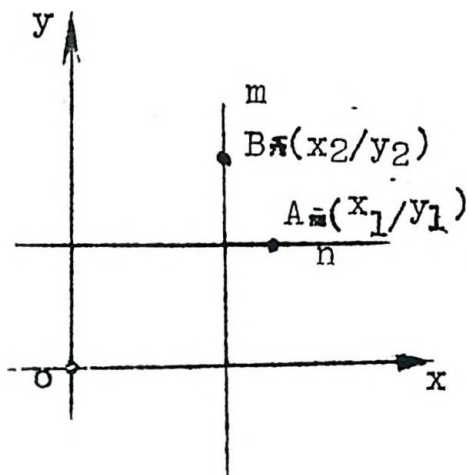
$$x = 0$$

será la ecuación del eje de ordenadas.

Sea  $n // x$

Cualquier punto de  $n$ , tal como el  $A = (x_1, y_1)$  se halla a una distancia constante del eje  $x$ , vale decir, que para todo punto de  $n$  la ordenada  $y_1$  es la misma para todos, en con-

3)



secuencia:

$$y = k$$

( constante )

es la ecuación de  $n // x$

4) sea  $m // y$

Cualquier punto de  $m$ , tal como el  $B = (x_2, y_2)$  tiene una distancia constante al eje  $y$ , es decir, que todos ellos tienen la misma abscisa

luego

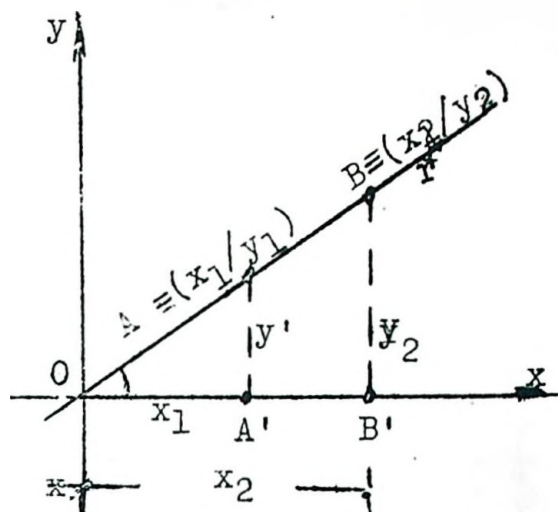
$$x = h$$

( constante )

es la ecuación de  $m // y$

5) Recta que pasa por el origen

75



Tengamos la recta  $r$  que pasa por  $O$ . y sean  $A \equiv (x_1 / y_1)$   $B \equiv (x_2 / y_2)$  dos puntos de ella. En la figura se han formado dos triángulos  $AOA'$  y  $BOB'$  que tienen un ángulo agudo  $\alpha$  común; luego por Geometría Métrica resulta que:  $AOA' \sim BOB'$  ( $\sim$  semejante)

$$\therefore \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = m \quad (\text{constante})$$

es decir:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = m$$

y en general

$$\frac{y}{x} = m \quad \therefore \boxed{y = mx}$$

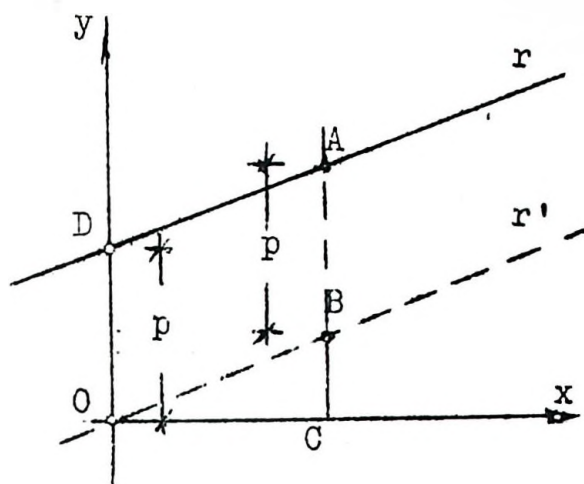
es la ecuación de la recta  $m$

Por Trigonometría

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\therefore \boxed{m = \operatorname{tg} \alpha}$$

a la constante  $m$  se denomina pendiente o coeficiente angular de la recta y da la inclinación de la misma respecto del eje  $x$  .-



Sea  $r$  una recta cualquiera del plano que corta al eje  $y$  en el punto D. Tracemos  $r' \parallel r$  y que pase por el origen, su ecuación será:

$$y = mx$$

La ordenada de un punto A de la recta  $r$  se obtiene sumándole a la ordenada de un punto B de  $r'$  un segmento constante  $p$ , de modo que

$$y = mx + p$$

será la ecuación de la recta  $r$ , que se acostumbra a designar con el nombre de ecuación explícita de la recta.

## 7) Ecuación general de la recta

Dada una ecuación de primer grado en  $x$  y en  $y$ , de la forma

$$ax + by + c = 0$$

donde  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son coeficientes o constantes, decimos que ella representa a una recta en un sistema cartesiano. En efecto, despejando a  $y$  se tiene:

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

y haciendo  $m = -\frac{a}{b}$   $p = -\frac{c}{b}$

se tiene

$$y = mx + p$$

Es

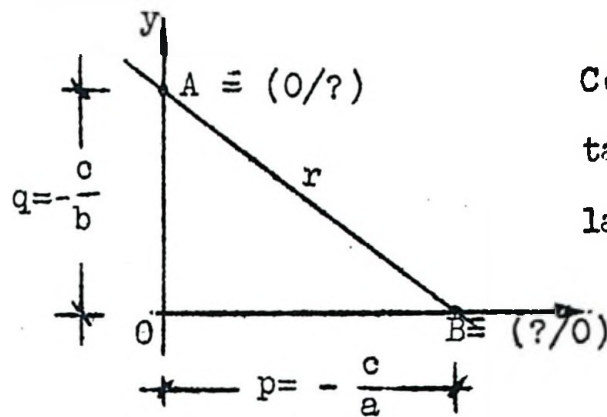
$$ax + by + c = 0$$

la ecuación general de la recta

Ejemplo:

$$3x + 5y + 7 = 0 \quad \text{representa a una recta.}$$

8) Ecuación segmentaria de la recta



Consideremos la recta r definida por

la ecuación general

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c$$

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

$$\text{o sea } \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 \quad (1)$$

Sean A y B los puntos de intersección de r con los ejes coordenados; busquemos sus coordenadas:

$$\text{Si } x = 0 \text{ en } (1) \text{ es: } y = -\frac{c}{b}$$

$$\therefore A \equiv (0 / -\frac{c}{b})$$

$$\text{Si } y = 0 \text{ en } (1) \text{ es: } x = -\frac{c}{a}$$

$$\therefore B \equiv (-\frac{c}{a} / 0)$$

Si designamos con

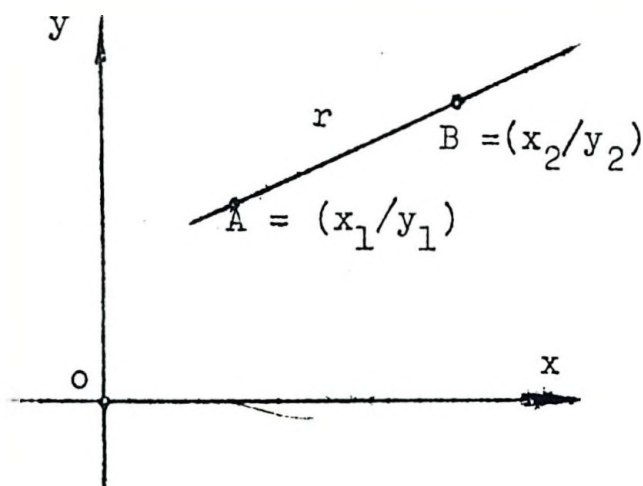
$$p = -\frac{c}{a}$$

$$q = -\frac{c}{b}$$

la (1) toma la siguiente forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

4.6.- Recta que pasa por dos puntos



Dados los puntos

$A \equiv (x_1 / y_1)$  y

$B \equiv (x_2 / y_2)$  la

recta que se bus-

ca tiene la forma:

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

Si el punto

$A \equiv (x_1/y_1)$  está en la

recta r, sus coor-

denadas la verifican:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad (2)$$

Análogamente, si  $B \equiv (x_2 / y_2)$  pertenece a r, es:

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \quad (3)$$

Restando (2) de (1) resulta:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

Restando (2) de (3) es:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

ha quedado formado así un sistema de dos ecuaciones entre las dos incógnitas a y b, resolviéndolo da:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a}{b} ; \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}$$

luego es :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

o bien

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

es la ecuación pedida.-

Comparada con la ecuación explícita de la recta

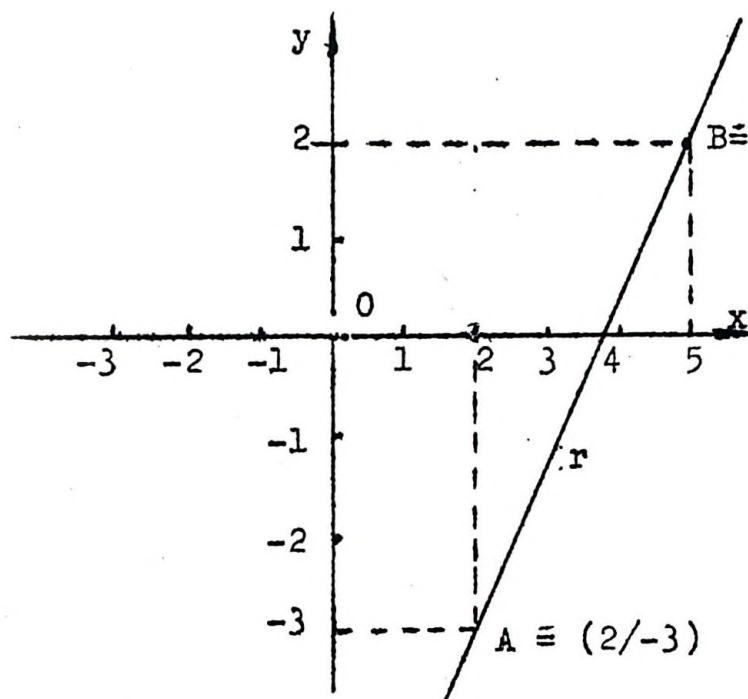
$$y = mx + p$$

se ve que  
la recta pedida.-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es el coeficiente angular de

Ejemplo :  $A \equiv (2 / -3)$  ;  $B \equiv (5 / 2)$



$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 & x_2 = 5 \\ y_1 = -3 & y_2 = 2 \end{array}$$

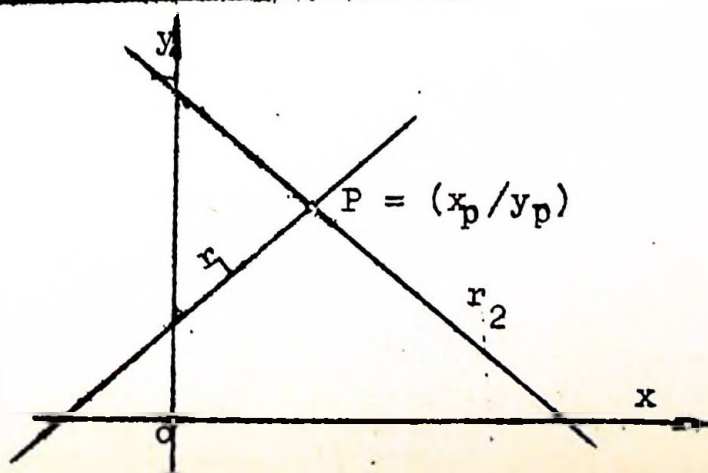
$$y + 3 = \frac{2+3}{5-2} (x-2)$$

$$y + 3 = \frac{5}{3} (x - 2)$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} - 3$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{19}{3}$$

4.7.- Punto de intersección de dos rectas



Dadas las rectas :

$$r_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$r_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

se trata de buscar las coordenadas  $(x_p/y_p)$  de su punto de intersección. Supongamos que ambas se corten en P; sus coordenadas incógnitas  $x_p$  e  $y_p$  deben verificar a las ecuaciones de ambas rectas, es decir:

$$\begin{cases} a_1x_p + b_1y_p + c_1 = 0 \\ a_2x_p + b_2y_p + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x_p + b_1y_p + c_1 = 0 \\ a_2x_p + b_2y_p + c_2 = 0 \end{cases}$$

habiéndose obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$x_p \text{ e } y_p : \begin{cases} a_1x_p + b_1y_p = -c_1 \\ a_2x_p + b_2y_p = -c_2 \end{cases}$$

resolviéndolo con cualquiera de los métodos que se detallarán en el capítulo próximo 5, se obtiene:

$$x_p = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y_p = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Si  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$  las dos rectas se cortan en un punto determinado  $P \equiv (x_p/y_p)$   
 Si  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$  no siendo nulos los numeradores de  $x_p$  e  $y_p$ , las dos rectas no se cortan, es decir, son paralelas, en cuyo caso será:  $a_1b_2 = a_2b_1$

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}$$

que expresa la condición de paralelismo de  $r_1$  y  $r_2$

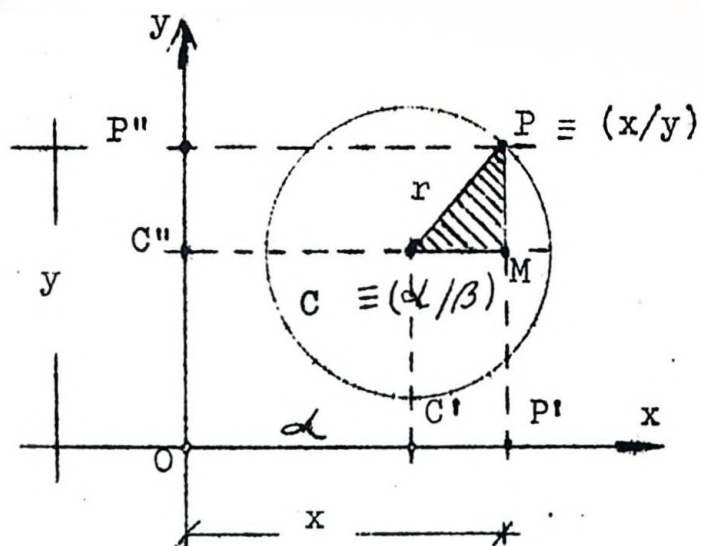
#### 4.8.- La Circunferencia

Dado un punto  $C \equiv (\alpha/\beta)$  llamado centro y un segmento  $r$ , llamado radio, se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al centro es igual al radio.-  
 Si  $P \equiv (x/y)$  es un punto genérico de la circunferencia es

$$PC^2 = CM^2 + PM^2$$

por el teorema

$$\text{de Pitágoras : } r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$



es decir que

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

es la ecuación general de la circunferencia  
Desarrollando esa expresión se tiene:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0$$

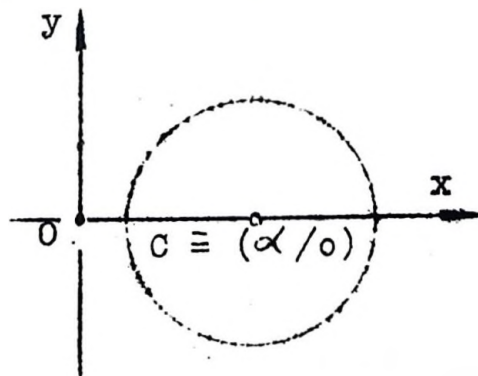
haciendo  $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = \gamma$

es

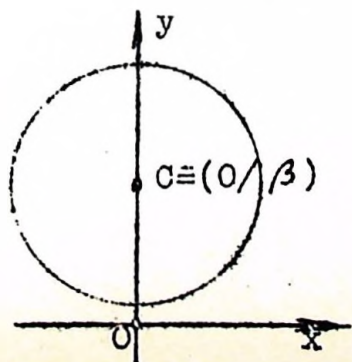
$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

otra forma de la ecuación general de la circunferencia.-

Casos particulares:



b) El centro C pertenece al eje y



El centro C pertenece al eje x.- En este caso

$C \equiv (\alpha/0)$  y la ecuación (1) se

reduce a  $(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$

y la (2) a :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \gamma = 0$$

En este caso

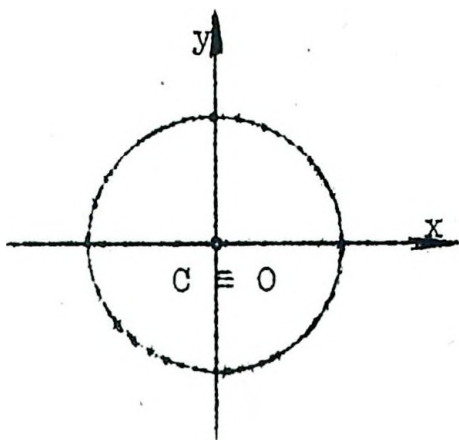
$C \equiv (0/\beta)$  ; la

(1) se reduce a:

$$x^2 - (y - \beta)^2 = r^2$$

y la ( 2 ) a :

$$x^2 + y^2 - 2\beta y + \gamma = 0$$



a) El centro C coincide con el origen 0

En este caso es  $C \equiv (0/0)$

es decir  $\alpha = 0$   $\beta = 0$

y en ( 1 ) y ( 2 ) se re-

duce a :  $x^2 + y^2 = r^2$

te de la circunferencia.-

que es la ecuación más frecuen-

d) Ejemplo:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 10 = 0$$

es la ecuación de una circunferencia cuyo centro tiene por coordenadas:

$$\alpha = -2$$

$$\beta = +3$$

Como:

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = \gamma$$

en este caso es :

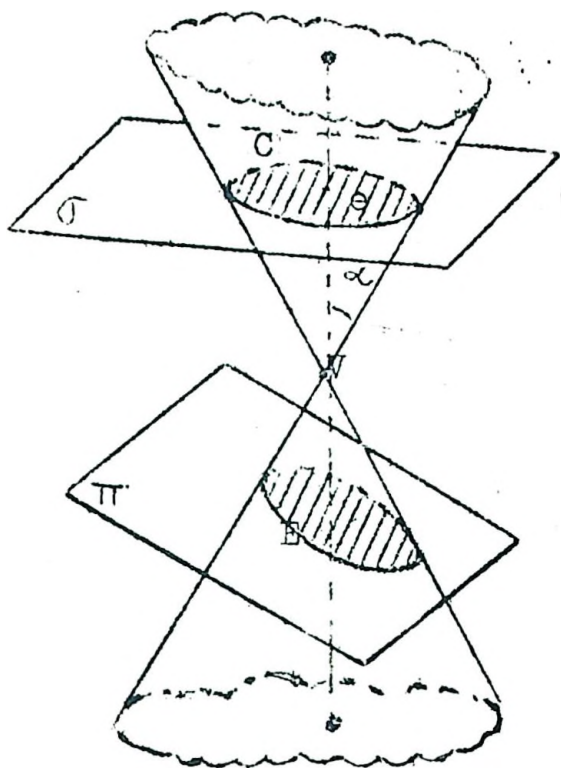
$$4 + 9 - r^2 = 10$$

$$r^2 = 4 + 9 - 10 = 3$$

$$r = \sqrt{3}$$

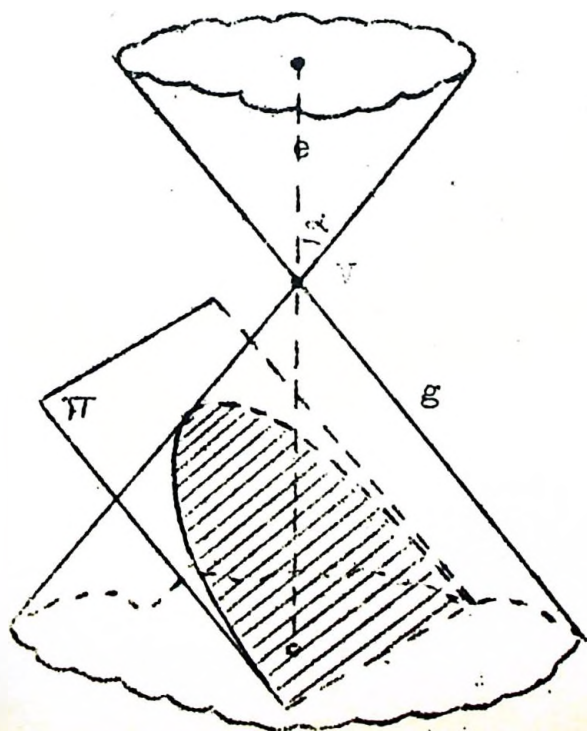
#### 4.9.- Las cónicas como curvas sección

Se llaman cónicas a las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano. Según sea la posición del plano sección con respecto a los elementos de la superficie, que enumeraremos, se obtienen las cónicas clásicas, llamadas elipse, parábola e hipérbola.-

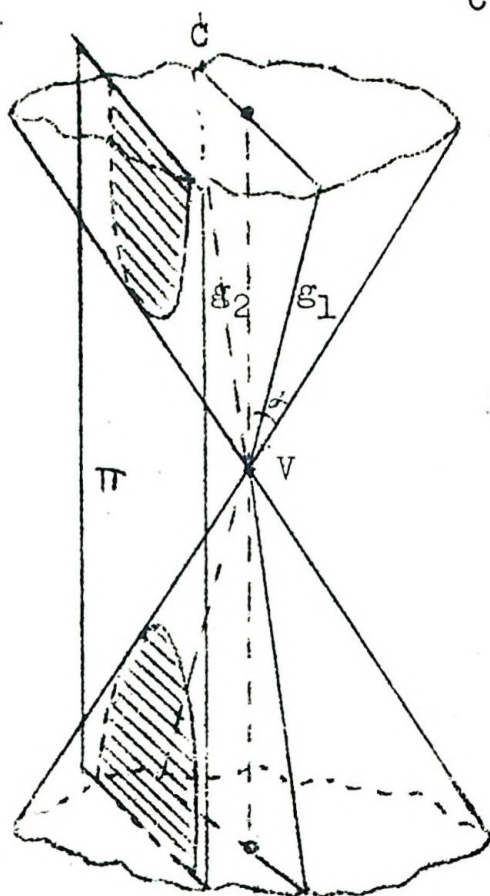
a) Elipse y circunferencia

Consideremos una superficie cónica indefinida de eje  $e$  y ángulo del vértice  $\alpha$ , y dos planos.

$\sigma \perp e$  y  $\pi \text{ no } \perp e$   
El primero la corta según una curva  $C$  que es una circunferencia y el segundo según una curva  $E$  que es una elipse. -

b) Parábola

Sí el plano  $\pi$  gira en su posición hasta colocarse paralelo a una generatriz, tal como por ejemplo la  $g$ , la curva sección es una parábola, que se va estrechando a medida que  $\pi$  se acerca a  $g$ , y en cambio se abre más a medida que  $\pi$  se aleja de dicha generatriz.

C ) Hipérbola

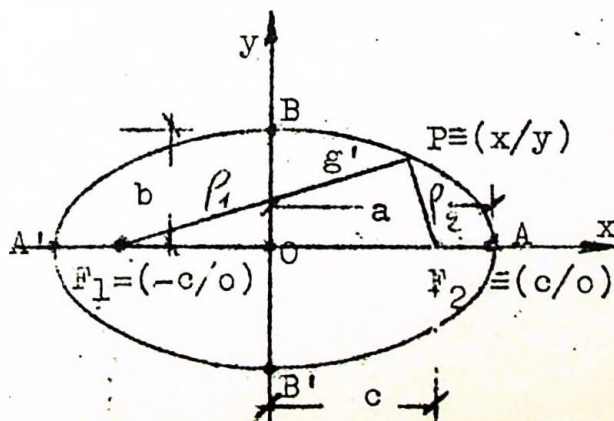
Cuando el plano es paralelo al plano formado por dos generatrices  $g_1$  y  $g_2$  la curva sección que se obtiene es una hipérbola que se hace más abierta o cerrada según que el plano sección se aleje o se acerque al plano  $g_1 g_2$ .-

D ) Cónicas degeneradas

En la elipse y en la circunferencia, a medida que los planos  $\sigma$  y  $\pi$  se acercan a  $V$ , vértice de la superficie cónica, ambas curvas se cierran y cuando ambos planos pasan por  $V$ , las curvas degeneran en un punto.-

En la parábola, si el plano  $\pi$  pasa por  $V$ , esta curva degenera en una recta que coincide con la generatriz  $g$ .-

En la hipérbola, si el plano  $\pi$  coincide con el plano  $g_1 g_2$ , la curva degenera en el sistema de dos rectas  $g_1 g_2$ .-

4.10.- Las cónicas como lugares geométricosa) Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales es constante la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos. Si  $P = (x / y)$  es un punto genérico de la elipse y  $P_1$  y  $P_2$  las respectivas distancias a los focos  $F_1$  y  $F_2$ , es por definición

$$P_1 + P_2 = 2a \quad (\text{constante}) \quad (1)$$

### Elementos

$F_1$  y  $F_2$  : focos

$A, A', B, B'$  : vértices de la elipse

$O$  : centro

$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$  : semidiámetro mayor  
 $\overline{OB} = \overline{OB'} = b$  : " menor

$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$  : semidistancia focal

$P_1$  y  $P_2$  : radios vectores

Adoptando el sistema cartesiano de referencia indicado en la figura y teniendo en cuenta la condición ~~canónica~~ (1), resulta:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

efectuadas las operaciones indicadas se llega a deducir que :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

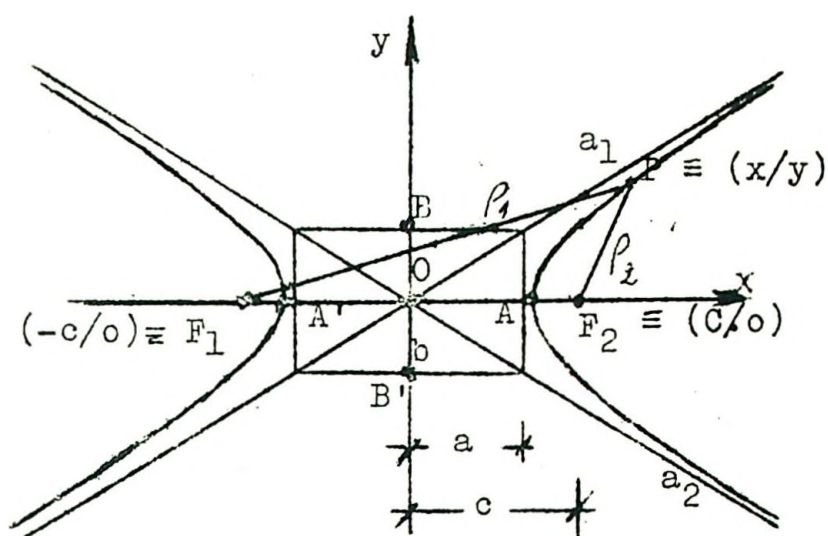
la ecuación canónica de la elipse.

La curva es simétrica respecto al centro; es una curva cerrada, toda ella comprendida en el rectángulo de lados  $2a$  y  $2b$ .

### b) Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales es constante la diferencia de la distancias a dos puntos fijos llamados focos. Si  $P = (x / y)$  es un punto genérico de la hipérbola y  $P_1$  y  $P_2$  las respectivas distancias a los focos  $F_1$  y  $F_2$ , es por definición:

$$P_1 - P_2 = 2a \quad (\text{constante}) \quad (1)$$



### Elementos:

$F_1$  y  $F_2$  : focos

$A$  ,  $A'$  ,  $B$  ,  $B'$  : vértices

$O$  : centro

$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$  : semidiámetro transversal

$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$  : " no transversal

$\overline{OF_1} = \overline{OF_2}$  : semidistancia focal

$\rho_1$  y  $\rho_2$  : radios vectores

Adoptando el sistema cartesiano de referencia indicado en la figura , y teniendo en cuenta la condición fundamental ( 1 ) , resulta:

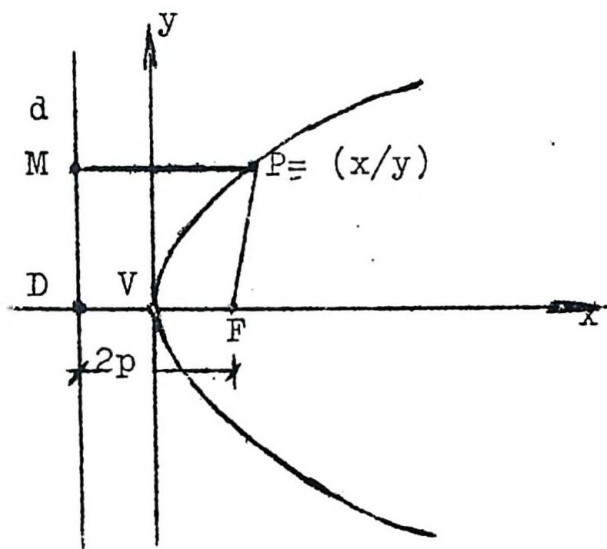
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

y efectuando las operaciones indicadas, se llega a la ecuación canónica siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La curva presenta dos ramas infinitas. No tiene puntos reales para  $x$  comprendido entre  $+a$  y  $-a$ , y toda ella se halla comprendida en los ángulos opuestos por el vértice  $O$ , cuyos lados son las tangentes en los puntos impropios o infinitos de la cónica; tales rectas se denominan asintotas de la hipérbola.-

### c) Parábola



Es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales son iguales las distancias a un punto fijo, llamado foco, y a una recta fija, llamada directriz. Si  $P \equiv (x/y)$  es un punto genérico de la curva y  $\overline{PF}$ ,  $\overline{PM}$  son las respectivas dis-

tancias al foco y a la directriz, es por definición:

$$\overline{PF} = \overline{PM} \quad (1)$$

#### Elementos:

F : foco

D F = 2 p : parámetro

d : directriz

V : vértice

V x : eje

V y : tangente en el vértice

Adoptando el sistema cartesiano de referencia indicado en la figura, y teniendo en cuenta la relación fundamental ( 1 ) es :

$$\overline{PF}^2 = \overline{PM}^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

La ecuación canónica de la parábola. La curva es simétrica respecto del eje y para  $x \rightarrow +\infty$  también  $y \rightarrow +\infty$ . Para  $x < 0$  no hay puntos reales de la curva.-

#### 4.11.- Bibliografía

H.B Phillips : Geometría Analítica- Ed.U.T.E.H.A. México.-

Ch.H. Lehman : Geometría Analítica- Ed.U.T.E.H.A. México-1953

Guido Castelnuovo : Lecciones de Geometría Analítica-  
trad. de M. Sadovsky- Ed. Calomino - La Plata - 1943.

y efectuando operaciones se deduce:

$$\boxed{\gamma^S = \Delta p x}$$

y efectuando operaciones se deduce:

## 5 - ECUACIONES

### 5.1 - BREVE EVOLUCION HISTORICA DEL ALGEBRA

Es muy difícil hallar los orígenes de esta rama de la Matemática por la carencia casi absoluta de los viejos libros en los cuales los antiguos pueblos civilizados han dejado las huellas de su saber. Aún cuando las distintas ramas de esta ciencia tienen una estrecha dependencia entre sí, sin embargo su aparición y su desarrollo no han sido simultáneos.

La Geometría y la Astronomía ya estaban en pleno desarrollo cuando todavía nada se sabía del Algebra.

Los primeros elementos de esta ciencia se los encuentra en los libros de EUCLIDES (365? - 275 a. de J.C.). No hay lugar a dudas que ARQUIMIDES (287? - 212 a. de J.C.) y APOLONIO (260? - 200? a. J.C.) manejaban habilmente el cálculo algebraico, pero como al genio griego repugnaba la simplificación simbólica necesaria para el álgebra, su cultivo no encontró suficientes adeptos para su desarrollo. DIOFANTO de Alejandría (325 - 409 d. de J.C.) fué el primero que publicó un tratado de Algebra en trece libros, en los que se hallaba la solución en números enteros de las ecuaciones indeterminadas de primer grado a dos variables, llamadas más tarde ecuaciones diofánticas. Hasta hace algunos años eran los griegos los creadores del Algebra, pero las últimas excavaciones efectuadas en Babilonia mostraron, desde 1929 que los sacerdotes babilónicos cultivaron el Algebra antes que los griegos, como lo prueban los documentos matemáticos hallados, consistentes en tablillas de arcilla, y guardaron celosamente sus conocimientos. Estos documentos cubren unos dos mil años, desde la primera dinastía babilónica 2186 - 1961 a. de J.C. hasta casi el principio de la Era Cristiana y la mayoría de ellos pertenecen al período, comprendido entre 2000 - 1200 a. de J.C. Los babilonios llegaron a dar soluciones empíricas de la ecuación cúbica de la forma  $x^3 - px^2 + q = 0$ , además los algebristas babilónicos resolvían ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas y ecuaciones simultáneas de segundo grado del tipo  $xy = 600$ ;  $(ax+by)^2 - cx+dy = e$  para 55 grupos de valores especiales de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , y  $e$ .

Son los hindúes los continuadores de los algebristas griegos sucesores de Diofanto. A diferencia de los griegos los hindúes no eran amantes de las demostraciones pero eran excelentes calculistas, y tienen un rasgo interesante; hallaban con facilidad las soluciones de la ecuación diofántica mucho mejor que las de las ecuaciones determinadas, contrariamente a lo que sucede hoy día.

En el siglo VI después de J.C. Brahmagupta (598 d. de J.C.) en la India publica un libro que contiene conocimientos de Aritmética, Algebra y Geometría. La ciencia india se remonta a épocas anteriores a este matemático, pues por el grado de los conocimientos que contiene su libro se ve que los hindúes conocían la ciencia de los griegos, aún cuando no llegaron a superar a Diofanto.

El libro de este matemático hindú es comentado mucho más tarde, en el siglo XII, por su compatriota BHASCARA (1114) que halla las soluciones de la ecuación de segundo grado y empíricamente las de  $x^2 + y^2 = z^2$  para números enteros.

Los árabes, tradujeron al árabe y al persa el álgebra hindú, que bajo esta forma penetra en Europa. Hacia el año 820, su matemático máximo MOHAMMED IBN MUSA AL-KHOWARIZMI de Bagdad y Damasco (795 - 850) compuso, por orden del califa AL MAMUN, el primer tratado de Algebra que apareció entre los árabes, llamado al-jabr w'almuquabala, que significa " restauración y reducción ". Por adaptaciones posteriores de los traductores del árabe, degeneró esta palabra en ALGEBRA, nombre con que se ha aplicado a esta disciplina en la actualidad. Por influencia de los Arabes, se introdujo en Europa esta rama, hallándose en la Edad Media a GERBERT ( 930 - 1003 ), más tarde Papa SILVESTRE II que estudió el Algebra Árabe, continuando esta orientación, LEONARDO DE PISA (1175 - 1250) más conocido por Fibonacci en Italia.

Hasta Fibonacci, el Algebra se limitaba a la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado; se debe al matemático italiano NICOLAS TARTAGLIA ( 1500- 1559 ) de Brescia, la solución de la ecuación cúbica, cuya demostración publicó más tarde CARDAN ( 1501 - 1576 ) y que con su discípulo FERRARI ( 1522- 1565 ) le cabe la gloria de hallar las soluciones de la ecuación de cuarto grado.

Se debe al algebrista francés FRANCISCO VIETE ( 1540 - 1603 ) la genial idea del simbolismo algebraico, que marca el comienzo del Algebra moderna, cuyos signos la distinguen de sus antecesores y la proveen de un potente recurso de demostración. Contribuyeron a perfeccionar el simbolismo de Viète los matemáticos MICHEL STIEFFEL ( 1486 - 1567 ); THOMAS HARRIOT ( 1568 - 1621 ) y JUAN NEPER ( 1550 - 1617 ) con sus logaritmos.

Dejando a un lado las obras de GALILEO, CAVALIERI, DESCARTES, PASCAL, FERMAT, WALLIS, LEIBNITZ y NEWTON que han contribuido poderosamente a desarrollar esta disciplina con sus geniales creaciones, terminaremos estas citas históricas mencionando a GAUSS ( 1777 - 1855 ) en Alemania y CAUCHY ( 1789 - 1857 ) en Francia como los dos más ilustres matemáticos de su siglo, que con sus obras, abrieron un camino a una brillante pléyade de matemáticos geniales como BEZOUT, CRAMER, LAPLACE, LAGRANGE, JACOBI, CAYLEY, SYLVESTRE, JOACHIMSTHAL, HERMITE, etc.

## 5.2 - Definiciones y Principios.

### a) Definiciones

1.- Igualdad : Es la expresión de dos cantidades que tienen el mismo valor

Ejemplo :  $8 = 5 + 3$

2.- Identidad : Es una igualdad independiente del valor asignado a sus letras.

Los árabes, tradujeron al árabe y al persa el álgebra hindú, que bajo esta forma penetra en Europa. Hacia el año 820, su matemático máximo MOHAMMED IBN MUSA AL-KHOWARIZMI de Bagdad y Damasco (795 - 850) compuso, por orden del califa AL MAMUN, el primer tratado de Algebra que apareció entre los árabes, llamado al-jabr w'almuqabala, que significa " restauración y reducción ". Por adaptaciones posteriores de los traductores del árabe, degeneró esta palabra en ALGEBRA, nombre con que se ha aplicado a esta disciplina en la actualidad. Por influencia de los Arabes, se introdujo en Europa esta rama, hallándose en la Edad Media a GERBERT ( 930 - 1003 ), más tarde Papa SILVESTRE II que estudió el Algebra Árabe, continuando esta orientación, LEONARDO DE PISA (1175 - 1250) más conocido por Fibonacci en Italia.

Hasta Fibonacci, el Algebra se limitaba a la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado; se debe al matemático italiano NICOLAS TARTAGLIA ( 1500- 1559 ) de Brescia, la solución de la ecuación cúbica, cuya demostración publicó más tarde CARDAN ( 1501 - 1576 ) y que con su discípulo FERRARI ( 1522- 1565 ) le cabe la gloria de hallar las soluciones de la ecuación de cuarto grado.

Se debe al algebrista francés FRANCISCO VIETE ( 1540 - 1603 ) la genial idea del simbolismo algebraico, que marca el comienzo del Algebra moderna, cuyos signos la distinguen de sus antecesores y la proveen de un potente recurso de demostración. Contribuyeron a perfeccionar el simbolismo de Viète los matemáticos MIGUEL STIEFFEL ( 1486 - 1567 ); THOMAS HARRIOT ( 1568 - 1621 ) y JUAN NEPER ( 1550 - 1617 ) con sus logaritmos.

Dejando a un lado las obras de GALILEO, CAVALIERI, DESCARTES, PASCAL, FERMAT, WALLIS, LEIBNITZ y NEWTON que han contribuido poderosamente a desarrollar esta disciplina con sus geniales creaciones, terminaremos estas citas históricas mencionando a BAUSS ( 1777 - 1855 ) en Alemania y CAUCHY ( 1789 - 1857 ) en Francia como los dos más ilustres matemáticos de su siglo, que con sus obras, abrieron un camino a una brillante pléyade de matemáticos geniales como BEZOUT, CRAMER, LAPLACE, LAGRANGE, JACOBI, CAYLEY, SYLVESTRE, JOACHIMSTHAL, HERMITE, etc.

## 5.2 - Definiciones y Principios.

### a) Definiciones

1.- Igualdad : Es la expresión de dos cantidades que tienen el mismo valor

Ejemplo :  $8 = 5 + 3$

2.- Identidad : Es una igualdad independiente del valor asignado a sus letras.

Ejemplo :  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- 3) Ecuación : Es una igualdad condicional que depende del valor que tome una o varias letras que contiene y solo se verifica para de terminados valores de las mismas.

Ejemplo :

$$3x + 12 = 5x - 8$$

$$y^2 + 5 = 6y - 3$$

donde x e y son las incógnitas. Esas igualdades solo son ciertas si x = 10 en la primera y x = 4 ; y = 2 en la segunda.

- 4) Grado de una ecuación : es el mayor grado de los monomios que la forman :

Ejemplo :

$$3x - 5y = 2 \quad \text{es de 1er. grado}$$

$$z^2 - bx = x^2 - 5 \quad \text{es de 2do. grado}$$

$$xy^2 - 3x^2 = x^2y \quad \text{es de 3er. grado}$$

- 5) Raíces o soluciones : son los valores que atribuidos a las incógnitas, hacen idénticos los dos miembros de la ecuación.

Ejemplo : En  $3x - 4 = 5x - 8$   
es  $x = 2$  una raíz, pues :

$$3.2 - 4 = 5.2 - 8$$

$$6 - 4 = 10 - 8$$

- 6) Resolver una ecuación es encontrar sus raíces.

- 7) Ecuaciones equivalentes : son las que admiten las mismas raíces. Pueden sustituirse entre sí, si una es más sencilla que las otras, con lo que se facilita su resolución.

### b) Principios

Admitimos sin demostración los siguientes principios :

- 1) Primer principio : Si se suma o resta un mismo número a ambos miembros de una ecuación se obtiene otra que es equivalente con la primera.

- 2) Segundo principio : Si se multiplica o divide ambos miembros de una ecuación, por un número, distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente con la primera.

c) Consecuencias

- 1) Primera consecuencia : Un término pasa de un miembro a otro de una ecuación con la operación contraria. Se deduce del primer principio.

Ejemplo : En la ecuación :

$$5x - 4 = x + 12$$

queremos pasar -4 del primero al segundo miembro; basta para ello sumar 4 a los mismos, en efecto :

$$5x - \cancel{4} + \cancel{4} = x + 12 + 4$$

$$\underline{5x = x + 12 + 4}$$

- 2) Segunda consecuencia : Se pueden hacer desaparecer los denominadores de una ecuación multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo.

En efecto, por el segundo principio, en la ecuación

$$\frac{3x}{2} - 7 = \frac{4x}{5}$$

se convierte en :

$$\frac{3x \cdot 2 \cdot 5}{2} - 7 \cdot 2 \cdot 5 = \frac{4x \cdot 2 \cdot 5}{5}$$

Efectuadas las simplificaciones posibles, nos queda :

$$15x - 70 = 8x$$

sin denominadores

5 . 3 .- Ecuaciones de primer grado con una incógnita

a ) Resolución

Una ecuación de primer grado con una incógnita, puede ser llevada finalmente a la forma  $ax + b = 0$

o bien  $ax = -b$

y es

$$x = -\frac{b}{a}$$

la raíz de esa ecuación siempre que  $a \neq 0$

Ejemplo I : Resolver la ecuación :

$$5x - 3 = 2x + 6 \quad (1)$$

pasamos los términos que contienen incógnitas, al primer término y las constantes al segundo, se obtiene así :

$$\begin{aligned} 5x - 2x &= 6 + 3 \\ 3x &= 9 \\ x &= \frac{9}{3} \end{aligned}$$

$$x = 3$$

Verificación : reemplazando  $x = 3$  en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} 15 - 3 &= 6 + 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

luego es  $x = 3$  la solución de esa ecuación

Ejemplo II :

$$x^2 - 4(2x - 3) - (x - 1)(x - 3) = 0$$

efectuando los productos indicados, resulta :

$$\cancel{x^2} - 8x + 12 - \cancel{x^2} + 4x - 3 = 0$$

$$- 8x + 4x = - 12 + 3$$

$$- 4x = - 9$$

$$x = -\frac{9}{4}$$

$$x = -\frac{9}{4}$$

Verificación :

$$\frac{81}{16} - 4 \left( \frac{9}{2} - 3 \right) - \left( \frac{9}{4} - 1 \right) \left( \frac{9}{4} - 3 \right) =$$

$$= \frac{81}{16} - 4 \cdot \left( \frac{9}{2} - \frac{6}{2} \right) - \left( \frac{9}{4} - \frac{4}{4} \right) \left( \frac{9}{4} - \frac{12}{4} \right) =$$

$$= \frac{81}{16} - 4 \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \cdot \left( -\frac{3}{4} \right) =$$

$$= \frac{81}{16} - 6 + \frac{15}{16} = \frac{81 - 96 + 15}{16} = \frac{0}{16} = 0$$

Ejemplo III :

$$\frac{3(x - 8)}{2} = \frac{x}{5} + 1$$

m.c.m. de los denominadores = 2 . 5

Se multiplica toda la ecuación por 2 . 5

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 3(x - 8)}{2} = \frac{2 \cdot \cancel{5} \cdot x}{\cancel{5}} + 2 \cdot 5$$

$$\begin{aligned} 15(x - 8) &= 2x + 10 \\ 15x - 120 &= 2x + 10 \\ 15x - 2x &= 10 + 120 \\ 13x &= 130 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{130}{13} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Verificación :

$$\frac{3(10 - 8)}{2} = \frac{10}{5} + 1$$

$$\frac{3 \cdot 2}{2} = 2 + 1$$

$$\underline{3 = 3}$$

#### b ) Regla Práctica

- 1) Se quitan los denominadores y los paréntesis si los hay.
- 2) Se llevan a un miembro todos los términos que contienen la incógnita y al otro miembro las constantes.
- 3) Se reducen los términos semejantes.
- 4) Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por su coeficiente.

## 5.4 -SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

### ECUACIONES SIMULTANEAS

#### a) Definiciones y principios

- 1) Ecuaciones simultáneas : son las que tienen una o varias soluciones comunes.
- 2) Sistema de ecuaciones : es la reunión de cierto número de ecuaciones simultáneas.
- 3) Soluciones de un sistema de ecuaciones : son los diferentes valores de las incógnitas que satisfacen a todas las ecuaciones del sistema.
- 4) Sistemas de ecuaciones equivalentes : se caracterizan porque cualquier solución de uno es solución también del otro y recíprocamente.
- 5) Primer principio : En un sistema de ecuaciones simultáneas, se puede reemplazar cualquiera de ellas por la ecuación que resulte de sumar miembro a miembro esta ecuación con una o varias de las otras ecuaciones.
- 6) Segundo principio : En un sistema de ecuaciones simultáneas, sacando en una de las ecuaciones el valor de cualquier incógnita en función de las restantes y sustituyendo esta incógnita así hallada en las otras ecuaciones, se forma un nuevo sistema equivalente al primero.

#### b) Resolución de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

##### I) Método de sustitución

Consiste en sacar el valor de una incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones dadas y sustituirla luego en la otra ecuación, con lo que se consigue una ecuación con una sola incógnita.

Sea el sistema siguiente :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9 & (1) \\ 2y - 3x = 12 & (2) \end{cases}$$

despejada en (1) la incógnita  $x$ , obtenemos :

$$x = \frac{9 - 5y}{3} \quad (3)$$

que sustituida en (2) da :

$$2y - 3 \frac{9 - 5y}{3} = 12$$

$$2y - 9 + 5y = 12$$

$$7y = 12 + 9$$

$$7y = 21$$

$$\boxed{y = 3}$$

sustituyendo este valor en (3), resulta :

$$x = \frac{9 - 5 \cdot 3}{3} = \frac{9 - 15}{3}$$

$$\boxed{x = -2}$$

## II) METODO DE IGUALACION

Consiste en despejar una misma incógnita en ambas ecuaciones, e igualar luego los segundos miembros, con lo que se consigue una ecuación con una sola incógnita.

Sea el sistema siguiente :

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{4}{3} & (1) \\ \frac{x}{y} - \frac{1}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando la (1) por el m.c.m. (2 y 3) = 6 y la segunda, por el m.c.m. (y;2) = 2y, se obtiene por el 1º y 2º principios:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & (3) \\ 2x - y = 0 & (4) \end{cases}$$

despejamos en ambas la incógnita x es :

$$\begin{cases} x = \frac{8 - 3y}{2} & (5) \\ x = \frac{y}{2} & (6) \end{cases}$$

de donde

$$\frac{8 - 3y}{2} = \frac{y}{2}$$

$$8 - 3y = y$$

o sea

$$- 3y - y = - 8$$

$$- 4y = - 8$$

$$y = 2$$

reemplazando este valor en (6) resulta :

$$x = 1$$

### III). METODO DE REDUCCION

Consiste en obtener el mismo coeficiente en la misma incógnita en las dos ecuaciones, para poder eliminar esa incógnita ya sea sumando ambas ecuaciones si esos términos tienen distintos signos, o restándolas si tienen igual signo ( primer principio ).

Sea el sistema :

$$\begin{cases} 10x + 4y = 3 & | & 1 & | & - 5 & (1) \\ - 5x + 20y = 4 & | & 2 & | & 1 & (2) \end{cases}$$

Para eliminar la incógnita x se multiplica la primera ecuación por 1 y la segunda por 2, se obtiene así :

$$+ \begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ - 10x + 40y = 8 \end{cases}$$

Sumando

$$44y = 11$$

$$y = \frac{1}{4}$$

Para eliminar la incógnita y se multiplica la primera ecuación por ( -5 ) y la segunda por 1, da :

$$+ \begin{cases} - 50x - 20y = - 15 \\ - 5x + 20y = 4 \end{cases}$$

$$- 55x = - 11$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

#### IV) METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS O METODO DE BEZOUT

Este método es ventajoso cuando se trata de resolver un sistema que contenga más de dos incógnitas. Resolver el sistema siguiente :

$$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -2x + 3y = 11 \end{cases} \quad m \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

se multiplica a una de las ecuaciones por un coeficiente indeterminado m y se suman ambas ecuaciones :

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 5mx - my = 5m \\ -2x + 3y = 11 \end{cases} \\ \hline (5m-2)x + (-m+3)y = 5m + 11 \end{array} \quad (3)$$

Para calcular a x basta hacer :

$$-m + 3 = 0 \quad \therefore \quad m = 3$$

$$\text{si es } m = 3 \quad \therefore \quad (5 \cdot 3 - 2)x = 5 \cdot 3 + 11$$

$$13x = 26$$

$$\boxed{x = 2}$$

para calcular a y basta hacer :

$$5m - 2 = 0 \quad \therefore \quad m = \frac{2}{5}$$

$$\text{si es } m = \frac{2}{5} \quad \therefore \quad \left(-\frac{2}{5} + 3\right)y = \cancel{5} \cdot \frac{2}{\cancel{5}} + 11$$

$$\frac{13}{5}y = 13$$

$$\boxed{y = 5}$$

#### V) METODO DE LOS DETERMINANTES

##### a) Determinantes de segundo grado

Resolviendo el sistema :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

por cualquiera de los métodos explicados se obtiene :

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} ; \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd} \quad (1)$$

donde se observa que los denominadores son iguales, y en los numeradores de cada incógnita se hallan los coeficientes de la otra y los términos independientes. Es más fácil recordar estas expresiones dándole una disposición más apropiada, que se conoce con el nombre de determinante. Llamamos determinante de segundo orden a la expresión:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

Un determinante de segundo orden consta de cuatro elemen-tos dispuestos en 2 filas o en 2 columnas de dos elementos en cada una.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 4(-3) - 3(-2) = -12 + 6 = -6$$

Utilizando el cálculo de determinantes, las soluciones (1) de la ecuación dada se podrán escribir así :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & o \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Al denominador se lo suele llamar determinante general y se lo indica con la letra griega  $\Delta$  (delta mayúscula).

Regla :

- 1) Se calcula el valor del determinante general
- 2) Una incógnita cualquiera es igual al cociente de dos determinan-tes de segundo orden, siendo el denominador el determinante general  $\Delta$ . El determinante del numerador se forma sustituyendo en el determinante general, la columna de los coeficientes de esa incógnita por los términos independientes del segundo miembro de cada ecuación del sistema.

b) Resolver el sistema :

$$\begin{cases} 12x - 5y = 47 \\ 7x + 4y = 62 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 4 - 7(-5) = 48 + 35 = 83$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 47 & -5 \\ 62 & 4 \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{188 - 62(-5)}{83} = \frac{188 + 310}{83} = \frac{498}{83}$$

$$x = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 47 \\ 7 & 62 \end{vmatrix}}{\triangle} = \frac{12 \cdot 62 - 7 \cdot 47}{83} = \frac{744 - 329}{83} = \frac{415}{83}$$

$$y = 5$$

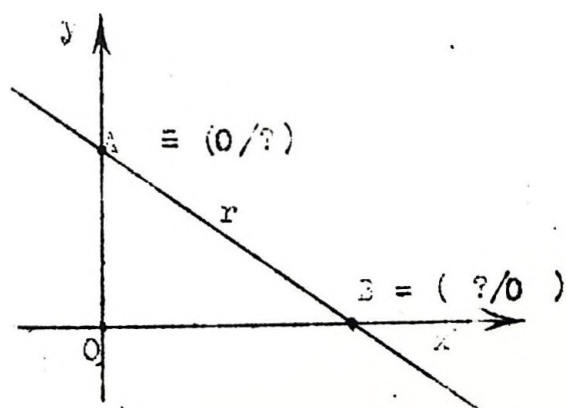
## VI) METODO GRAFICO

Resolver gráficamente el siguiente sistema :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9 & (1) \\ 2y - 3x = 12 & (2) \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones dadas representan una recta, para lo cual bastará hallar las coordenadas de los puntos que cada una de ellas corta a los ejes.

Dada una recta cualquiera :



$$r \equiv ax + by + c = 0$$

cutará a los ejes en los puntos  $A \equiv (0/?)$  perteneciente al eje de ordenadas y  $B \equiv (?/0)$  perteneciente al eje de abscisas.

Las coordenadas desconocidas se hallarán haciendo cero la abscisa o la ordenada respectivamente según que el punto pertenezca al eje de ordenadas o al eje de abscisas.

Para nuestro caso, tomemos la primera recta :

$$3x + 5y = 9$$

si  $x = 0 \therefore$

$$5y = 9$$

$$y = \frac{9}{5}$$

es

$$A \equiv (0/\frac{9}{5})$$

el punto de intersección con el eje de ordenadas.

$$\text{Si } y = 0 \quad \therefore \quad 3x = 9 \quad x = 3$$

es

$$B \equiv (3/0)$$

el punto de intersección con el eje de abscisas.

$$\text{La segunda recta : } 2y - 3x = 12$$

$$\text{Si } x = 0 \quad \therefore \quad 2y = 12 \quad y = 6$$

es

$$A' \equiv (0/6)$$

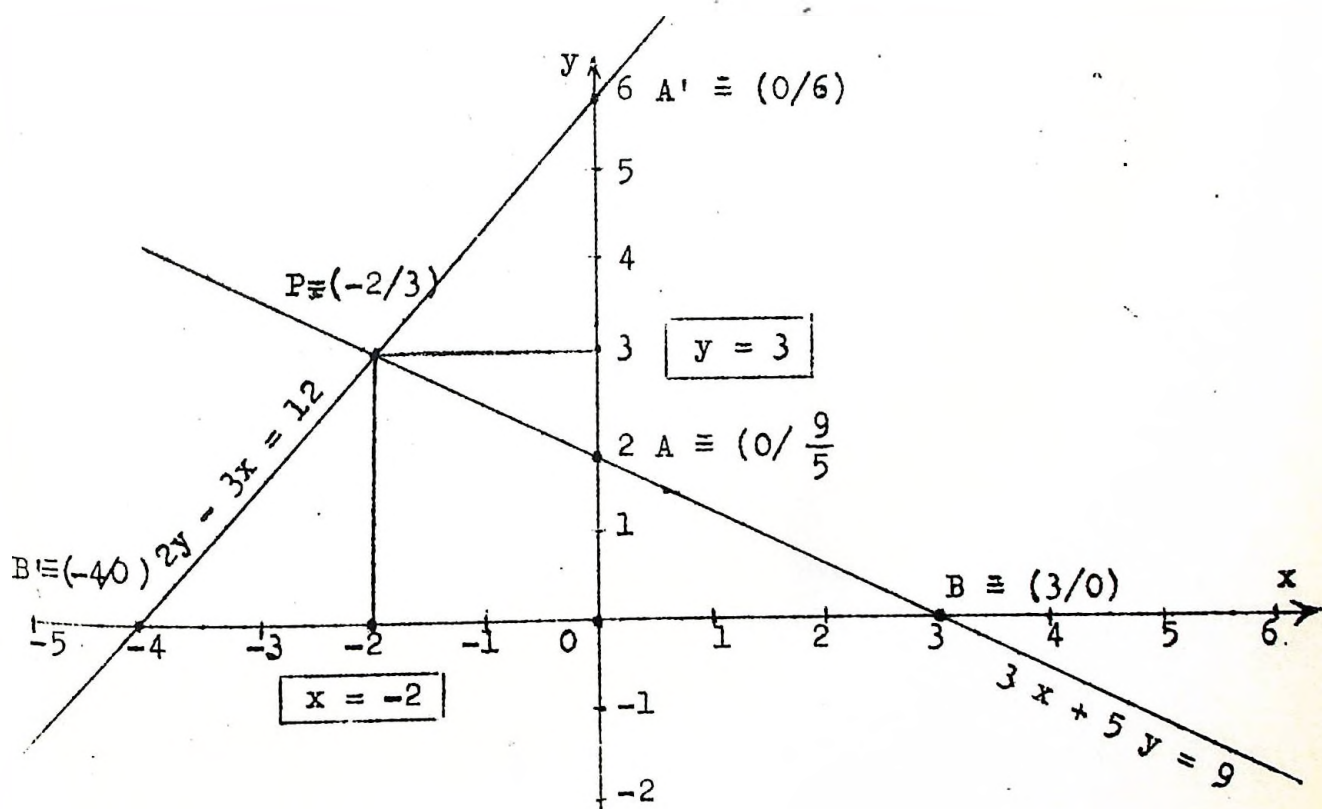
el punto de intersección con el eje de ordenadas.

$$\text{Si } y = 0 \quad \therefore \quad -3x = 12 \quad x = -4$$

es

$$B' \equiv (-4/0)$$

el punto de intersección con el eje de abscisas.



Ambas rectas se cortan en el punto  $P = (-2 / 3)$  cuyas coordenadas son las soluciones del sistema dado, vale decir :

$$x = -2$$

$$y = 3$$

c) Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas . Método de Cramer

Regla de Sarrus

I) Determinante de tercer orden

Es una expresión constituida por números dispuestos en tres filas o tres columnas

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

que tiene el siguiente valor :

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

difícil de recordar, motivo por lo cual SARRUS, dió la siguiente regla que facilita su cálculo :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- 1) Se repiten las dos primeras columnas a las dos primeras filas
- 2) Las diagonales que bajan son positivas
- 3) Las diagonales que suben son negativas

Así, en el determinante anterior, es :

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Ejemplo :

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 7 & -2 & -1 \\ 9 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 7 & -2 & -1 \\ 9 & 8 & 3 \end{vmatrix} = + \left\{ \begin{aligned} & 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \cdot 9 + (-6) \cdot 7 \cdot 8 \\ & - \left[ 9 \cdot (-2) \cdot (-6) + 8 \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 7 \cdot 4 \right] \end{aligned} \right\} =$$

$$= -30 - 36 - 336 - 108 + 40 - 84 = \underline{-554}$$

$$\boxed{\Delta = -554}$$

Al mismo resultado se llega repitiendo las dos primeras filas.

II) Resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} 3x + y + z = 14 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 15 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2 \quad \therefore \boxed{x = 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 14 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3 \quad \therefore \boxed{y = 3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 14 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-65}{-13} = 5 \quad \therefore \boxed{z = 5}$$

Regla de Cramer :

- 1) Los denominadores de las expresiones que dan  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son idénticos y se hallan formados por el determinante de los coeficientes de esas incógnitas. Se lo llama determinante general del sistema y se lo indica con  $\triangle$  .-
- 2) Cada determinante de los numeradores de las expresiones de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , se obtienen sustituyendo en el determinante general, la columna de los respectivos coeficientes de  $x$ , o de  $y$ , o de  $z$ , sucesivamente por los términos independientes.

5.5.- ECUACION DE SEGUNDO GRADOa) Forma de la ecuación de segundo grado con una variable.-

Una ecuación completa de segundo grado de una variable se reduce siempre a la forma,

$$a x^2 + b x + c = 0$$

donde a, b y c son coeficientes numéricos.-

Ejemplo:  $5 x^2 - 8 x + 12 = 0$

es una ecuación completa de segundo grado

Si falta el término lineal o el término independiente, la ecuación se llama incompleta y ella siempre se podrá reducir a la forma:

$$a x^2 + b x = 0$$

o bien  $a x^2 + c = 0$

Ejemplo:  $2 x^2 + 5 x = 0$

$$6 x^2 - 12 = 0$$

Son ecuaciones de segundo grado incompletas.-

b) ResoluciónI) Ecuación incompleta

1er. Caso:  $a x^2 + b x = 0$

sacando x como factor común, resulta:

$$x ( a x + b ) = 0$$

para que el producto de dos factores sea nulo, se requiere que por lo menos uno de ellos lo sea, en consecuencia, deberá tenerse:

$$\boxed{x = 0}$$

o bien

$$a x + b = 0$$

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

son las dos raíces de la ecuación dada, siendo una de ellas nula.-

Ejemplo:  $x^2 - 12x = 0$

$$x(x - 12) = 0$$

∴  $\boxed{x = 0}$  y  $x - 12 = 0$

∴  $\boxed{x = 12}$

2do. Caso:

$$a x^2 + c = 0$$

$$a x^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

de donde salen las dos raíces:

$$\boxed{x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

$$\boxed{x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

Ejemplo:  $2x^2 - 12 = 0$

dividiendo por 2 ambos miembros, es:

$$x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm \sqrt{6}$$

$$x_1 = \sqrt{6}$$

$$x_2 = -\sqrt{6}$$

## II) Ecuación completa

La ecuación completa de segundo grado siempre se puede reducir a la forma:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

llamada ecuación completa general.-

Si dividimos por a se obtiene:

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

y designando con

$$p = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{a}$$

es

$$x^2 + p x + q = 0$$

la ecuación completa reducida.-

1er. Caso: Método de Baskara

$$a x^2 + b x + c = 0$$

multiplicamos ambos miembros por 4a:

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x + 4 a c = 0$$

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x = -4 a c \quad (1)$$

El primer miembro es el desarrollo incompleto de un binomio de la forma:

$$(m+n)^2 = m^2 + 2 m n + n^2$$

cuyo primer término es:

"A"

$$m^2 = 4 a^2 x^2 \quad \therefore \quad m = 2 a x$$

y el duplo del primero por el segundo es:

$$2 m n = 4 a b x$$

reemplazamos a m por 2 a x y se tiene

$$\cancel{2} \cdot \cancel{2} a x \cdot n = \cancel{4} a b x$$

$$\therefore \quad \underline{n = b}$$

luego el segundo término es b y su cuadrado b<sup>2</sup> que agregamos a ambos miembros de ( 1 ) :

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x + b^2 = b^2 - 4 a c$$

o sea  $(2 a x + b)^2 = b^2 - 4 a c$

y despejando el valor de x obtendremos:

$$2 a x + b = \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}$$

$$2 a x = - b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}$$

$$x = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

( 2 )

Donde se ve que las raíces de la ecuación completa general de segundo grado son iguales: al coeficiente de x tomado con signo contrario, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de ese coeficiente menos el cuádruplo del coeficiente de x<sup>2</sup> por el término independiente, todo ello dividido por el duplo del coeficiente de x<sup>2</sup>.

De la expresión ( 2 ) sacamos las dos raíces

$$x_1 = \frac{- b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

$$x_2 = \frac{- b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

Ejemplo:

$$6x^2 - 11x - 7 = 0$$

aplicando la (2) es:

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-7)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 168}}{12}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{289}}{12} = \frac{11 \pm 17}{12}$$

$$\therefore x_1 = \frac{11 + 17}{12} = \frac{28}{12} \quad \therefore \boxed{x_1 = \frac{7}{3}}$$

$$x_2 = \frac{11 - 17}{12} = -\frac{6}{12} \quad \therefore \boxed{x_2 = -\frac{1}{2}}$$

2do. Caso:

$$x^2 + px + q = 0$$

pasando q al otro miembro, resulta:

$$x^2 + px = -q$$

tenemos aquí también el desarrollo incompleto del cuadrado del binomio:

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

en la que

$$m^2 = x^2 \quad \therefore m = x$$

$$y \quad 2mn = px$$

o sea

$$2 \cdot x \cdot n = px$$

$$n = \frac{p}{2} \quad \therefore n^2 = \frac{p^2}{4}$$

agregando a ambos miembros  $\frac{p^2}{4}$  resulta :

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

o sea

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

y despejando x nos dá:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (3)$$

Las raíces de una ecuación completa reducida son iguales: a la mitad del coeficiente de x tomado con signo contrario, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de esa mitad del cuál se resta el término independiente.-

Ejemplo:

$$x^2 - 12x + 34 = 0 \quad (4)$$

$$x = 6 \pm \sqrt{6^2 - 34}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 34}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = 6 + \sqrt{2} = 7,414--$$

$$x_2 = 6 - \sqrt{2} = 4,586--$$

Observación I) Las soluciones de la ecuación reducida se pueden obtener con la fórmula (2) de la ecuación general, en la que  $a = 1$ . En efecto, para resolver la (4) con dicha fórmula tendremos en cuenta que:

$$a = 1$$

$$b = -12$$

$$c = 34$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4.1.34}}{2.1}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 136}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{2}$$

valor encontrado anteriormente.-

Observación II).

Sí en la fórmula ( 2 ) de la ecuación completa general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dividimos el numerador y denominador del segundo miembro por a, se obtiene:

$$x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}}}{2}$$

y como

$$\frac{b}{a} = p \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} = q$$

es

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

o bien

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

que es la forma de resolución de la ecuación completa reducida hallada antes.-

### 5.6.- Bibliografía

G.M.Bruño: " Elementos de Algebra " Edit. Ch. Bouret - México.

E. Morales: " Lecciones de Algebra Elemental " Ed. Ivaldi y Checchi.-  
Bs. Aires.

F. Alzaa: " Nociones de Algebra Elemental " Ed. La Unión - Bs. As.  
1911.

## 6.- ELEMENTOS DE CALCULO INFINITESIMAL

### 6.1 .- Exclusión de la división por cero.

El cociente exacto de dos números  $a$  y  $b$  es un tercero  $c$  tal que  $a = bc$ . Esta definición era válida siempre que  $b \neq 0$ , pues siempre existe un tercero número  $c$  que cumple aquella condición. Pero si  $b = 0$  se tiene el cociente por 0. No hay ningún número que multiplicado por cero nos de  $a$ , por dicha causa las expresiones

$$\frac{a}{0} \quad y \quad \frac{0}{0}$$

Carecen de sentido.- La división por cero no existe y debe tenerse especial cuidado de no dividir inadvertidamente por cero por cuanto llegaremos, aparentemente en forma lógica, a obtener conclusiones absurdas. En efecto, sirva ésto de ejemplo :

$$\text{Si} \quad x = y \quad (1)$$

$$\text{será} \quad xy = x^2$$

$$\text{de donde} \quad xy - y^2 = x^2 - y^2$$

$$\text{o bien} \quad y(x-y) = (x+y)(x-y) \quad (2)$$

$$\text{de donde} \quad y = x + y \quad \text{después de simplificar.}$$

Pero teniendo en cuenta (1) es :

$$y = 2y$$

es decir, después de simplificar, que

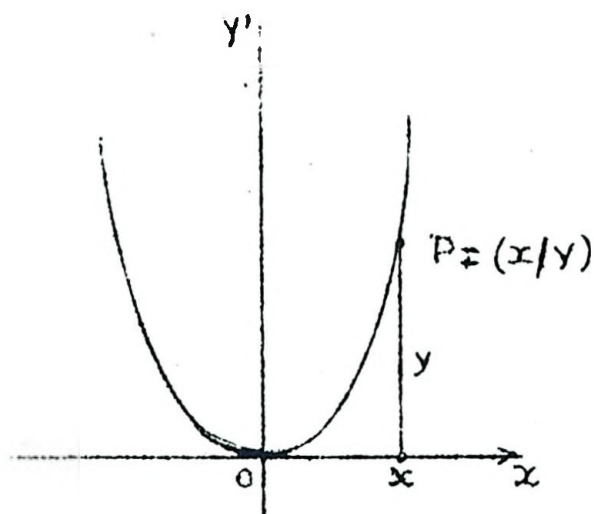
|         |
|---------|
| $1 = 2$ |
|---------|

lo que es un absurdo, y a él se ha llegado por que en (2) se dividió por cero, ya que

$$x - y = 0 \quad \text{por ser } x = y$$

## 5.2.- Continuidad.

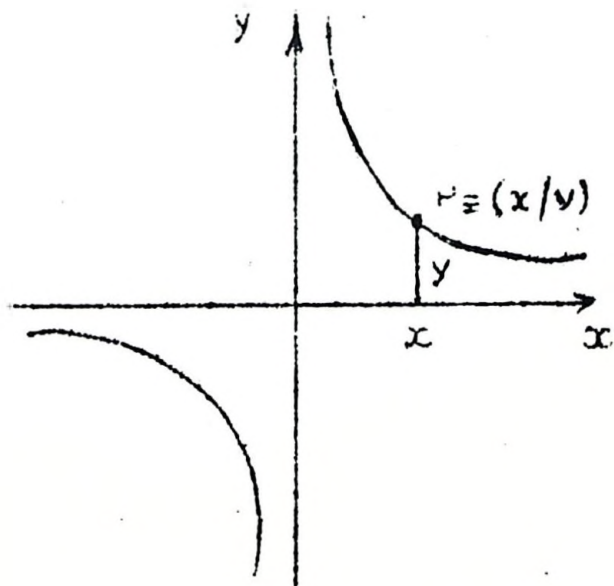
Consideremos la función :  $y = x^2$ ; esta relación da para cada valor de  $x$  un solo valor para  $y$  con lo que la función dada queda únvocamente definida. El lugar geométrico es una parábola que pasa por el origen y es simétrica respecto al eje de ordenadas.



Si  $x$  varía con continuidad desde  $x = a$  a  $x = b$  entonces  $y$  variará continuamente también desde  $a^2$  a  $b^2$  y punto  $P = (x / y)$  se moverá continuamente a lo largo de la curva, desde  $P_1 = (a / a^2)$  a  $P_2 = (b / b^2)$ .

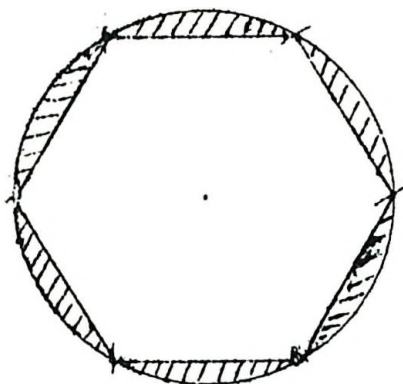
Se dice entonces que la función  $y = x^2$  es continua para todo valor de  $x$ .

Consideremos ahora la función  $y = \frac{1}{x}$ . Para todo valor de  $x$ , excepto para  $x = 0$ , se obtiene un solo valor de  $y$ , en cambio para  $x = 0$  no está definida. La gráfica es una hipérbola equilátera.



Si  $x$  aumenta continuamente en cualquier intervalo  $(a, b)$  que no incluya al cero, entonces  $y$  decrecerá continuamente desde  $\frac{1}{a}$  hasta  $\frac{1}{b}$  y el punto  $P = (x / y)$  describirá la curva desde  $P_1 = (a / \frac{1}{a})$  a  $P_2 = (b / \frac{1}{b})$ . Decimos entonces que la función es continúa para todo valor de  $x$  exceptuando  $x = 0$  para el cual no existe la gráfica correspondiente.

### 5.3.- Límite de una variable



Calculemos el área del círculo inscribiendo para ello un exágono. El área del polígono tomada como área del círculo, será un área por defecto pues lo será del círculo cuando se agregue la parte rayada que es el error cometido.

Sea  $A_6$  el área del exágono y  $A_c$  el área del círculo.

Inscribimos ahora un polígono de 24 lados; su área  $A_{24}$ , tomada como área del círculo, adolecerá de menos error y se acerca más a su valor: Inscribimos ahora el de 48 lados; su área  $A_{48}$  tiene menos error

que  $A_{24}$  y se acerca más a  $A_c$ , etc. Se ha obtenido así la sucesión:

$$A_6 ; A_{24} ; A_{48} ; A_{96} ; \text{-----} ; A_{6n} ; \text{-----} \rightarrow A_c$$

que se ve como cada término se acerca cada vez más a  $A_c$  y la diferencia  $A_c - A_{6n}$  va disminuyendo a medida que se toma un polígono de mayor número de lados, difiriendo de ese número  $A_c$  en un número lo más pequeño posible.

Se dice, en este caso, que  $A_{6n}$  tiende al límite  $A_c$ .

Definición : Se dice que una variable  $x$  'tiende a la constante  $\ell$  como límite, cuando los valores sucesivos de  $x$  son tales que hacen a la diferencia  $x - \ell$  menor que un número  $\epsilon$  fijado con tal de tomar a  $x$  lo suficientemente próximo a  $\ell$ . Esto se escribe así :

$$\lim x = \ell$$

Ejemplo :

$$2 + 1 ; 2 + \frac{1}{2} ; 2 + \frac{1}{2^2} ; \text{-----} ; 2 + \frac{1}{2^n} ; \text{-----}$$

decimos que tiende a 2 cuando  $n \rightarrow \infty$  pues en este caso  $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$

y se escribe :

$$\lim \left( 2 + \frac{1}{2^n} \right) = 2$$

$$n \rightarrow \infty$$

la diferencia entre el límite 2 y cualquier término de la sucesión  $( 2 + \frac{1}{2^n} )$  puede hacerse suficientemente pequeña, tanto como se quiere, con solo tomar el término cercano a 2.

Ejemplo : La función

$$y = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

da valores sucesivos de y a medida que damos valores crecientes de x formando una sucesión

2 ; 2,7 ; 2,71 ; 2,718 ; 2,7182 ; -----

y cuando  $x \longrightarrow \infty$  es

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e = 2,718281 \text{ -----}$$

base de los logaritmos neperianos o de Nepper.

#### 5.4.- Límite de una función

El ejemplo anterior muestra que y es una función de x y que al tender  $x \rightarrow \infty$ , la función y tiene a un valor finito  $e = 2,7182818 \text{ -----}$  que es el límite de la función.

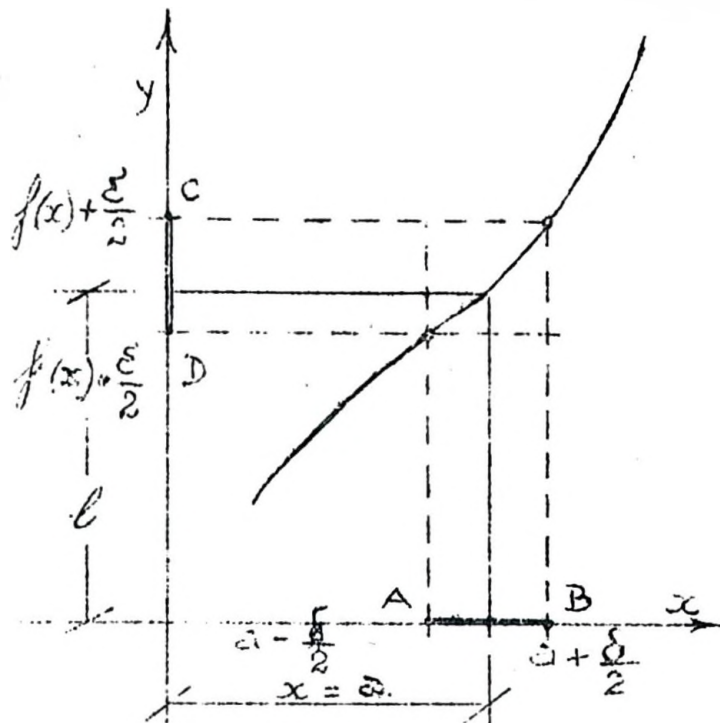
Definición : Se dice que una función  $y = f ( x )$  tiene por límite l cuando x tiende hacia un valor a, si fijado un número arbitrario y positivo ε, cualquiera que este sea, existe un número δ de modo tal que :

$$\begin{array}{l} \text{si} \quad \left| f ( x ) - l \right| \leq \varepsilon \quad (1) \\ \quad \quad \left| x - a \right| < \delta \quad (2) \end{array}$$

en ese caso se dice que

$$\lim_{x \longrightarrow a} f ( x ) = l$$

$$x \longrightarrow a$$



se llama entorno de  $x$ .  
 es el contorno de  $f(x)$   
 La (1) indica que :  
 $f(x)$  difiere en  $+\epsilon$  y en  $-\epsilon$   
 del límite  $\underline{L}$  y esta diferencia  
 será tanto más pequeña sea el  
 entorno  $\delta$  dentro del cual cae  
 $x = a$ , entorno que puede hacer  
 se tan pequeño como se desee  
 con solo tomar a  $\delta$  lo suficien  
 temente cercano a  $0$ .

### 5.5 Teoremas sobre límites

Supongamos que  $n$ ,  $v$  y  $w$  sean funciones de  $x$  y que :

$$\lim_{x \rightarrow a} n = A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} v = B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} w = C$$

1) Límite de una suma :

$$\lim_{x \rightarrow a} (n + v - w) = A + B - C$$

Ejemplo :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 4x = 4 + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x) = 12$$

2) Límite de un producto

$$\lim_{x \rightarrow a} (n \cdot v \cdot w) = A \cdot B \cdot C$$

Ejemplo :

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -1} 2x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x = 2(-1)^2 \cdot (-1) = -2$$

3) Límite de un cociente

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{n}{v} \right) = \frac{A}{B} \quad \text{siempre que } B \neq 0$$

Ejemplo :

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 9}{z + 2} = \frac{\lim_{z \rightarrow 2} (z^2 - 9)}{\lim_{z \rightarrow 2} (z + 2)} = -\frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$$

## 6.- ELEMENTOS DE CALCULO INFINITESIMAL

### 6.1.- Reseña histórica

La esencia del método infinitesimal reside en la idea del paso al límite considerada como una nueva operación que se combina con las operaciones algebraicas comunes. Debe buscarse en los griegos como los primeros precursores de este método; Eudoxio ( 408-355, a. de J.C. ) con su método de exhaución es el iniciador, en cuya huella continúa Arquímedes ( 287 ?- 212, a. de J.C. ) al cual se lo considera como el verdadero precursor en la antigüedad, de los métodos infinitesimales, por sus investigaciones de las cuadraturas y cubaturas. Iniciador en el estudio de las primeras series convergentes fué Nicolás Oresme ( siglo XIV d de J.C. ) y más tarde, el matemático portugués Alvaro Tomás que no solo calcula series geométricas, sino que también algunas otras series numéricas convergentes que hoy se calculan con la función logarítmica,

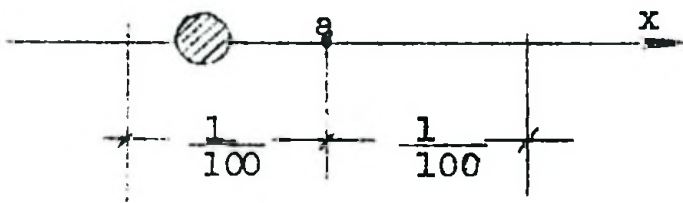
Siguiendo las huellas de Arquímedes, el astrónomo Juan Kepler ( 1571 - 1630 ) profundiza el estudio de los infinitésimos aplicándolos a las propiedades de las cónicas, lo mismo que más tarde hace el jesuita Buenaventura Cavalieri ( 1598 - 1647 ) discípulo de Galileo, que se ocupa del problema de las integraciones con métodos más simples que los de Arquímedes. Del estudio de las tangentes, cuadraturas y cubaturas se ocupa también Evangelista Torricelli ( 1608-1647 ) también discípulo de Galileo, que con Vincenzo Viviani ( 1622 - 1703 ) han dejado importantes huellas en esta parte del cálculo. La polémica originada en el estudio de la cicloide fué motivo para que eminentes matemáticos como Galileo ( 1564 - 1642 ); Roberval ( 1602 - 1675 ); Descartes ( 1596 - 1650 ); Pascal ( 1623 - 1662 ); Fermat ( 1601-1665 ); Huygens ( 1629 - 1695 ) y Wallis ( 1616 - 1703 ) incrementaran el contenido de esta rama naciente de la matemática, que con Isaac Barrow ( 1630 - 1677 ) se cierra la lista de los precursores para dar paso a los dos grandes genios fundadores del cálculo infinitesimal: Isaac Newton ( 1643 - 1727 ), filósofo, físico y matemático inglés que con parte la gloria de esta creación con otro, filósofo y matemático alemán, Gottfried Wilhelm Leibnitz ( 1646 - 1716 ). Contemporáneos en su creación, sin embargo ha sido la notación de Leibnitz y la claridad de sus demostraciones las que se impusieron en Europa, y más tarde en el mundo, sobre las de Newton, siendo ésta la que hoy se emplea en todos los tratados. Continuadores de la obra de estos dos genios, fueron Juan y Jacobo Bernoulli ( 1654 a 1748 ), con admirables contribuciones al Cálculo de Probabilidades, el marqués de l'Hopital ( 1661 - 1704 ); Abraham De Moivre ( 1667 - 1754 ) que como los anteriores se ocupó de la Combinatoria y las probabilidades; Brook Taylor ( 1685 - 1731 ) físico y matemático inglés y Colin Maclaurin ( 1698 - 1746 ) autores de las series que llevan sus nombres.- Se debe especialmente a Leonhard Euler ( 1707 - 1783 ) la sistematización de esta rama, llenando un período destacado de su desarrollo, el siglo XVIII, que fué el siglo de Euler y su escuela. La generación siguiente, es la de la Revolución Francesa, cuyo representante máximo es José Luis Lagrange ( 1736 - 1813 ) que con Pedro Simón Laplace ( 1749 - 1827 ) astrónomo y sistematizador del cálculo de probabilidades; Adriano María Legendre ( 1752 - 1833 ); Silvestre Francisco Lacroix ( 1765 - 1843 ) y otras dan un extraordinario brillo a la matemática francesa y forman el siglo de Lagrange en la historia del cálculo infinitesimal.-

## 6.2.- Concepto de límite

### a) Límite de una variable

Consideremos un alambre recto en el que se ha marcado una mancha negra; además ensartamos en el alambre una cuenta de rosario, ( esferita de vidrio con un agujero para el paso del alambre ), que puede moverse a voluntad hacia la izquierda o hacia la derecha de la mancha fija.-

Imaginemos al alambre representando el eje de las  $x$ , a la cuenta de rosario, a un punto móvil de abscisa  $x$  y a la mancha negra, a un punto fijo de abscisa  $a$ . Podemos mover la esferita hacia la derecha acercándola a la mancha todo cuanto desee, y lo mismo, llevándola a la derecha de la mancha, empujándola hacia la izquierda hasta que se aproxime a la mancha todo cuanto se desee. En esa forma la mancha quedará encerrada en un intervalo de  $x$  que puede hacerse lo más pequeño posible. En efecto, supongamos que ese intervalo, a la izquierda y a la derecha de  $a$  sea



menor que  $\frac{1}{100}$  m, bastará para ello hacer dos marcas en el alambre, a derecha e izquierda de  $a$ , a la distancia  $\frac{1}{100}$  m. de la mancha, y hacer mover a la esferita dentro de esas marcas, ya sea por la derecha o ya sea por la izquierda; la aproximación a  $a$  puede hacerse en ese intervalo cada vez más cerca de la mancha, pero nada se dice acerca de si la esfera coincide con la mancha, sino solamente lo que ocurrirá en la vecindad o proximidad de  $a$ , que es lo que interesa. Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  diferentes posiciones de la esferita en su acercamiento a  $a$ ; las diferencias

$$(a - x_1); (a - x_2); (a - x_3); \dots; (a - x_n); \dots$$

son cada vez más pequeñas y pueden hacerse menores que cualquier número  $\epsilon$  arbitrario y positivo, por pequeño que este sea; bastará para ello, fijar un intervalo  $\epsilon$  a cada lado de la mancha y mover la esfera dentro de él. Dichas diferencias tienden a acercarse a cero y tanto más, cuanto más pequeño es el intervalo  $\epsilon$  de variación de  $x$ . Se dice en este caso que la variable independiente  $x$  tiene por límite a  $a$ . Obsérvese que nada decimos respecto a la coincidencia de  $x$  con  $a$  sino solo de su proximidad, pues, cuando  $x \equiv a$  es  $a - x_n = 0$  y operar en esta situación puede dar lugar a resultados absurdos. En efecto, sea

$$a = b \quad \text{una igualdad cualquiera}$$

$$a^2 = ab \quad \text{por haber multipl. por } a$$

$$\text{Restando } b^2: \quad a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$\text{lo que es lo mismo que: } (a+b)(a-b) = b(a-b)$$

$$\text{y dividiendo por } (a - b) \text{ queda:}$$

$$a + b = b$$

y como

$$a = b$$

es

$$2b = b$$

luego

$$2 = 1$$

Se ha llegado a un resultado absurdo ya que se ha dividido por  $a - b = 0$ ; lo cual no es permitido, por cuanto la división por cero no existe.-

Definición: Se dice que la variable  $x$  tiende a la constante  $a$  como límite, cuando los valores sucesivos de  $x$  son tales que el valor numérico de la diferencia ( $a - x$ ), en valor absoluto, pueden llegar a ser menor que cualquier número  $\varepsilon$  arbitrario, prefijado y positivo, por pequeño que este sea.-

Será  $\lim x = a$

$$\text{si } |a - x| \leq \varepsilon$$

### b) Límite de una función

Supongamos tener la función  $y = \frac{8}{x}$  y tratemos de averiguar que ocurre en la vecindad de  $x = 2$ . Pudiendo variar  $x$  con arbitrariedad, por tratarse de la variable independiente, damos a ella los valores  $x = 2,1; 2,01; 2,001$ , etc. y construimos la siguiente tabla de valores:

| x | 2,1 | 2,01 | 2,001 | 2,0001 | 2,00001 | 2,000001 |
|---|-----|------|-------|--------|---------|----------|
| y | 3,8 | 3,98 | 3,998 | 3,9998 | 3,99998 | 3,999998 |

Se observa que a medida que  $x$  se acerca a 2 la  $y$  se va acercando cada vez más a 4. Tengamos

$$y = \frac{8}{2 + h}$$

donde  $h$  es el incremento dado a 2, por ejemplo

$$h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots$$

luego, si  $y \rightarrow 4$ , su diferencia es:

$$y - 4 = \frac{8}{2 + h} - 4 = \frac{8 - 4(2 + h)}{2 + h} = \frac{-4h}{2 + h}$$

Es lógico decir que  $y$  tiende a 4 si la diferencia entre  $y$  y 4 puede hacerse numéricamente menor que un número  $\varepsilon > 0$  por pequeño que éste sea, bastará tomar para ello, si  $h > 0$ , :

$$\left| \frac{-4h}{2 + h} \right| = \frac{4h}{2 + h} < \varepsilon$$

o bien

$$\begin{aligned}
 4h &< \varepsilon (2+h) \\
 4h - \varepsilon h &< 2\varepsilon \\
 h(4 - \varepsilon) &< 2\varepsilon \\
 h &< \frac{2\varepsilon}{4 - \varepsilon}
 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Si

$$\varepsilon = 0,01 \text{ cm.}$$

es

$$h < \frac{2 \times 0,01}{4 - 0,01} = \frac{0,02}{3,99}$$

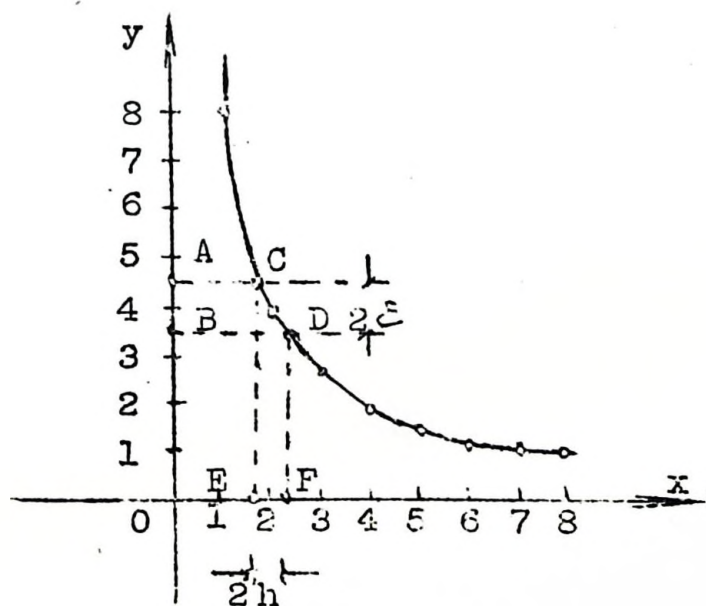
$$h < 0,005 \text{ cm}$$

Nótese que nada se dice si  $x=2$ , sino solamente,  $x$  en la proximidad de 2, pues puede ocurrir que para  $x=2$  la función carezca de valor.

Veamos como se interpreta esto gráficamente.-  
Construimos el gráfico de la función

$$y = \frac{8}{x}$$

Tomando el punto  $P = (2/4)$  como punto medio del segmento de ancho  $2\varepsilon$  construimos el intervalo  $A-B$  sobre el eje  $y$ ; por sus extremos



| x   | y      |
|-----|--------|
| ± 1 | ± 8    |
| ± 2 | ± 4    |
| ± 3 | ± 2,67 |
| ± 4 | ± 2    |
| ± 5 | ± 1,6  |
| ± 6 | ± 1,3  |
| ± 7 | ± 1,14 |
| ± 8 | ± 1    |

trazamos  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  paralelas al eje  $x$ , formándose una faja de un ancho  $2\varepsilon$  en la cual se hallan las ordenadas de los puntos cuyo valor de  $y$  difiere menos de  $\varepsilon$  del valor 4. Las verticales trazadas por C y D cortan al eje  $x$  en E y F a ambos lados de 2 y encerrando este punto en un intervalo  $2h$  que depende de  $\varepsilon$ ; en efecto,

si  $\varepsilon = 0,01$  cm, es  $\overline{AB} = 2\varepsilon = 0,02$  cm,

y es  $2h = 0,005$  cm

$h = 0,0025$  cm

Decimos en este caso que :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Lím} \frac{8}{x} = 4 \\ x \rightarrow 2 \end{array}}$$

Se ha excluido especialmente a la abscisa 2 de la discusión anterior por las razones dadas con anterioridad,-.

Si la función dada fuese

$$y = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$$

se observa que para  $x = 1$  no hay ningún valor para  $y$  pues la expresión anterior conduce a la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ , es decir, que la función y no está definida para  $x = 1$ , pero podemos averiguar que ocurre en la vecindad de 1, para lo cual construimos la siguiente tabla de valores.-

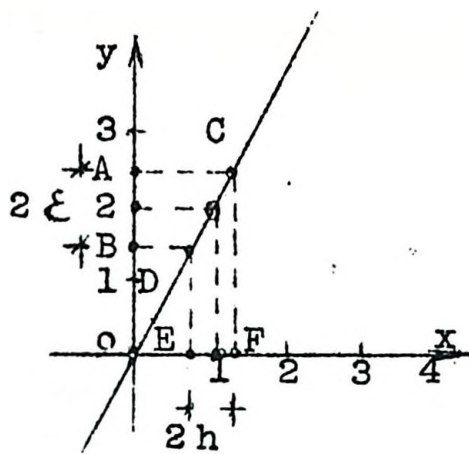
| x       | y       |
|---------|---------|
| 1,1     | 2,2     |
| 1,01    | 2,02    |
| 1,001   | 2,002   |
| 1,0001  | 2,0002  |
| 1,00001 | 2,00002 |

Parece natural asignar el valor 2 cuando  $x = 1$

Por otra parte, para  $x = 1$  es

$$y = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{2x(x - 1)}{x - 1}$$

$y = 2x$



que representa una recta que pasa por el origen,

Evidentemente

$$|y - 2| = |2x - 2| = 2|x - 1|$$

puede hacerse arbitrariamente lo pequeño que se desee con solo tomar a  $x$  suficientemente próximo a 1. La interpretación gráfica es análoga al caso anterior.

Se dice, en este caso, que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2$$

Definición: Si  $y = f(x)$  es una función de  $x$ , se dice que  $y$  tiene por límite a  $l$  cuando  $x$  tiende a  $a$ , si la diferencia  $|y - l|$  en valor absoluto, es menor que un número  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño y positivo, prefijado, cuando se toma  $|x - a|$  menor que un número  $h$ . - Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\begin{aligned} & \text{si} \quad |f(x) - l| < \varepsilon \quad (\text{positivo}) \\ & \text{para} \quad |x - a| < h \end{aligned}$$

### 6.3. Teoremas sobre límites

Teorema 1: El límite, cuando  $x$  tiende a  $a$ , de una suma de un número finito de sumandos, es igual a la suma de los límites de cada uno de los sumandos.

$$\text{Si} \quad y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

$$\text{es} \quad \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_3(x)$$

$$x \rightarrow a \quad x \rightarrow a \quad x \rightarrow a \quad x \rightarrow a$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - x^2 + x) &= \lim_{x \rightarrow 4} x^3 - \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} x \\ &= 216 - 16 + 4 = \underline{204} \end{aligned}$$

Teorema 2: El límite, cuando  $x$  tiende a  $a$ , del producto de un número finito de factores, es igual al producto de los límites de cada uno de los factores.

Si  $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$

$$\text{es } \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} y &= x^2 (x - 1) \\ \lim_{x \rightarrow 2} [x^2 (x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 4 \cdot 1 = \underline{4} \end{aligned}$$

Teorema 3: El límite, cuando  $x$  tiende a  $a$ , del cociente de dos funciones, es igual al cociente de los límites del dividendo y el divisor.

$$\begin{aligned} \text{Si } y &= \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \\ \text{es } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \end{aligned}$$

pueden presentarse los siguientes casos:

a) Si  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$

el límite del cociente existe y es finito

$$b) \quad Si \quad \lim f_1(x) = 0 \quad \lim f_2(x) = 0$$

la función y puede tener o no límite finito

$$c) \quad Si \quad \lim f_1(x) \neq 0 \quad y \quad \lim f_2(x) = 0$$

la función y no tiene límite finito y se dice que tiende al **infinito**.-

Ejemplo: a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)}$$

$$\text{como } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4) = 8 \neq 0$$

el límite del cociente es finito e igual a :

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x}{\lim_{x \rightarrow 0} \text{tg } x} = \frac{0}{0}$$

el límite es indeterminado, sin embargo, como

$$\frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} = \frac{\text{sen } x}{\frac{\text{sen } x}{\cos x}} = \cos x$$

$$\text{es } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

válido para todo valor de x comprendido entre:

$$-\frac{\pi}{2} y + \frac{\pi}{2} \quad \text{excepto para } x = 0.$$

Ejemplo c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^2 - 6x + 9} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - x^2 - 7x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9)} = \\ &= \frac{27 - 9 - 21 + 3}{9 - 18 + 9} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Sin embargo:

$$\frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x-3)(x^2 + 2x - 1)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3}$$

luego

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^2 - 6x + 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)} \end{aligned}$$

pero siendo  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$

el límite no es finito y se dice que la función tiende al infinito, escribiéndose:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^2 - 6x + 9} = \infty$$

Teorema 4: El límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función.-

$$\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 = 7 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 7 \cdot 8 = 56$$

#### 6.4.- Continuidad de una función

Consideremos la función  $y = \frac{8}{x}$  cuyo gráfico se ha construido en 6.2; en él se observa que el trazo de la curva entre  $x = 2$  y  $x = 3$  no presenta inconvenientes, es continuo, no así entre  $x = -1$  a  $x = 1$ , pues en su interior se halla  $x = 0$  para el cual la curva no se halla definida y ella salta de  $-\infty$  a  $+\infty$  teniendo un salto de discontinuidad. Se observa también, que para  $x = 2$  es  $y = 4$  y se ha calculado que el  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{x} = 4$  coincidiendo el valor de su ordenada con el límite,

que es lo que caracteriza esa continuidad del trazado.

Definición: Se dice que una función  $y = f(x)$  es continua en el punto  $x = a$ . Si, únicamente la función está definida en ese punto, y el límite de la misma para  $x \rightarrow a$  es igual al valor de la función para  $x = a$

Definición: Una función  $y = f(x)$  es continua en un intervalo  $a \leq x \leq b$  si lo es en cada uno de sus puntos,-

La función  $y = \frac{8}{x}$  es continua en el intervalo  $2 \leq x \leq 3$  y no lo es en  $-1 \leq x \leq 1$ ,-

#### 6.5.- Ejercicios

1.-  $\lim_{t \rightarrow 1} (t^5 - 3t^4 + 2t^3 - t^2 + 7t - 6)$

$R = 0$

2.-  $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right]$

$R = 1$

3.-  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 4}$

$R = -\frac{3}{8}$

4.-  $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^3 + 6x^2 - 9x - 54}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$

$R = -\frac{1}{2}$

5.-  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 6x + 5}$

$R = 0$

6.-  $\lim_{u \rightarrow 4} \frac{u - 4}{\sqrt{u^2 - 16}}$

$R = 0$

$$7.- \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}$$

$$R = -2$$

$$8.- \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{\cotg \alpha}$$

$$R = 1$$

$$9.- \quad \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \varphi \right)}$$

$$R = \infty$$

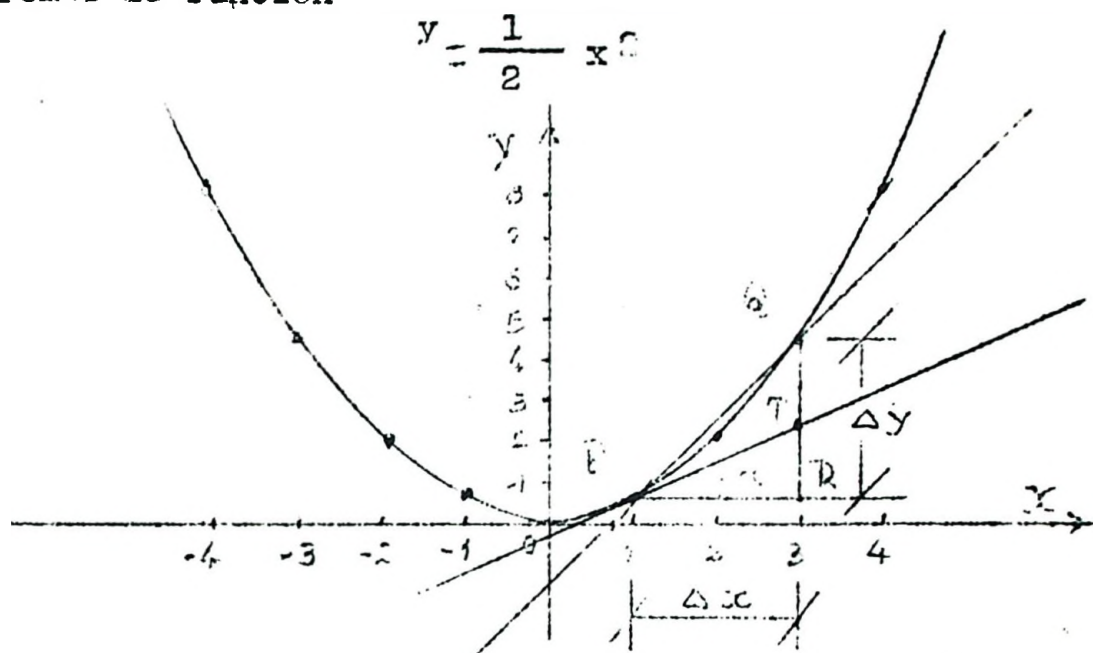
$$10.- \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$$

$$R = \frac{12}{5}$$

## 6.6.- DERIVADAS

### a) Tangente a una curva en un punto

Consideremos la función



y busquemos la tangente a la curva en el punto  $P = (1/\frac{1}{2})$ . Suponemos que sea fijo el punto P y tomamos otro punto Q móvil sobre la curva que se desplaza hacia el punto P sobre ella. La secante PQ va tomando distintas posiciones girando en torno de P hasta ocupar una posición límite PT que se denomina tangente en el punto P. En el triángulo rectángulo PRQ de lados  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , la pendiente de la secante PQ es  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  que toma distintos valores para las distintas posiciones de Q. Supongamos que el punto móvil sea  $Q = (2/2)$  se tendrá:

$$\Delta x = \text{absc. } Q - \text{absc. } P = 2 - 1 = 1.$$

$$\Delta y = \text{ord. } Q - \text{Ord. } P = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3/2}{1} = \frac{3}{2}$$

Otros valores de esta pendiente vienen dados en la tabla siguiente:

| $x_P$ | $x_Q$ | $\Delta x$ | $y_P$ | $y_Q$     | $\Delta y$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ |
|-------|-------|------------|-------|-----------|------------|-----------------------------|
| 1     | 2,0   | 1,0        | 0,5   | 2,0       | 1,5        | 1,5                         |
| 1     | 1,5   | 0,5        | 0,5   | 1,125     | 0,625      | 1,25                        |
| 1     | 1,1   | 0,1        | 0,5   | 0,605     | 0,105      | 1,05                        |
| 1     | 1,01  | 0,01       | 0,5   | 0,51005   | 0,01005    | 1,005                       |
| 1     | 1,001 | 0,001      | 0,5   | 0,5010005 | 0,0010005  | 1,0005                      |

donde se aprecia que  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 1$ . Para encontrar este límite basta incrementar la abscisa 1 de P en  $\Delta x$  y tendremos

$$\text{Ord. } Q = y_Q = \frac{1}{2} (1 \Delta x)^2 - \frac{1}{2} (1 \pm \Delta x) \Delta x^2$$

$$y_Q = \frac{1}{2} + \Delta x - \frac{1}{2} \Delta x^2$$

y para hallar  $\Delta y$  basta restarle  $y_P = \frac{1}{2}$ , es decir que

$$\Delta y = \Delta x - \frac{1}{2} \Delta x^2$$

$$y \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - \frac{1}{2} \Delta x$$

de donde

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta x \right) = 1$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

donde obtenemos que la tg.  $\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

vale decir que  $\alpha = 45^\circ$

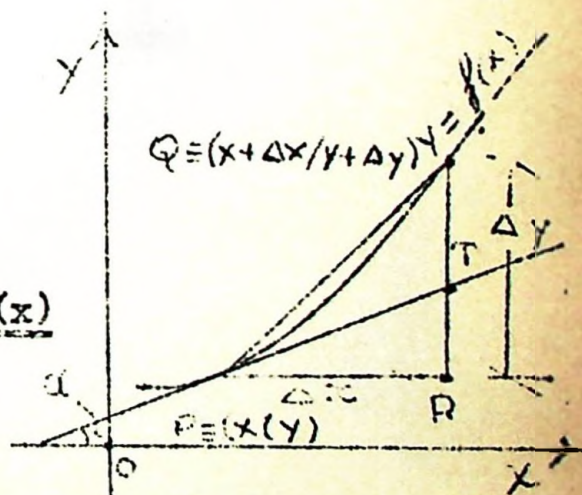
En general, dada la función  $y = f(x)$  continua en el intervalo  $a \leq x \leq b$  sea  $P = (x/y)$  un punto fijo de la curva que representa a esa función, y  $Q(x+\Delta x/y+\Delta y)$  otro punto de la misma, variable en posición sobre ella. Se tendrá que:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$y \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

es la pendiente de la secante  $\overline{PQ}$ , y el:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Si este límite existe, la secante  $\overline{PQ}$  tiene una posición límite cuando  $Q$ , a lo largo de la curva, se aproxima a  $P$ . Esta posición límite de la secante es la tangente en el punto  $P$ , siendo  $P$  el punto de contacto y

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

pendiente de la tangente.

## b) Derivada de una función

Dada una función  $y = f(x)$  continua en el intervalo  $a \leq x \leq b$  y  $(x/y)$  un par de números que satisfaga a la ecuación dada, llamaremos derivada de  $y$  con respecto a  $x$  en el punto  $(x/y)$  a:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que este límite exista.

### NOTACION:

Se acostumbra a indicar esta derivada con los símbolos:

$$y' ; f'(x) ; \frac{dy}{dx} ; \frac{d}{dx} f(x) ; \text{etc.}$$

que son los más usados corrientemente.

## c) Cálculo de la derivada

### I) Derivada de

Dada la función  $y = x^n$ , supongamos que  $n$  es un entero positivo y busquemos el  $\Delta y$ , para lo cual habrá que incrementar a  $x$  en  $\Delta x$

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x)^n = \\ &= x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} \Delta x^2 + C_n^3 x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + \Delta x^n \\ &= x^n + x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + \Delta x^n \end{aligned}$$

restando a ambos miembros  $y = x^n$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta y &= n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + \Delta x^n \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} \Delta x^2 + \dots + \Delta x^{n-1} \end{aligned}$$

como el límite de una suma, de un número finito de sumandos, es igual

a la suma de los límites de éstos, y todos contienen a  $\Delta x$  con excepción del primero  $\frac{nx^{n-1}}{\Delta x}$ , tales límites serán nulos exceptuando al primero, de modo que:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

es decir

$$y' = n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

Ejemplos:

$$\text{Si } y = x^8 \quad \therefore \quad y' = 8x^7$$

$$\text{Si } y = x \quad \therefore \quad y' = x^0 = 1$$

Se demuestra que la fórmula (1) es también válida aún cuando  $n$  no sea positivo, vale decir, que  $n$  sea negativo, fraccionario ó irracional; en una palabra, válida para todo exponente real.

Ejemplos:

$$1) \text{ Si } y = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \therefore \quad y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$2) \text{ Si } y = \sqrt{x^5} = x^{5/2} \quad \therefore \quad y' = \frac{5}{2}x^{5/2-1} = \frac{5}{2}x^{3/2} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

$$3) \text{ Si } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3} \quad \therefore \quad y' = \frac{-1}{3}x^{-1/3-1} = \frac{-1}{3}x^{-4/3} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$4) \text{ Si } y = \frac{1}{\sqrt[3]{5t^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{t^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot t^{-2/3}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot (-2/3) \cdot t^{-2/3-1}$$

$$y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{5}} \cdot t^{-5/3}$$

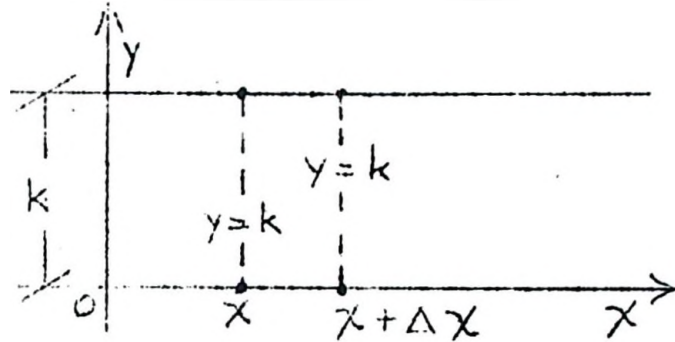
$$y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}$$

$$y' = \frac{2}{3 \sqrt[3]{5t^5}}$$

## II) Derivada de una constante

Si  $y = k$  (constante)

para cualquier valor que tome  $x$ , siempre  $y$  tiene el valor  $k$ , de modo que:



$$y + \Delta y = k$$

pero  $y = k$

restando  $\Delta y = 0$

y es  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

es decir

$$\boxed{y' = 0}$$

la derivada de una constante es cero. Geométricamente resulta que la tangente en cualquier punto a la recta  $y = k$ , paralela al eje  $x$ , siempre coincide con ella.

## III) Derivada de una suma

Sean  $u = f(x)$   $v = g(x)$  (1)

dos funciones de  $x$  continuas en el mismo intervalo  $a \leq x \leq b$ , y sea

$$y = u + v \quad (2)$$

la función suma. Si damos a  $x$  un incremento  $\Delta x$ , obtendremos en (1) los incrementos  $\Delta u$  y  $\Delta v$  y la (2) nos dará:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

que restándole (1) da:

$$\Delta y \approx \Delta u + \Delta v$$

$$y \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

y como por (1) es:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$$

es

$$y' = u' + v'$$

La derivada de una suma de un número finito de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de éstas.

Ejemplos: I)

$$y = x^4 \sqrt[3]{x} + 7$$

$$y' = 4x^3 + \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

II)

$$y = \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1} + t^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t^3}} = -\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t\sqrt{t}}\right)$$

IV) Derivada de un producto

Sea

$$y = u \cdot v$$

siendo

$$u = f(x)$$

y

$$v = g(x)$$

tendremos:

$$y + \Delta y \approx (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$y + \Delta y \approx uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$y = uv$$

---


$$\Delta y \approx u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Si  $u$  y  $v$  son funciones continuas de  $x$  y poseen derivadas en el intervalo fijado, cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , también  $\Delta v \rightarrow 0$  y además

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = u'$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} = v'$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

luego es:

$$y' = uv' + u'v$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda por la derivada de la primera.

Ejemplo:

$$y = x^5 (x^3 - 7)$$

$$y' = x^5 \cdot 3x^2 + 5x^4 (x^3 - 7)$$

$$y' = 3x^7 + 5x^4 = 35x^4$$

$$y' = 8x^7 - 35x^4$$

V) Derivada de un cociente

Sean  $u$  y  $v$  dos funciones de  $x$  que poseen derivadas en el intervalo  $a \leq x \leq b$ . Si

$$y = \frac{u}{v}$$

tendremos

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

y será

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{u + \Delta u - u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

y es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

y teniendo presente que el límite de un cociente es igual al cociente de los límites, será el límite del numerador, igual a:

$$\lim v \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim u \frac{\Delta v}{\Delta x} = v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} = vu' - uv'$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

y análogamente se tendrá en el denominador:

$$\lim v(v + \Delta v) = v \lim (v + \Delta v) = v^2$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\text{pues } \lim \Delta v = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

por ser  $v$  una función de  $x$ . En consecuencia es

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

La derivada de un cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador, menos, el numerador por la derivada del denominador, sobre el cuadrado del denominador.

Ejemplo:

$$y = \frac{x^2 - 16}{x^3 + 27}$$

$$y' = \frac{2x(x^3 + 27) - (x^2 - 16) \cdot 3x^2}{(x^3 + 27)^2}$$

$$y' = \frac{2x^4 + 54x - 3x^4 + 48x^2}{(x^3 + 27)^2}$$

$$y' = \frac{-x^4 + 48x^2 + 54x}{(x^3 + 27)^2}$$

## VI) Ejercicios

$$1) y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 + 11x - 2$$

$$R: y' = x^3 - 7x^2 + 10x + 11$$

$$2) \quad y = 9x^3 - 4x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{9}{x^3}$$

$$R: y' = 27x^2 - 8x + 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \frac{27}{x^4}$$

$$3) \quad y = \frac{3}{4x^2} + \frac{7}{2x^3}$$

$$R: y' = -\frac{3}{2x^3} - \frac{21}{2x^4}$$

$$4) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2x}} + 15x^{4/3}$$

$$R: y' = -\frac{1}{(2x)^{3/2}} + 20x^{1/3}$$

$$5) \quad S = (2t^2 - 3t + 4)(4t^3 + 3t + 2)$$

$$6) \quad y = (2x^4 - 4x)(3x + 1)$$

$$7) \quad y = \frac{2x + 7}{5x - 9}$$

$$R: y' = -\frac{53}{(5x - 9)^2}$$

$$8) \quad y = \frac{3x^2}{4x + 1}$$

$$R: y' = \frac{6x(2x + 1)}{(4x + 1)^2}$$

$$9) \quad y = \frac{3(x^3 - 27)}{4(x^3 + 8)}$$

$$R: y' = \frac{315x^2}{4(x^3 + 8)^2}$$

$$10) \quad y = \frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x}}$$

$$R: y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{2\sqrt{x^3}}$$

## VII) DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION

Dada la función

$$y = (2x^5 - 6)^{5/3}$$

ella no es potencia de  $x$  sino una potencia de una función de  $x$  y no puede aplicarse a ella la regla de derivación para  $y = x^u$

Sin embargo, si hacemos

$$u = 2x^5 - 6$$

se obtendrá

$$y = u^{5/3}$$

en donde  $y$  es una función de  $u$ , siendo a su vez  $u$  una función de  $x$ ; se dice en este caso que  $y$  es una función de función de  $x$ . En general, si

$$y = f(u) \quad \text{siendo } u = f(x)$$

deseamos calcular  $\frac{dy}{dx}$  Si incrementamos a  $x$  en  $\Delta x$ , en ese caso, se obtendrá a  $u$  incrementada en  $\Delta u$  y a su vez a  $y$  en  $\Delta y$ . Si  $\Delta x \rightarrow 0$ , también lo hace  $\Delta u$  ya que admitimos que  $u$  es función continua de  $x$  y suponemos que tiene derivadas respecto de  $x$ .

En tal caso, resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

el cual es cierto para todo valor de  $\Delta u$  excepto para  $\Delta u = 0$   
Si  $\Delta x \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

o sea

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Ejemplo:

Si  $y = (x^2 + 1)^{4/3}$

hacemos

$$u = x^2 + 1$$

∴

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

y es

$$y = u^{4/3}$$

∴

$$\frac{dy}{du} = \frac{4}{3} u^{4/3-1} = \frac{4}{3} u^{1/3}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2 + 1} \cdot 2x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3} x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1}}$$

### VIII) Derivadas de las funciones inversas

Dada la función  $y = \varphi(x)$  se llama inversa de ella a la función:

$$x = \varphi^{-1}(y)$$

Al considerar el significado geométrico de la derivada en 6.6 a) se ha visto que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

nos daba la pendiente de la tangente geométrica con respecto al eje  $x$ . Si esta pendiente la tomamos con respecto al eje  $y$ , haciendo las mismas consideraciones que allí se hicieron tendríamos

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\Delta y \rightarrow 0$$

pero

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

y

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\Delta y \rightarrow 0$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad (1)$$

su función inversa es:

$$x = 2\sqrt{y} \quad (2)$$

pero en (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x \quad (3)$$

y en (2)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x^2}} = \frac{2}{x} \quad (4)$$

de (3) y (4) puede comprobarse que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{como se demostró.}$$

### IX) Derivadas de orden superior

Dada una función  $y = f(x)$ , por ejemplo,  $y = x^5$ , su derivada  $y' = 5x^4$  es a su vez una función de  $x$  susceptible de volver a derivarse. Si tal cosa hacemos obtenemos

$$\frac{d}{dx} y' = 20x^3$$

que se llama derivada segunda con respecto a  $x$ , y como podemos ver, es otra función de  $x$  que volviéndola a derivar obtenemos  $60x^2$  que se llama derivada tercera y así sucesivamente.

La notación más usada es la siguiente:

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx} \quad \text{1a. derivada}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{2a. derivada}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{3a. derivada}$$

.....  
.....

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad n^{\text{ésima}} \text{ derivada}$$

llamadas derivadas de orden superior. También se acostumbra a indicarlas así:

$$y' ; y'' ; y''' ; y^{(IV)} ; \dots ; y^{(n)} ; \dots$$

$$f'(x) ; f''(x) ; f'''(x) ; f^{(IV)}(x) ; \dots ; f^{(n)}(x) ; \dots$$

Ejemplo:

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$$

$$y''' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = -2 \cdot 3 x^{-4} = -3! x^{-4}$$

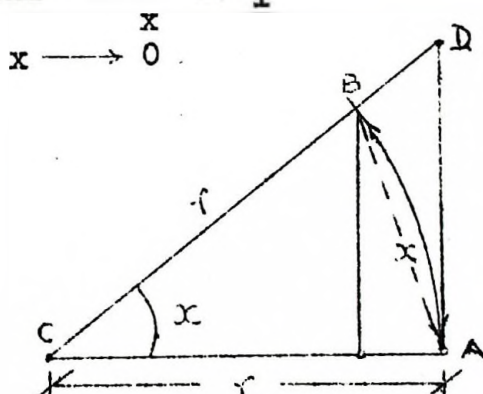
$$y^{(IV)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} = 2 \cdot 3 \cdot 4 x^{-5} = 4! x^{-5}$$

.....  
.....

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n \cdot n! x^{-(n+1)}$$

## X) Derivadas de las funciones trigonométricas

### a) Cálculo del Lím $\frac{\sin x}{x} = 1$



Consideremos el sector circular ABC y la tangente al círculo en A, así como la cuerda AB.

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BH}$$

$$= -\frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} \sin x$$

$$= -\frac{1}{2} r^2 \sin x \quad (1)$$

$$\text{Area sector ABC} = \frac{1}{2} r^2 x \quad (2)$$

siendo  $x$  el ángulo al centro, cuya medida es la del arco  $\widehat{AB}$ .

$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle ACD &= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AC} \cdot \operatorname{tg} x \\ &= \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x \quad (3) \end{aligned}$$

pero

$$\text{Area } \triangle ABC < \text{Area sector ABC} < \text{Area } \triangle ACD$$

o sea por

$$(1) \ (2) \text{ y } (3): \quad \frac{1}{2} r^2 \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x$$

que al dividir por  $r^2 > 0$  no cambia el sentido de la desigualdad ó sea:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

y si  $x < \frac{\pi}{2}$  es  $\sin x > 0$ , luego dividiendo por  $\sin x$  se obtiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

o sea

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

pero si

$$a > b \quad \therefore \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

luego

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

como  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$$x \rightarrow 0$$

tomando límites en esa desigualdad, como  $\frac{\sin x}{x}$  está contenida entre 1 y  $\cos x < 1$  cuando  $x \rightarrow 0$  los tres valores tienen el mismo límite, es decir, que el

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

b) Derivada del sen x

$$\text{Si } y = \text{sen } x$$

$$\text{es } y + \Delta y = \text{sen}(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y = \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x$$

$$\text{ahora, como } \text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

aplicándola aquí nos da:

$$\Delta y = 2 \text{sen } \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}$$

$$\Delta y = 2 \text{sen } \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \text{sen } \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\text{o sea } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

y tomando límites, como

$$\lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

$$\Delta x \longrightarrow 0$$

$$\Delta x \longrightarrow 0$$

resulta que

$$y' = \cos x$$

Ejemplo:

$$y = \text{sen} \left( \frac{3}{5} x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{haciendo } \frac{3}{5} x + \frac{\pi}{4} = u$$

$$\text{se tiene } y = \text{sen } u$$

siendo y una función de función de x, y en consecuencia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cos\left(\frac{3}{5}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

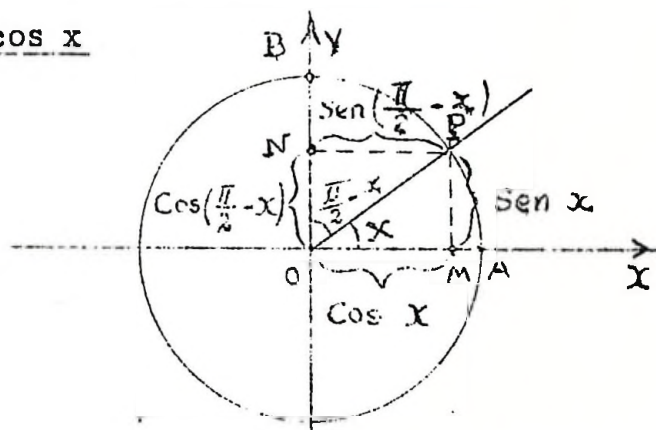
En general:

Si  $y = \sin u$

es

$$\frac{d}{dx} (\sin u) = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

c) Derivada del cos x



Dada la función  $y = \cos x$  Si observamos las relaciones que hay en la circunferencia trigonométrica, podremos escribir:

$$\overline{OA} = \overline{NP}$$

o sea  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

siendo  $\frac{\pi}{2} - x$  el ángulo complementario de  $x$ . Luego, es:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

cuya derivada se sabe calcular por Xb), en efecto

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (\cos x) = \frac{d}{dx} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right] = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

pero

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \overline{ON} = \overline{MP} = \sin x$$

luego es:

$$y' = -\sin x$$

y en general

si  $y = \cos u$

es

$$y' = -\operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = \cos^3 x$$

hacemos

$$u = \cos x$$

∴

$$y = u^3$$

y es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 u^2 \cdot (-\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -3 \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x$$

d) Derivada de la tg x

Dada  $y = \operatorname{tg} x$

es  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

que derivaremos como cociente y obtendremos:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

es decir:

$$y' = \sec^2 x$$

En general:

$$y' = \sec u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{4}$$

hacemos

$$u = \operatorname{tg} \frac{x}{4} \quad \therefore y = u^2$$

• •

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot \sec^2 \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{4} \cdot \sec^2 \frac{x}{4}}$$

e) Derivada de la cotg x

Sea  $y = \cotg x$   
es  $y = \cotg x = \frac{1}{\tg x} = \tg^{-1} x$

y haciendo  $u = \tg x$

es  $y = u^{-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2} \sec^2 x = -\frac{\sec^2 x}{\tg^2 x} = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

luego

$$y' = -\operatorname{cosec}^2 x$$

y en general

$$y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = \cotg^3 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right)$$

hacemos

$$u = \cotg \left( \frac{t}{3} + \alpha \right)$$

$$\therefore y = u^3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3u^2 \cdot \left[ -\operatorname{cosec}^2 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right) \right] \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = - \cotg^2 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right) \cdot \operatorname{cosec}^2 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{\cos^2 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right)}$$

$$y' = - \frac{\cos^2 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right)}{\sin^4 \left( \frac{t}{3} + \alpha \right)}$$

f) Derivada de la sec x

Sea  $y = \sec x = \frac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x$

hacemos  $u = \cos x$

$$y = u^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = u^{-2} \cdot (-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$$

En general:

$$\frac{dy}{dx} = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:  $y = \sec \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \cdot (-1)$$

$$y' = - \sec \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$$

g) Derivada de la cosec x

Sea  $y = \operatorname{cosec} x$

Como  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x^{-1}$

hacemos  $u = \operatorname{sen} x$

luego  $y = u^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = -u^{-2} \cos x = - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$y' = - \operatorname{cosec} x \cdot \cotg x$$

En general:

$$y' = - \operatorname{cosec} u \cdot \cotg u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = \operatorname{cosec} x^3$$

$$y' = - \operatorname{cosec} x^3 \cdot \cotg x^3 \cdot 3x^2$$

$$y' = - 3x^2 \cdot \operatorname{cosec} x^3 \cdot \cotg x^3$$

h) Funciones trigonométricas inversas

Supongamos tener  $y$  definido como una función de  $x$  en la siguiente forma

$$\operatorname{sen} y = x$$

vale decir, que  $y$  es un ángulo cuyo seno vale  $x$ .

Si deseamos tener la función inversa, debemos resolver esa ecuación en función de  $y$ , obteniéndose

$$y = \arcsin x$$

que es una manera de expresar que  $y$  es el ángulo cuyo seno es  $x$ .

Análogamente, las respectivas inversas de:

$$\cos y = x \quad \text{es} \quad y = \arccos x$$

$$\operatorname{tg} y = x \quad \text{"} \quad y = \operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{cotg} y = x \quad \text{"} \quad y = \operatorname{arccotg} x$$

$$\sec y = x \quad \text{"} \quad y = \operatorname{arcsec} x$$

$$\operatorname{cosec} y = x \quad \text{"} \quad y = \operatorname{arccosec} x$$

Daremos, sin demostrarlas, las respectivas derivadas de estas funciones inversas:

$$y = \arcsin x \quad \text{es} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x \quad \text{"} \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{"} \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{arccotg} x \quad \text{"} \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{arcsec} x \quad \text{"} \quad y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \operatorname{arccosec} x \quad \text{"} \quad y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Ejemplo: I)

$$y = \arcsin \left( \frac{x^2}{3} \right)$$

$$y' = \frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{x^6}{9}}} = \frac{3x^2}{\sqrt{9-x^6}}$$

$$\text{II)} \quad y = \arctg \sqrt{1+x}$$

hacemos

$$u = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y = \arctg u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}}}$$

### XI) Derivada de la función logarítmica

Sea

$$y = \log_a x$$

será

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log x$$

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$\Delta y = \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{\Delta x}{x}}$$

hacemos

$$t = \frac{x}{\Delta x} \quad \therefore \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{t}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

Si  $\Delta x \longrightarrow 0 \quad \therefore t \longrightarrow \infty$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

$$\Delta x \longrightarrow 0$$

$$t \longrightarrow \infty$$

siendo el logaritmo una función continua, se puede escribir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

pero

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$$

luego

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

En general

$$y' = \frac{1}{u} \cdot (\log_a e) \cdot \frac{du}{dx}$$

Si la base

$$a = e \quad \therefore \log_e e = 1$$

luego para  $y = L(u)$  siendo  $u = f(x)$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo: I)

$$y = \log_{10}(x^2 + 9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \log_{10} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 9} \cdot \log_{10} \cdot 2x$$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 9} \cdot \log_{10} e$$

Ejemplo: II)

$$y = L \sqrt{1-x^2}$$

hacemos

$$u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = L(u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1-x^2}$$

### XII) Derivada de la función exponencial

Sea la función

$$y = a^x \quad \text{para } a > 0$$

tomamos  $\log_a$  de ambos miembros:

$$\log_a y = x \cdot \log_a a$$

$$\log_a y = x$$

$$\text{pues } \log_a a = 1$$

o bien

$$x = \log_a y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \log_a a$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{\log_a e}$$

por una propiedad de los logaritmos es :

$$\log_a e = L_a$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot L_a$$

$$y' = a^x \cdot L_a$$

En general

$$\text{si } y = a^u \text{ siendo } u = f(x)$$

es

$$y' = a^u \cdot L_a \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = 10^{\text{sen } x}$$

$$y' = 10^{\text{sen } x} \cdot \cos x \cdot L(10)$$

Observación:

Si

$$a = e$$

es

$$y = e^x$$

luego

$$y' = e^x$$

y en general

$$y = e^u$$

es

$$y' = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = e^{-x^2}$$

$$y' = e^{-x^2} ( - 2 x )$$

$$y' = - 2 x e^{-x^2}$$

XIII) ResumenTabla de derivadas

- 1)  $\frac{d}{dx} k = 0$  ( derivada de una constante )
- 2)  $\frac{d}{dx} ( u + v ) = u' + v'$  ( derivada de una suma )
- 3)  $\frac{d}{dx} ( u \cdot v ) = uv' + u'v$  ( derivada de un producto )
- 4)  $\frac{d}{dx} ( k \cdot u ) = k \cdot u'$  ( derivada de una constante por una función )
- 5)  $\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  ( derivada de un cociente )
- 6)  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  ( derivada de función de función )
- 7)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$  ( derivada de la función inversa )
- 8)  $\frac{d}{dx} ( u^n ) = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$  ( derivada de la función potencial )
- 9)  $\frac{d}{dx} ( \text{sen } u ) = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$
- 10)  $\frac{d}{dx} ( \cos u ) = -\text{sen } u \cdot \frac{du}{dx}$
- 11)  $\frac{d}{dx} ( \text{tg } u ) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$
- 12)  $\frac{d}{dx} ( \text{cotg } u ) = -\text{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$
- 13)  $\frac{d}{dx} ( \sec u ) = \sec u \cdot \text{tg } u \cdot \frac{du}{dx}$
- 14)  $\frac{d}{dx} ( \text{cosec } u ) = -\text{cosec } u \cdot \text{cotg } u \cdot \frac{du}{dx}$
- 15)  $\frac{d}{dx} ( \text{arc sen } u ) = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

$$16) \frac{d}{dx} (\arccos u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$17) \frac{d}{dx} (\arctg u) = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$18) \frac{d}{dx} (\operatorname{arccotg} u) = - \frac{u'}{1+u^2}$$

$$19) \frac{d}{dx} (\operatorname{arcsec} u) = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$20) \frac{d}{dx} (\operatorname{arccosec} u) = - \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$21) \frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \log_a e$$

$$22) \frac{d}{dx} (L u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$23) \frac{d}{dx} (a^u) = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot L a$$

$$24) \frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

#### XIV) Ejercicios

$$1) y = x^{2/3} + 3x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2) y = \sqrt{\frac{2}{x}} + x^5 - \frac{1}{x^4}$$

$$3) y = \frac{1}{x} \cotg^2 x$$

$$4) y = \frac{\cos 3x}{4x}$$

$$5) y = \cos 3x \cdot \cotg 3x$$

$$6) \quad y = x^2 \cdot \operatorname{sen}^3 (4x)$$

$$7) \quad y = \operatorname{arc} \cos \sqrt{x}$$

$$8) \quad y = \operatorname{arc} \cotg \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$9) \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{2}{x-1}$$

$$10) \quad y = \operatorname{arc} \sec (3x - 5)$$

$$11) \quad y = \left[ \operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2 \right]^3$$

$$12) \quad y = L(3x + 7)$$

$$13) \quad y = L \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$14) \quad y = L \left[ \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$15) \quad y = L \sqrt{x}$$

$$16) \quad y = e^{-x}$$

$$17) \quad y = e^{\operatorname{sen} x}$$

$$18) \quad y = x \cdot e^{\operatorname{tg} x}$$

$$19) \quad y = 3^x$$

$$20) \quad y = 2^{x^2}$$

DERIVADAS LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES1) Derivada logarítmicaSea  $y = \log_a x$ 

$$\therefore y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$$

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$\Delta y = \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

y será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

Multiplicando numerador y denominador por  $x$  se obtiene :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

o sea

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

para calcular ese límite, hagamos  $t = \frac{x}{\Delta x}$ de modo que, cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  es  $t \rightarrow \infty$ 

y tendremos

$$\frac{1}{x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

$$\frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow \infty} \log_a \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t =$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e$$

es decir, que

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e}$$

En general, si  
es

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ y &= f(u) \end{aligned}$$

...

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} (\log_a e) \cdot \frac{du}{dx}}$$

si se toma

$a = e$  base de los logaritmos neperianos, es

$$\log_a e = \log_e e = L e = 1$$

y

$$\boxed{\frac{d}{dx}(L u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}} \quad (1)$$

Ejemplo : I)

$$y = \log_{10} (x^2 + 9)$$

$$y' = \frac{1}{x^2 + 9} \cdot 2x \cdot \log_{10} e$$

$$\boxed{y' = \frac{2x}{x^2 + 9} \cdot \log_{10} e}$$

II)

$$y = L \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$y = \frac{1}{2} [L(1+x) - L(1-x)]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{2} \frac{1-x - 1-x}{1-x^2} \quad (3)$$

$$y' = \frac{1}{1-x^2}$$

2) Observación :

Muchas veces el cálculo se simplifica utilizando el cálculo logarítmico, con solo tomar logaritmos de ambos miembros de una igualdad y aplicar luego esta derivada logarítmica; en efecto, por vía de ejemplo, sea la función

$$y = x^2$$

...

$$L y = n L x$$

tanto en el primero, como en el segundo miembro, tenemos la derivada de un logaritmo; bastará para ello aplicar la expresión (1) y tendremos

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot y \cdot \frac{1}{x}$$

y reemplazando a

$$y = x^n$$

es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n \cdot x^n}{x}$$

∴

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

fórmula ya conocida para la derivación potencial

Ejemplo

$$y = \frac{(3x^3 - 5)^5}{(x^2 - 9)^3}$$

$$Ly = 5 L ( 3x^3 - 5 ) - 3 L ( x^2 - 9 )$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{9x^2}{3x^3 - 5} - 3 \frac{2x}{x^2 - 9}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[ \frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9} \right]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^3 - 5)^5}{(x^2 - 9)^3} \left[ \frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9} \right]}$$

### 3) Derivada de la función exponencial

Sea

$$x = a^x$$

siendo a una constante. Tomamos logaritmos neperianos de ambos miembros, y se tiene :

$$Ly = xLa$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = La \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot La$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot L(a)$$

Si

$$y = a^u$$

siendo

$$u = f(x)$$

es

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot L a \cdot \frac{du}{dx}$$

Si  
sulta

a = e base de los logaritmos neperianos, re

$$y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplos : I)

$$y = e^{-x^2}$$

$$y' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$y' = 2xe^{-x^2}$$

II)

$$y = 10^{\text{sen } x}$$

$$y' = 10^{\text{sen } x} \cdot \cos x \cdot L 10$$

$$y' = \cos x \cdot 10^{\text{sen } x} \cdot L 10$$

4) Derivada de la función  $y = u^v$ 

Dada la función

$$y = u^v$$

siendo

$$u = f(x) \quad y \quad v = g(x)$$

Ambas funciones de x; tomamos logaritmos neperianos de ambos miembros y se tiene

$$Ly = v \cdot Lu$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + Lu \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[ v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + L u \cdot \frac{dv}{dx} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot u^v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot L u \cdot \frac{dv}{dx}$$

∴

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u^v) = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot L u \cdot \frac{dv}{dx}}$$

Ejemplo

$$y = x^{x^5}$$

en este caso

$$u = x$$

$$v = x^5$$

$$\frac{d}{dx}(x^{x^5}) = x^5 \cdot x^{(x^4 - 1)} \cdot 1 + x^{x^5} \cdot L x \cdot 5x^4$$

$$\frac{d}{dx}(x^{x^5}) = x^{x^4 - 1 + 5} + 5 \cdot x^{x^5 + 4} \cdot L x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^{x^5}) = x^{x^4 + 4} \cdot 5 \cdot x^{x^5 + 4} \cdot L x}$$

EJERCICIOS SOBRE DERIVADAS

Resolver los siguientes ejercicios utilizando las reglas de derivación demostradas anteriormente

1) Derivadas de función de función

Si  $y = f(u)$  siendo  $u = \varphi(x)$

es

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$1) \quad y = (3x + 4)^{5/2}$$

$$y' = \frac{15}{2} (3x + 4)^{3/2}$$

$$2) \quad y = (x^2 + 2x + 5)^{-3/5}$$

$$y' = -\frac{3}{4} x^{-7/4} + 2x^{-2/3}$$

$$3) \quad s = t^3(t^2 + 1)^{3/2}$$

$$y' = 3t^2 (2t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1}$$

$$4) \quad y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x}$$

$$y' = \frac{18}{4x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$$

$$5) \quad y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y' = -\frac{18}{(x^2 - 9)^{3/2}}$$

2) Derivadas de orden superior

1) Calcular la  $\frac{d^5 y}{dx^5}$  de  $y = x^5 + 3x^3 - x$

$$R = 5$$

2) Calcular la

2) Calcular la  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  de  $y = \sqrt{x^2 - 4}$

$$R = \frac{4}{(x^2 - 4)^{3/2}}$$

3) Idem de  $S = \frac{\sqrt{3t + 4}}{t}$

$$R = \frac{3t^2 + 16}{t^4}$$

### 3) Derivadas de las funciones trigonométricas

#### a) funciones directas

$$y = \operatorname{sen} x \quad y' = \cos x \quad y = \operatorname{cosec} x \quad y' = -\operatorname{cosec} x \cotg x$$

$$y = \cos x \quad y' = -\operatorname{sen} x \quad y = \sec x \quad y' = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$y = \operatorname{tg} x \quad y' = \sec^2 x \quad y = \cotg x \quad y' = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$1) \quad y = \operatorname{sen}^4 x \quad y' = 4 \cos 4x$$

$$2) \quad y = \operatorname{tg} (3x^2) \quad y' = 6x \sec^2 (3x^2)$$

$$3) \quad y = \sec \left( \frac{x}{2} \right) \quad y' = \frac{1}{2} \sec \left( \frac{x}{2} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$4) \quad y = \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad y' = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$5) \quad y = \operatorname{cosec} x^3 \quad y' = 3x^2 \operatorname{cosec} x^3 \cotg x^3$$

$$6) \quad y = \operatorname{tg}^4 3\varphi \quad y' = \frac{12 \operatorname{sen}^3 3\varphi}{\cos^5 3\varphi}$$

$$7) \quad y = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi \quad y' = \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi + \operatorname{sen} \varphi$$

$$8) \quad y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{1 + \operatorname{sen} 3x} \quad y' = \frac{3 \cos 3x}{(1 + \operatorname{sen} 3x)^2}$$

$$9) \quad y = \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \quad y' = -\frac{2 \operatorname{sen} 2x}{(1 + \operatorname{sen}^2 x)^2}$$

$$10) \quad y = \sqrt{\frac{\operatorname{cosec} x + \cotg x}{\operatorname{cosec} x - \cotg x}} \quad y' = -\operatorname{cosec} x (\cotg x + \operatorname{cosec} x)$$

b) funciones inversas

$$y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctg x$$

$$y' = \frac{1}{1+u^2}$$

$$y = \operatorname{arccotg} x$$

$$y' = -\frac{1}{1+u^2}$$

$$y = \operatorname{arccosec} x$$

$$y' = -\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \operatorname{arcsec} x$$

$$y' = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$1) y = \arcsin \left( \frac{x}{5} \right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$2) y = \arccos \left( \frac{3x}{4} \right)$$

$$y' = -\frac{3}{\sqrt{16-9x^2}}$$

$$3) y = \arctg (x^2)$$

$$y' = \frac{2x}{1+x^4}$$

$$4) y = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{x}{3}}$$

$$y' = -\frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{x(3+x)}}$$

$$5) y = \operatorname{arcsec} \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$6) y = \operatorname{arccosec} (x^3)$$

$$y' = -\frac{3}{x \sqrt{x^6-1}}$$

$$7) y = \arcsin \sqrt{x^2-1}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{3x^2-x^4-2}}$$

$$8) y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2}$$

$$9) y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x^2-3}{x^2+3}$$

$$y' = \frac{6}{9+x^2}$$

$$10) y = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

#### 4) Derivadas logarítmicas

$$y = L u$$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \log_a u$$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \log_a e \cdot \frac{du}{dx}$$

$$1) y = L (x^3 - 9)$$

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 - 9}$$

$$2) y = L (5x + 1)^3$$

$$y' = \frac{15}{5x + 1}$$

$$3) y = L \sqrt{x^2 + 16}$$

$$y' = \frac{x}{x^2 + 16}$$

$$4) y = L \operatorname{cosec}^2 x$$

$$y' = -2 \cotg x$$

$$5) y = \frac{\log_{10} x}{x}$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \log_{10} \frac{x}{x}$$

#### 5) Derivadas de las funciones exponenciales

$$y = a^u$$

$$y' = a^u \cdot L a \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \frac{du}{dx}$$

$$1) y = e^{3x}$$

$$y' = 3e^{3x}$$

$$2) y = e^{\operatorname{tg} x}$$

$$y' = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$$

$$3) y = e^{\log x}$$

$$y' = e^{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$4) y = 2^{3x}$$

$$y' = 3 \cdot 2^{3x} \cdot L2$$

$$5) y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} e^{2x}$$

$$y' = \frac{2 \cdot e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}$$

### 6) Derivada de $y = u^v$

$$y = u^v$$

$$y' = v \cdot u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \cdot Lu \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$1) y = x^{3x}$$

$$y' = 3x^{3x} (1 + Lx)$$

$$2) y = (Lx)^x$$

$$y' = \left[ 1 + (Lx) \cdot L(Lx) \right] (Lx)^{x-1}$$

$$3) y = x^{x^x}$$

$$y' = x^{(x^x + x)} \left[ \frac{1}{x} + Lx + L^2 x \right]$$

$$4) y = x^{\frac{1}{Lx}}$$

$$y' = 0$$

$$5) y = x^{x^2}$$

$$y' = x^{(x^2 + 1)} \cdot \left[ 1 + 2Lx \right]$$

c) CALCULO INTEGRAL1.-Funciones Primitivas

La determinación de la función derivada  $f(x)$ , habiendo sido dada una función  $F(x)$ , llamada primitiva, es el problema que se plantea y resuelve el cálculo diferencial. El problema inverso, vale decir, dada la función derivada  $f(x)$  encontrar la función primitiva  $F(x)$ , es el problema que resolverá el cálculo integral.

$$y = F(x) \xrightarrow{\text{cálculo diferencial}} y' = f(x)$$

$$\xleftarrow{\text{cálculo integral}}$$

En otros términos es :

$$d F(x) = f(x) dx$$

en donde la función  $F(x)$  suele llamarse primitiva, antidiferencial o integral de  $f(x) dx$ , y esto lo expresaremos mediante la notación :

$$\int f(x) dx$$

Ejemplo : La integral de  $\int x^3 dx$

decimos que es  $F(x) = \frac{x^4}{4}$

en efecto  $d[F(x)] = x^3 dx$

pero esta función derivada  $x^3 dx$  no solo admite la función integral

$\frac{x^4}{4}$ , sino aún infinitas otras que se obtienen de la anterior con so-

lo agregar un término constante  $C$ ; de modo que :

$$F_1(x) = \frac{x^4}{4} + C$$

es también una función primitiva de  $x^3 dx$ , pues

$$d \left[ F_1(x) \right] = x^3 dx$$

De aquí se deduce, que una función primitiva o integral da origen a una sola función derivada, mientras que una función derivada origina infinitas funciones integrales relacionadas entre sí por una constante.

## 2.- Constante de Integración - Significado Geométrico

Las infinitas funciones primitivas o integrales de una función derivada difieren solo por el valor de una constante. Si  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  son dos funciones primitivas de una misma función derivada  $f(x) dx$ , serán :

$$d \left[ F_1(x) \right] = d \left[ F_2(x) \right] = f(x) dx \quad (1)$$

Si designamos con  $y = F_2(x) - F_1(x)$

y representamos esta función en un sistema cartesiano, obtendremos una curva cuya tangente será :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d F_2(x)}{dx} - \frac{d F_1(x)}{dx}$$

pero por (1) es :  $\frac{dy}{dx} = 0$

vale decir que la tangente a la curva es horizontal y coincide con ella, luego

$$y = C$$

es decir,  $y = F_2(x) - F_1(x) = C$

luego, si dos funciones continuas son primitivas de la misma función diferencial, solo difieren en una constante.

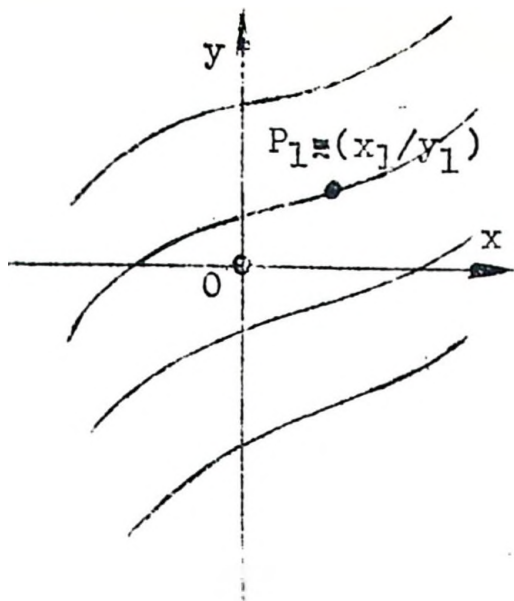
Teniendo en cuenta ésto, podremos escribir :

$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

y obtendremos todas las funciones integrales posibles .

Al escribir  $\int f(x) dx$

quedan implícitamente comprendidas todas las integrales de  $f(x) dx$ , es decir sobreentendiendo, con sus constantes, y esta función se suele llamar integral indefinida. La integral llamada definida, se estudiará más adelante.



Si se representan gráficamente las funciones primitivas en coordenadas cartesianas, obtendremos una cantidad de curvas, cuya tangente genérica en un punto de coordenadas también genéricas viene dada por

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es decir  $dy = f(x) dx$   
y cuya función integral :

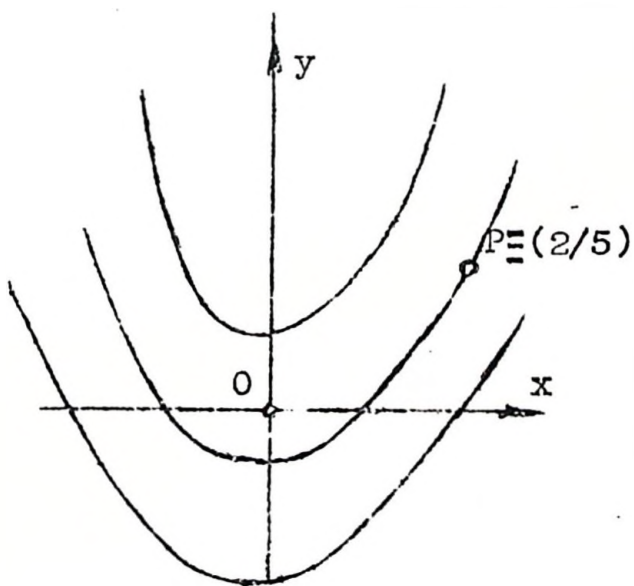
$$y = \int f(x) dx + C$$

da las ecuaciones de esas curvas.

Dando valores arbitrarios a la constante C obtendremos infinitas curvas que tienen la misma pendiente de su tangente en puntos de abscisa x. Pero si se exige que la curva pase por un punto  $P_1 = (x_1 / y_1)$  bien determinado, las coordenadas de ese punto verifican a la ecuación de la curva, y entonces la constante C puede hallarse con toda facilidad quedando determinada la ecuación de una sola curva de esa familia.

Ejemplo : La curva que pasa por el punto  $P = (2/5)$  tiene una tangente cuya pendiente vale  $2x$ .

Determinar la ecuación de esa curva.



Como  $\frac{dy}{dx} = 2x$

es  $dy = 2x dx$   
e integrando resulta :

$$y = 2 \int x dx + C$$

∴

$$y = x^2 + C \quad (2)$$

ecuación de una familia de parábolas simétricas respecto del eje y.  
Dando a C valores arbitrarios

$$C = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm \dots \pm n$$

se van a obtener las curvas siguientes :

$$y = x^2 ; y = x^2 \pm 1 ; y = x^2 \pm 2; \dots ; y = x^2 \pm n.$$

de esa familia, todas parábolas iguales y solo desplazadas vertical - mente unas de las otras.

La curva que pasa por el punto dado  $P = (2/5)$  es verificada por estas coordenadas, es decir :

$$5 = 2^2 + C \quad \therefore \quad C = 1$$

$$\therefore \quad y = x^2 + 1$$

es la ecuación de esa curva.

### 3.- Area encerrada por una curva

Consideremos, en un sistema cartesiano, la gráfica de la función continua creciente :

$$y = f(x) = x^2$$

deseamos obtener el valor del área encerrada por la curva, el eje de las  $x$ , y las dos ordenadas extremas :

$$\underline{x = 1} \quad y \quad \underline{x = 3}$$

Para ello, dividimos el intervalo  $(x_3 - x_1)$  en diez intervalos iguales, de modo que :

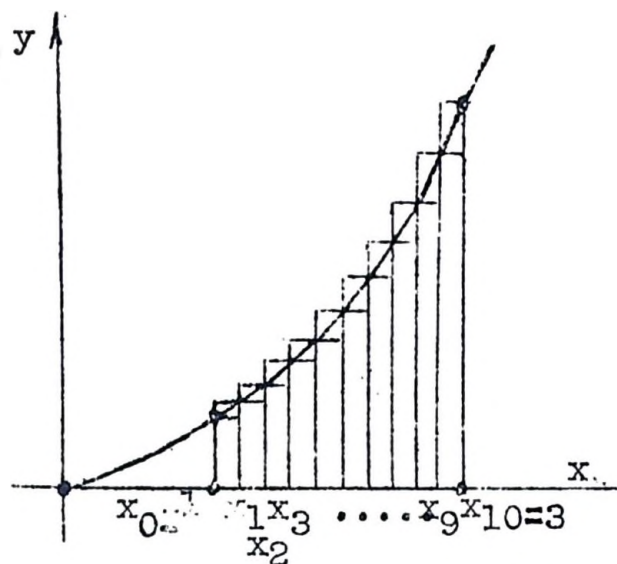
$$\Delta x = 0,1 (x_3 - x_1)$$

es decir

$$\Delta x = 0,1 \times 2$$

$$\Delta x = 0,2$$

y por lo extremos de los subintervalos levantamos las ordenadas correspondientes.-



Si

$$x_0 = 1; x_1; x_2; x_3; \dots; x_9; x_{10} = 3$$

son las abscisas de los extremos de esos intervalos, designaremos con :

$$f(x_0) ; f(x_1) ; f(x_2) \dots ; f(x_{10})$$

las ordenadas respectivas.

En los puntos en que estas ordenadas cortan a la curva, se trazan las horizontales correspondientes, quedando dividido el recinto en rectángulos que por exceso y por defecto comprenden el área buscada, y en donde se

cumple que :

$$f(x_0) \Delta x < \Delta A < f(x_1) \Delta x$$

con  $\Delta A$  se designa a un elemento del área

$$f(x_1) \Delta x < \Delta A < f(x_2) \Delta x$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$f(x_9) \Delta x < \Delta A < f(x_{10}) \Delta x$$

Efectuando la suma de las áreas parciales así obtenidas, resulta que:

$$\sum_{i=0}^9 f(x_i) \Delta x < A < \sum_{i=1}^{10} f(x_i) \Delta x$$

en donde se ha representado con  $A$  el área del recinto de la curva.

Es posible buscar el valor de estas sumas y en las tablas siguientes se los ha calculado :

$$s(10) = \sum_{i=0}^9 f(x_i) \Delta x$$

| x                                | f(x) | f(x) Δ x |
|----------------------------------|------|----------|
| 1,0                              | 1,00 | 0,200    |
| 1,2                              | 1,44 | 0,288    |
| 1,4                              | 1,96 | 0,392    |
| 1,6                              | 2,56 | 0,512    |
| 1,8                              | 3,24 | 0,648    |
| 2,0                              | 4,00 | 0,800    |
| 2,2                              | 4,84 | 0,968    |
| 2,4                              | 5,76 | 1,152    |
| 2,6                              | 6,76 | 1,352    |
| 2,8                              | 7,84 | 1,568    |
| $\sum_{i=0}^9 f(x_i) \Delta x =$ |      | 7,880    |

$$S(10) = \sum_{i=1}^{10} f(x_i) \Delta x$$

| x                                   | f(x) | f(x) Δ x |
|-------------------------------------|------|----------|
| 1,2                                 | 1,44 | 0,288    |
| 1,4                                 | 1,96 | 0,392    |
| 1,6                                 | 2,56 | 0,512    |
| 1,8                                 | 3,24 | 0,648    |
| 2,0                                 | 4,00 | 0,800    |
| 2,2                                 | 4,84 | 0,968    |
| 2,4                                 | 5,76 | 1,152    |
| 2,6                                 | 6,76 | 1,352    |
| 2,8                                 | 7,84 | 1,568    |
| 3,0                                 | 9,00 | 1,800    |
| $\sum_{i=1}^{10} f(x_i) \Delta x =$ |      | 9,480    |

$$\therefore 7,880 < A < 9,480$$

Si el intervalo  $(x_3 - x_1)$  lo hubiéramos dividido en 20 partes iguales, la longitud de cada parte sería

$$\frac{1}{20} (x_3 - x_1) = 0,1$$

con lo que se obtendría, en idéntica forma :

$$s(20) = 8,270$$

$$S(20) = 9,070$$

Si el intervalo  $(x_3 - x_1)$  lo hubiéramos dividido en 200 partes, se hubiera obtenido :

$$s(200) = 8,6267$$

$$S(200) = 8,7067$$

Si, finalmente a  $(x_3 - x_1)$  lo hubiéramos dividido en 2000 partes iguales, obtendríamos :

$$s(2000) = 8,662167$$

$$S(2000) = 8,670167$$

de modo que finalmente habremos obtenido las siguientes aproximaciones del área buscada:

$$s(10) = 7,880 < A < S(10) = 9,480$$

$$s(20) = 8,270 < A < S(20) = 9,070$$

$$s(200) = 8,6267 < A < S(200) = 8,7067$$

$$s(2000) = 8,662167 < A < S(2000) = 8,670167$$

donde se observa que a medida que aumenta el número de intervalos, éstos se hacen más pequeños, con lo cual aumenta el valor de las áreas interiores y disminuye el de los exteriores, acercándose ambas a un valor que es el área encerrada por la curva. Siempre es posible obtener que la diferencia  $S(n) - s(n)$  se haga tan pequeña como se desee para lo cual basta tomar el intervalo lo suficientemente pequeño, y en particular, cuando  $n \rightarrow \infty$  la diferencia, se hace nula y ambas sumas tienden a un límite común, que es el Área de la Curva; es decir que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = A$$

con lo que podremos escribir que :

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_i x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta_i x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_i x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta_i x$$

en cuyo caso  $n \rightarrow \infty$

El razonamiento anterior es válido por cuanto la función dada es continua y creciente, pero lo mismo sucede si la función es decreciente, pues en tal caso es :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > \dots \rightarrow f(x_n)$$

pues  $f(x_i) > f(x_{i+1})$

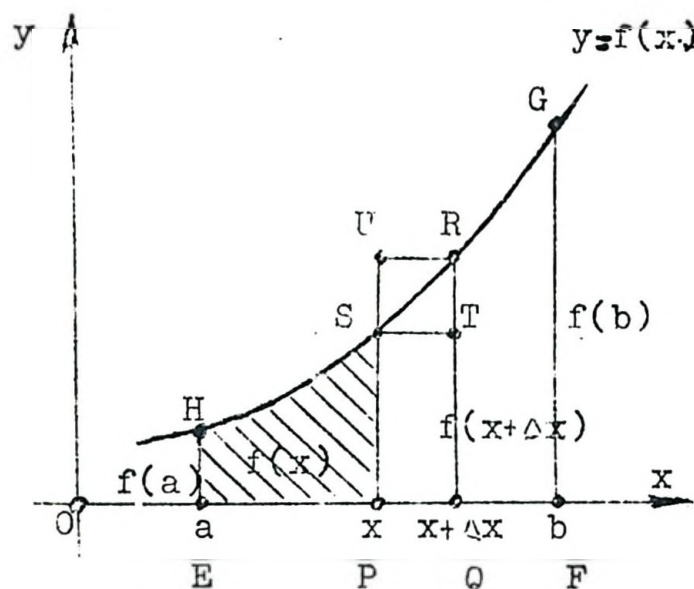
y es  $s(n) > A > S(n)$

y ambas sumas tienen el mismo límite para

$$n \rightarrow \infty$$

## La Integral Definida

Consideremos la gráfica de la función :



que suponemos continua y creciente en el intervalo

$$a \leq x \leq b$$

Si  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

son puntos interiores del intervalo  $(b-a)$  tal que :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$$

serán  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \dots \leq f(x_n)$

Calculemos el área E f G H encerrada por la curva, las dos ordenadas extremas para  $x = a$  y  $x = b$ , y el eje de abscisas.

Si P es un punto móvil del eje  $OX$  y su ordenada es  $f(x)$  el área rayada en la figura es una función de  $x$  que designamos con  $A(x)$ .

Si damos a  $x$  un incremento  $\Delta x$ , el área  $A(x)$  adquiere un incremento  $\Delta A(x)$  representado en la figura por el área del recinto P Q R S. Siendo  $f(x)$  una función continua creciente, el área del rectángulo P Q T S de base  $\Delta x$  y altura  $f(x)$  es menor que  $\Delta A(x)$  y ésta a su vez es menor que el área del rectángulo P Q R U, de altura  $f(x + \Delta x)$  y base  $\Delta x$ , es decir que :

$$f(x) \cdot \Delta x \leq \Delta A(x) \leq f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

La igualdad corresponde para el caso que  $y = f(x)$  sea una recta.

Siendo  $\Delta x \neq 0$ , dividimos por él, obteniéndose :

$$f(x) \leq \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x)$$

haciendo tender

$\Delta x \longrightarrow 0$ , será :

$$f(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x)$$

$$\Delta x \longrightarrow 0$$

$$\Delta x \longrightarrow 0$$

Como  $f(x)$  es una función continua, resulta que :

$$f(x) \Leftarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{dA}{dx}$$

$$\Delta x \longrightarrow 0$$

luego  $A(x)$  es una función cuya derivada es  $f(x)$ , o sea, que  $A(x)$  es una integral de la función  $f(x) dx$ , que escribiremos así:

$$A(x) = \int f(x) dx$$

Salvo una constante aditiva, el área queda determinada por la función  $\int f(x) dx$ ; si  $F(x)$  es también una función tal que :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$\text{es} \quad A(x) = F(x) + C \quad (1)$$

Vamos a determinar el valor de dicha constante.

Cuando  $x = a$  el área E P S H se anula, luego :

$$A(a) = F(a) + C = 0$$

$$\therefore C = -F(a)$$

y reemplazando este valor de  $C$  en (1) nos dá :

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

Si  $x = b$  es entonces :

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

Siendo  $A(b)$  el área buscada entre  $a$  y  $b$ , y como

$A(x) = \int f(x) dx$  da también del área, salvo una constante a determinar, cuyo valor  $C = -F(a)$  ya se halló, podemos escribir que :

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

expresión denominada integral definida entre  $a$  y  $b$  de la función  $f(x)$ .

Como a este mismo resultado se llega razonando con una función  $y = f(x)$  continua y decreciente, concluimos diciendo que : Si  $f(x)$  es una función continua en el intervalo  $a \leq x \leq b$  y se divide este intervalo en  $n$  subintervalos  $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \dots, \Delta_n x$ , tales que sus longitudes tiendan a cero cuando el número de ellos crezca indefinidamente y llamando con  $\xi_i$  a un punto intermedio del subintervalo genérico  $\Delta_i x$ , es :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde  $F(x)$  es una función primitiva, cuya derivada respecto a  $x$  es  $f(x)$ .

Llamamos a este límite integral definida;  $a$  y  $b$ , límites inferior y superior respectivamente de esta integral;  $a \leq x \leq b$  es el intervalo de integración;  $f(x)$  es la función integrante y  $x$  la variable de integración.

En los cálculos corrientes se usa el símbolo siguiente :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

para indicar a esta integral entre los límites  $a$  y  $b$ ; se podrá observar que la misma no es una función de  $x$ , como la integral indefinida, sino que es un número, que sólo depende de los límites de integración.

Ejemplo I : Hallar el valor de :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} = L(x+1) \Big|_0^1 = L2 - L1 =$$

$$= L2 = M \log 2 = 0,6931$$

en donde se ha indicado con

$$M = \frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{0,43429} = 2,30259$$

el módulo de la base de los logaritmos.

Ejemplo II :

Hallar el valor de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x (\cos x \, dx) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \, d(\sin x) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, d(\sin x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, d(\sin x) = \\ &= \left. \frac{1}{4} \sin^4 x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left. \frac{1}{6} \sin^6 x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{12}}$$

5.- Integral de la función potencial

Decimos que

$$\boxed{\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c} \quad (1)$$

para

$$n \neq -1$$

En efecto,

$$\frac{d}{du} \left[ \frac{u^{n+1}}{n+1} \right] = \frac{(n+1)u^n}{n+1} = u^n$$

Obsérvese que esta fórmula es válida siempre que :

$$n \neq -1$$

pues si

$$n = -1$$

es

n + 1 = 0 y la expresión (1) carece de sentido.

Si  $n = -1$  aquella se transforma en

$$\int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = Lu + C$$

pues

$$\frac{d}{du} [Lu] = \frac{1}{u}$$

en consecuencia

$$\boxed{\int \frac{du}{u} = Lu + C}$$

En este caso, se acostumbra a escribir :

$$C = Lk$$

siendo  $k$  otra constante.

$$\therefore \int \frac{du}{u} = Lu + Lk = L(ku)$$

Ejemplo : I) Calcular

$$\int (x^2 + 16)^{11} \cdot x dx$$

haciendo

$$u = x^2 + 16$$

es

$$du = 2x dx$$

luego solo falta el 2 para tener el  $du$  :

$$\begin{aligned} \therefore \int (x^2 + 16)^{11} x dx &= \frac{1}{2} \int (x^2 + 16)^{11} \cdot \underline{2x dx} = \\ &= \int (x^2 + 16)^{11} \cdot d(x^2) = \int (x^2 + 16)^{11} \cdot d(x^2 + 16) \end{aligned}$$

pues

$$d(x^2) = d(x^2 + 16)$$

ya que al agregar una constante no altera el diferencial, pues  $d(16) = 0$

Tenemos finalmente :

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 16)^{11} x dx &= \int (x^2 + 16)^{11} d(x^2 + 16) = \int u^{11} du = \\ &= \frac{u^{12}}{12} + C = \boxed{\frac{(x^2 + 16)^{12}}{12} + C} \end{aligned}$$

II) Hallar

$$\begin{aligned}
 & \int x^2 \sqrt{x^3 + 8} \, dx \\
 & \int x^2 \sqrt{x^3 + 8} \, dx = \int (x^3 + 8)^{\frac{1}{2}} x^2 \, dx = \\
 & = \frac{1}{3} \int (x^3 + 8)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 8)^{\frac{1}{2}} d(x^3) = \\
 & = \frac{1}{3} \int (x^3 + 8)^{\frac{1}{2}} d(x^3 + 8) = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = \\
 & = \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C = \\
 & = \boxed{\frac{2}{9} (x^3 + 8)^{\frac{3}{2}} + C}
 \end{aligned}$$

III) Hallar

$$\int \sin 3\varphi \cdot \cos^4 3\varphi \, d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 & \int \sin 3\varphi \cdot \cos^4 3\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{3} \int \cos^4 3\varphi \cdot \sin 3\varphi \cdot d(3\varphi) = \\
 & = \frac{1}{3} \int \cos^4 3\varphi \, d(\cos 3\varphi) = -\frac{1}{3} \int u^4 \cdot du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{u^5}{5} + C \\
 & = \boxed{-\frac{1}{15} \cos^5 3\varphi + C}
 \end{aligned}$$

IV) Hallar

$$\int \frac{5x \, dx}{x^2 + 16}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{5x \, dx}{x^2 + 16} = 5 \int \frac{x \, dx}{x^2 + 16} = \frac{5}{2} \int \frac{2x \, dx}{x^2 + 16} = \\
 & = \frac{5}{2} \int \frac{dx^2}{x^2 + 16} = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 16)}{x^2 + 16} = -\frac{5}{2} \int \frac{du}{u} = \\
 & = -\frac{5}{2} \ln u + C = -\frac{5}{2} \ln(x^2 + 16) + Lk = \\
 & = -L(x^2 + 16)^{\frac{5}{2}} + Lk = Lk - L \sqrt{(x^2 + 16)^5} = \boxed{L \left[ \frac{k}{\sqrt{(x^2 + 16)^5}} \right]}
 \end{aligned}$$

### 6.- Integral de las funciones exponenciales

$$I) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$II) \int e^u du = e^u + C$$

En efecto

$$\frac{d}{du} \left[ \frac{a^u}{\ln a} \right] = \frac{a^u}{\ln a} \cdot \cancel{\ln a} = a^u$$

$$\frac{d}{du} \left[ e^u \right] = e^u$$

Ejemplos : I) Hallar  $\int 10^{x^2} \cdot x dx$

$$\begin{aligned} \int 10^{x^2} \cdot x dx &= \frac{1}{2} \int 10^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int (10^{x^2} d(x^2)) = \\ &= \frac{1}{2} \int 10^u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^u}{\ln 10} + C = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{10^{x^2}}{\ln 10} + C} \end{aligned}$$

Ejemplo II.- Hallar  $\int x e^{-x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int x e^{-x^2} dx &= \int e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x dx) = \\ &= -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} \int e^u \cdot du = -\frac{1}{2} e^u + C = \\ &= \boxed{-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + C} \end{aligned}$$

### 7.- Integrales de las funciones trigonométricas directas

$$I) \int \sen u du = -\cos u + C$$

$$II) \int \cosen u du = \sen u + C$$

$$III) \int \sec^2 u du = \tg u + C$$

$$IV) \int \csc^2 u du = -\cotg u + C$$

$$V) \int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$$

$$VI) \int \operatorname{cosec} u \cotg u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$$

Basta para comprobarlas, derivar el segundo miembro de cada igualdad

$$VII) \int \operatorname{tg} u \, du = \int \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{cosen} u} \, du = - \int \frac{d(\cos u)}{\cos u} =$$

$$= -L \cos u + Lk = L \frac{k}{\cos u}$$

$$= \boxed{L (\sec u)}$$

VIII) Análogamente :

$$\boxed{\int \cotg u = L k \operatorname{sen} u}$$

Ejemplo I : Hallar  $\int x \operatorname{cosec}^2 (3x^2 + 1) \, dx$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \operatorname{cosec}^2 (3x^2 + 1) \, dx &= \int \operatorname{cosec}^2 (3x^2 + 1) \cdot x \, dx = \\ &= \frac{1}{6} \int \operatorname{cosec}^2 (3x^2 + 1) \cdot 6x \, dx = \frac{1}{6} \int \operatorname{cosec}^2 (3x^2 + 1) d(3x^2) \\ &= \frac{1}{6} \int \operatorname{cosec}^2 (3x^2 + 1) d(3x^2 + 1) = \frac{1}{6} \int \operatorname{cosec}^2 u \, du \\ &= \frac{1}{6} \cotg u + C = \boxed{-\frac{1}{6} \cotg (3x^2 + 1) + C} \end{aligned}$$

Ejemplo II) : Hallar  $\int \sec^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{\varphi} \right) \, dx$

$$\begin{aligned} \int \sec^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{\varphi} \right) \, dx &= 2 \int \sec^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{\varphi} \right) \cdot \frac{1}{2} \, dx = \\ &= 2 \int \sec^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{\varphi} \right) \cdot d \left( \frac{x}{2} \right) = \\ &= 2 \int \sec^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{\varphi} \right) d \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{\varphi} \right) = 2 \int \sec^2 u \, du = \\ &= 2 \operatorname{tg} u + c = \boxed{2 \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{\varphi} \right) + c} \end{aligned}$$

Ejemplo III : Hallar

$$\int \frac{\sec \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{\sec \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sec \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} =$$

$$= 2 \int \sec \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x} d(\sqrt{x}) = 2 \int \sec u \operatorname{tg} u \cdot du =$$

$$= 2 \sec u + C = \boxed{2 \sec \sqrt{x} + C}$$

...t"A"

8) Integrales de las funciones trigonométricas inversas

$$I) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$$

$$II) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\arccos \frac{u}{a} + c$$

$$III) \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + c$$

$$IV) \int \frac{du}{a^2 + u^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{u}{a} + c$$

$$V) \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$$

$$VI) \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arccosec} \frac{u}{a} + c$$

Se pueden verificar estas expresiones derivando el segundo miembro de ellas, con lo que se obtiene la función a integrar.-

Ejemplo I) Calcular  $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 25x^2}}$

se hace

$$u = 5x$$

$$du = 5 dx$$

$$dx = \frac{1}{5} du$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 25x^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}} = \frac{1}{5} \arcsin \frac{u}{4} + c = \boxed{\frac{1}{5} \arcsin \frac{5x}{4} + c}$$

Ejemplo II) Hallar  $\int \frac{dx}{11 + 7x^2}$

hacemos  $u = \sqrt{7} \quad \therefore \quad du = \sqrt{7} \, dx$

$$\therefore \quad dx = \frac{1}{\sqrt{7}} \, du$$

$$\int \frac{dx}{11 + 7x^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{du}{11 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{11}} + c$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{77}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{7}{11}} \cdot x + c}$$

Ejemplo III) Hallar  $\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 - 49}}$

hacemos  $u = 2x \quad \therefore \quad du = 2 \, dx$

$$du = \frac{1}{2} \, du$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 - 49}} = \int \frac{\frac{1}{2} \, du}{\frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - 49}} = \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - 49}} =$$

$$= \frac{1}{7} \operatorname{arc} \sec \frac{u}{7} + c = \boxed{\frac{1}{7} \operatorname{arc} \sec \frac{2}{7} x + c}$$

Ejemplo IV) Hallar  $\int \frac{dx}{\sqrt{21 + 12x - 9x^2}}$

$$21 + 12x - 9x^2 = 25 - 4 + 12x - 9x^2 = 25 - (4 - 12x + 9x^2) =$$

$$= 25 - (2 - 3x)^2 = 25 - (3x - 2)^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{21 + 12x - 9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25 - (3x - 2)^2}}$$

hacemos  $u = 3x - 2 \therefore du = 3 dx$   
 $\therefore dx = \frac{1}{3} du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - (3x-2)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{25-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsen \frac{u}{5} + c =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \arcsen \frac{3x-2}{5} + c}$$

9) Integración por partes.-

Como  $d(uv) = u dv + v du$

de allí  $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$

$\therefore uv = \int u dv + \int v du$

luego  $\boxed{u dv = uv - \int v du} \quad (I)$

Ejemplo: Hallar  $\int e^{2x} \sen x dx$

Hay que llevar la integral dada a la forma  $\int u dv$ , Para tal efecto, es:

$$\int e^{2x} \sen x dx = \frac{1}{2} \int \sen x e^{2x} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \int \sen x \cdot e^{2x} d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sen x d(e^{2x})$$

donde  $\sen x = u \quad e^{2x} = v$

Aplicamos la fórmula (1) y obtenemos:

$$\frac{1}{2} \int \underbrace{\sen x d(e^{2x})}_{u dv} = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{e^{2x} \cdot \sen x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{e^{2x} d(\sen x)}_{v du} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \sen x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x dx \quad (2)$$

Tomemos esta última integral  $\int e^{2x} \cos x \, dx$ .

Preparemos previamente a esta integral antes de aplicarle la fórmula (1), en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos x \, e^{2x} \, 2 \, dx = \frac{1}{2} \int \cos x \, e^{2x} \, d2x = \\ &= \frac{1}{2} \int \underbrace{\cos x \, d(e^{2x})}_{u \, dv} = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{e^{2x} \cos x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{e^{2x} \, d(\cos x)}_{v \, du} \right] = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

Reemplazemos esta expresión en (2) :

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin x \, dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x - \frac{1}{4} \underbrace{\int e^{2x} \sin x \, dx}_{(3)} + C' \end{aligned}$$

Observemos la expresión (3) y el primer miembro de esa igualdad; son iguales. Pasando este sumando al primer miembro, se obtiene:

$$\int e^{2x} \sin x \, dx + \frac{1}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C'$$

$$\frac{5}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C'$$

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + \frac{4}{5} C'$$

$$e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C$$

en donde hacemos  $C = \frac{4}{5} C'$

10) Integración de fracciones racionales, -

Trataremos el caso más sencillo, aquel en el que el denominador es un polinomio  $P_n(x)$  de la forma  $ax^2 + bx + c$ . Se descompone  $P_n(x)$  en el producto de dos factores:  $(x - \alpha)(x - \beta)$  en el que  $\alpha$  y  $\beta$  son las raíces del trinomio del denominador. Cada factor se supone igual a una fracción parcial de la forma  $\frac{A}{x - \alpha}$  donde A es una constante a determinar. Integrando cada fracción se obtiene:

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \log(x - \alpha) + C$$

Ejemplo:      Calcular       $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 6} dx$

Haciendo       $x^2 + x - 6 = 0$

$$\text{es } x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\therefore \alpha = 2 \quad \beta = -3$$

luego       $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

En consecuencia:

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 6} dx = \int \frac{2x + 1}{(x-2)(x+3)} dx = \int \frac{A}{x-2} dx + \int \frac{B}{x+3} dx \quad (1)$$

para calcular A y B hacemos:

$$\frac{2x + 1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\therefore 2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 2)$$

Si hacemos  $x = 2$  se obtiene :

$$5 = 5A$$

$$\therefore \boxed{A = 1}$$

para  $x = -3$  se obtiene :

$$-5 = -5B$$

$$B = 1$$

Reemplazando estos valores en (1), será :

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx = \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+3} dx =$$

$$= L(x-2) + L(x+3) + C$$

hacemos  $C = Lk$  donde  $k$  es también

una constante, se obtiene:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx = L(x-2) + L(x+3) + Lk$$

$$= L \left[ k(x-2)(x+3) \right]$$

# CALCULO INTEGRAL

## -Ejercicios-

### a) Cálculo de diferenciales

Calcular al diferencial de cada una de las siguientes funciones:

$$\boxed{dy = y' dx}$$

1)  $y = x^4 - 7x^3 + 6$

R:  $dy = (4x^3 - 21x^2) dx$

2)  $y = (3x^3 - 8)^{4/3}$

R:  $dy = 12x^2 (3x^3 - 8)^{1/3}$

3)  $s = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

R:  $ds = \frac{4r dr}{(r^2 + 1)^2}$

4)  $y = \sqrt{\cotg x}$

R:  $dy = - \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2 \sqrt{\cotg x}} dx$

5)  $y = L \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)$

R:  $dy = \operatorname{cosec} x dx$

### b) Integral de la potencia de una función

$$\boxed{u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C}$$

1)  $\int (17x^4 - 6x^2 + \frac{5}{x}) dx$

R:  $= \frac{17}{5} x^5 - 2x^3 + 5 \log x + c$

2)  $\int (x^2 + 16)^2 x dx$

R:  $= \frac{1}{6} (x^2 + 16)^3 + c$

3)  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 8} dx$

R:  $= \frac{2}{9} (x^3 + 8)^{3/2} + c$

4)  $\int \operatorname{sen} 3\varphi \cos^4 3\varphi d\varphi$

R:  $= \frac{1}{15} \cos^5 3\varphi + c$

5)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$

R:  $= \sqrt{2x+5} + c$

$$6) \int \frac{5x \, dx}{x^2 + 16} \quad R = \frac{5}{2} L(x^2 + 16) + c$$

$$7) \int \frac{(2x + 1) \, dx}{x^2 + x + 3} \quad R = L(x^2 + x + 3) + c$$

$$8) \int \frac{\sin 2\alpha \, d\alpha}{\cos^4 2\alpha} \quad R = -\frac{1}{6 \cos^3 2\alpha} + c$$

$$9) \int \frac{Lx \, dx}{x} \quad R = \frac{1}{2} L^2 x + c$$

$$10) \int e^x (1 + e^x)^3 \, dx \quad R = \frac{1}{4} (1 + e^x)^4 + c$$

c) Integral de la función exponencial

$$I) \int e^u \, du = e^u + c$$

$$II) \int a^u \, du = \frac{a^u}{L a} + c = a^u \log_a e + c$$

$$1) \int e^{2x} \, dx \quad R = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

$$2) \int x e^{-x^2} \, dx \quad R = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

$$3) \int \frac{e^x \, dx}{1 + e^x} \quad R = L(1 + e^x) + c$$

$$4) \int e^{1-4x} \, dx \quad R = -\frac{1}{4} e^{1-4x} + c$$

$$5) \int e^{\sin x} \cos x \, dx \quad R = e^{\sin x} + c$$

$$6) \int \frac{e^{2x} \, dx}{4 + e^{2x}} \quad R = \frac{1}{2} L(4 + e^{2x}) + c$$

$$7) \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx \quad R = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

$$8) \int e^{\operatorname{tg} 2\alpha} \sec^2 2\alpha \, d\alpha \quad R = \frac{1}{2} e^{\operatorname{tg} 2\alpha} + c$$

$$9) \int 10^{x^2} \cdot x \, dx \quad R = \frac{1}{2} 10^{x^2} \log_{10} e + c$$

$$10) \int 10^{\cotg 3\psi} \operatorname{cosec}^2 3\psi \, d\psi \quad R = -\frac{1}{3} 10^{\cotg 3\psi} + c$$

d) Integrales de las funciones trigonométricas

$$I) \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + c$$

$$II) \int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c$$

$$III) \int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + c$$

$$IV) \int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cotg u + c$$

$$V) \int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + c$$

$$VI) \int \operatorname{cosec} u \cotg u \, du = -\operatorname{cosec} u + c$$

$$1) \int \operatorname{sen} 4x \, dx \quad R = -\frac{1}{4} \cos 4x + c$$

$$2) \int \sec^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) dx \quad R = 2 \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + c$$

$$3) \int x \operatorname{cosec}^2 (3x^2 + 1) \, dx \quad R = -\frac{1}{6} \cotg (3x^2 + 1) + c$$

$$4) \int \frac{\sec \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx \quad R = 2 \sec \sqrt{x} + c$$

$$5) \int x \operatorname{sen} x^2 \, dx \quad R = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

$$6) \int e^x \cos e^x \, dx \quad R = \operatorname{sen} e^x + c$$

$$7) \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx \quad R = \frac{1}{\cos x} + c$$

$$8) \int x \operatorname{sen}^2 x^2 \cdot \cos x^2 dx \quad R = \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3 x^2 + c$$

$$9) \int \operatorname{tg} 3\varphi \sec^2 3\varphi d\varphi \quad R = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 3\varphi + c$$

$$10) \int \operatorname{sen} 3\beta \cos^5 3\beta d\beta = -\frac{1}{18} \cos^6 3\beta + c$$

e) Integración por partes

$$u dv = u v - \int v du$$

$$1) \int x \operatorname{sen} 2x dx \quad R = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + c$$

$$2) \int e^{2x} \operatorname{sen} x dx \quad R = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + c$$

$$3) \int Lx dx \quad R = x (Lx - 1) + c$$

$$4) \int x e^x dx \quad R = e^x (x - 1) + c$$

$$5) \int x \sec^2 x dx \quad R = x \operatorname{tg} x + L(\cos x) + c$$

$$6) \int x Lx dx \quad R = \frac{1}{2} x^2 \left[ Lx - \frac{1}{2} \right] + c$$

$$7) \int x^2 e^{3x} dx \quad R = \frac{1}{9} e^{3x} (x^2 + 1) + c$$

f) Integración de funciones racionales

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 2x} \quad R = \frac{1}{3} L \frac{x}{x+3} + c$$

$$2) \int \frac{dx}{x^2 - 9} \quad R = \frac{1}{6} L \frac{x-3}{x+3} + c$$

$$3) \int \frac{x dx}{x^2 - 6x - 7} \quad R = \frac{1}{8} L \left[ (x-7)^7 (x+1) \right] + c$$

- DISTRIBUCIONES TEORICAS -1.- Generalidades

Las distribuciones de frecuencia cuyos datos son extraídos de la observación, se los sustituye teóricamente, para su estudio, por distribuciones de ciertos colectivos, que se ajustan a ciertas hipótesis, obteniéndose las denominadas distribuciones teóricas.-

En la Estadística Matemática hay tres distribuciones teóricas clásicas, a saber:

a) la binomial, debida a Santiago Bernonilli (1654-1705) conocida con el nombre de Esquema de Bernonilli y obtenida del estudio del problema de las pruebas repetidas.

b) la normal debida a Abraham De Moivre (1667-1754) obtenida como forma límite de la distribución binomial cuando el número de pruebas tiende al infinito. Su estudio fué completado por Pedro Simón de Laplace (1749-1827).

c) la de Poisson, debida a Simeón Denis Poisson (1781-1840) que la publicó en 1837.-

Estas tres han servido como punto de partida para el estudio de otras distribuciones descubiertas durante el siglo XIX.-

2.- Distribución binomial2.1.- Problema de las pruebas repetidas

Supongamos que en una urna se han colocado un cierto número  $n$  de bolas blancas y negras. Sea  $p$  la probabilidad de sacar una bola blanca de la urna y  $q$  la de sacar una bola negra. Se saca una bola de la urna, se anota su color y se vuelve a reponer en ella, y lo mismo se hace con las sucesivas bolas que se extraigan, con lo que la composición de la urna permanece invariable en cada nueva extracción, es decir, que las probabilidades  $p$  y  $q$  son constantes de prueba a prueba.-

Supongamos que se hacen  $n$  extracciones y el suceso esperado  $E$  ha aparecido:

$\cup = 0; 1; 2; \text{-----}; n$  veces

y el suceso contrario  $F$  :

$n ; n-1 ; n-2 ; \text{-----}; 0$  veces

se tienen  $n+1$  eventualidades o combinaciones posibles, que indicaremos así :

$E^0 F^n ; E^1 F^{n-1} ; E^2 F^{n-2} ; \text{-----} ; E^n F^0$

Designemos con  $P_0 ; P_1 ; P_2 ; \text{-----} ; P_n$  la probabilidad de que el suceso favorable  $E$  se presente  $0; 1; 2; \text{-----}; n$  veces, es decir, que  $E$  tome los valores  $0; 1; 2; \text{-----}; n$  y sea  $P$ , genéricamente, la probabilidad de que este suceso se presente  $\cup$  veces en las  $n$  pruebas; siendo  $\cup$  un número entero y positivo que puede tomar uno cualquiera de los  $n+1$  valores que tiene  $E$ . Deseamos averiguar la probabilidad  $P_\cup$  de extraer un cierto número  $\cup \leq n$  fijado, de bolas blancas y  $n-\cup$  de bolas negras.-

Se ha fijado el orden de presentación del suceso  $E$  y del  $F$ , por ejemplo, las bolas blancas deberán presentarse en las  $\cup$  primeras pruebas y las bolas negras en las  $n-\cup$  restantes, la probabilidad de estos dos sucesos se obtiene aplicando el principio de las probabilidades compuestas.-

La probabilidad de que el suceso E (extracción de una bola blanca) se presente en la primera extracción es  $p$ , y como la misma permanece constante en las sucesivas extracciones, dicha probabilidad buscada será

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{(v) \text{ veces}} = p^v$$

La probabilidad de que en la  $v+1$  extracción salga una bola negra (suceso desfavorable F) es  $q$  y como ésta es invariable a partir de la extracción  $v+1$  en adelante, los sucesos desfavorables tendrán las mismas probabilidades, de modo que:

$$\underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(n-v) \text{ veces}} = q^{n-v}$$

El suceso esperado tiene una sola forma de cumplirse, vale decir, saliendo bolas blancas en las  $v$  primeras extracciones y bolas negras en las  $n-v$  extracciones restantes. Por el principio de las probabilidades compuestas, la probabilidad pedida es:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_v \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-v} = p^v \cdot q^{n-v}$$

Pero esta es también la probabilidad de sacar  $v$  bolas blancas y  $n-v$  bolas negras en cualquier otro orden prefijado, pues el razonamiento es el mismo. En efecto, si fijáramos como orden de aparición que las  $n-v$  primeras bolas fueran negras y las  $v$  restantes sean blancas, la probabilidad pedida es:

$$\underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-v} \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_v = q^{n-v} \cdot p^v = p^v \cdot q^{n-v}$$

En forma análoga, si se fija un orden alternado de obtener bolas blancas y negras hasta obtener  $v$  blancas y luego todas negras, su probabilidad sería:

$$\underbrace{p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot \dots \cdot p \cdot q}_{2v} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-2v} = p^v \cdot q^v \cdot q^{n-2v} = p^v \cdot q^v$$

Y lo mismo sucede para cualquier otro orden de presentación del suceso deseado.-

Suponiendo indiferente este orden de presentación de las bolas blancas y negras, el total de los modos de aparición que podemos formar es igual al número de combinaciones de  $n$  elementos tomados de  $v$  en  $v$ , o sea  $C_n^v$ . Por el principio de las probabilidades totales, la probabilidad buscada es:

$$P_v = C_{n,p}^v q^{n-v}$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que arrojando 100 veces una moneda, obtengamos 60 veces el suceso cara.-

La probabilidad elemental de que salga cara o cruz es :

$$p = q = \frac{1}{2}$$

$$P_{60} = C_{100}^{60} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{60} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \frac{100!}{60! 40!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$P_{60} = \frac{933.262 \times 10^{152}}{832.099 \times 10^{76} \times 815.915 \times 10^{42}} \cdot \frac{1}{2^{100}}$$

$$P_{60} = \frac{933.262}{832.099 \times 815.915} \cdot 10^{152-76-42} \cdot \frac{1}{2^{100}}$$

$$P_{60} = \frac{933.262}{832.099 \times 815.915} \cdot 10^{34} \cdot \frac{1}{2^{100}}$$

$$P_{60} = \frac{933.262}{832.099 \times 815.915} \cdot \frac{2^{34} \cdot 5^{34}}{2^{100}}$$

$$P_{60} = \frac{933.262}{832.099 \times 815.915} \cdot \frac{5^{34}}{2^{66}}$$

$$P_{60} = 0,010844$$

valor que se ha obtenido utilizando una tabla de factoriales y una de logaritmos. Este valor se ha de encontrar más fácilmente utilizando la fórmula de De Moivre :

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

que después demostraremos .-

Observación: Como la Dra Clotilde Bula ha desarrollado este tema en sus clases de Estadística (Curso A) me limitaré a reproducir, sin demostrar, los siguientes valores característicos de este esquema:

## 2. 2.- Valor medio o Esperanza matemática

$$E \quad \bar{X} \quad n p$$

Teorema: Si un suceso tiene probabilidad constante  $p$  en cada prueba, el valor medio de veces que el suceso se verifica en  $n$  pruebas es  $np$

## 2. 3.- Desvío

Si  $Y = X - np$  es el desvío de la variable aleatoria  $X$  ; que toma los valores 1 y 0 según que en la  $i$ -ésima extracción salga bola blanca o negra; será

$$E(Y) = E(X - np) = 0$$

Teorema: La esperanza matemática del desvío es cero.-

## 2.4.- Dispersión o variancia

Siendo  $\sigma_x = \sqrt{E(Y^2)}$  la dispersión

es

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

Teorema: La dispersión del número de veces que se presenta en  $n$  pruebas un suceso, de probabilidad  $p$  constante en cada prueba, vale.

$$\sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$$

## 2.5

### Momentos

a) de orden 3

$$E(Y^3) = npq(q - p)$$

b) de orden 4

$$E(Y^4) = 3n^2p^2q^2 - 6np^2q^2 + npq$$

## 2.6 Probabilidad de un desvío fijado.

Sea  $\ell = V - np$

el desvío entre el número de veces que un suceso  $E$  se ha presentado efectivamente en una serie de  $n$  pruebas y el valor medio o esperanza matemática  $np$  de dicho número y sea  $P_\ell$  la probabilidad de que el desvío tenga el valor en esa serie. Dicha probabilidad es el valor  $y_V$  para que el suceso  $E$  se presente  $V = np + \ell$  veces y  $F$  se presente  $nq - \ell$  veces. En consecuencia, es:

$$P_\ell = \frac{n!}{V! (n-V)!} p^V q^{n-V}$$

siendo

$$V = np + \ell$$

y 
$$n-V = n - np - \ell = n(1-p) - \ell = nq - \ell$$

es

$$P_\ell = \frac{n!}{(np + \ell)! (nq - \ell)!} p^{np + \ell} \cdot q^{nq - \ell} \quad (1)$$

en donde se puede demostrar que:

$$np - q \leq V \leq np + p$$

es decir

$$np - q \leq np + \ell \leq np + p$$

$$-q \leq \ell \leq +p$$

limitación que se anula para  $np = \text{entero}$ , es decir, la desviación más probable es uno de los dos valores de  $\ell$  más próximos a cero que hacen entera a la expresión  $V = np + \ell$ ; se suele decir que:

El desvío más probable es nulo, y un desvío de signo dado, es tanto menos probable cuanto mayor es su valor absoluto.

Si  $\ell = V - np = 0$

vale decir, el desvío es nulo, la fórmula (1) se reduce a:

$$P_0 = \frac{n!}{(np)! (nq)!} p^{np} \cdot q^{nq} \quad (2)$$

## 2.7 Necesidad de la búsqueda de una fórmula aproximada.

Las fórmulas (1) y (2) de 2.6 que dan la probabilidad de un desvío  $\ell$  en  $n$  pruebas, no se prestan para consideraciones teóricas y me

nos para consideraciones prácticas, debido a la presencia de los factoriales en el segundo miembro, cuyo cálculo se hace engorroso cuando se trata de factoriales de números superiores a los diez primeros naturales, como se ha podido observar en el ejemplo de 2,1, surge de aquí la necesidad de simplificar esta expresión, buscando otra de más fácil manejo y que permita hacer los cálculos convenientemente.

La fórmula que hallaremos permite sustituir una fórmula exacta, pero incómoda, por otra más cómoda, pero no exacta. Tal inconveniente queda salvado cuando esta segunda fórmula es usada entre límites convenientes.

La ventaja teórica que se obtiene al sustituir una fórmula por la otra, es la de hacer un estudio teórico más claro, por cuanto aún siendo la segunda aproximada presenta la característica de tener por límite la fórmula exacta.

En la práctica, al usar la segunda fórmula no exacta, se comete un error, que por ser de escasa magnitud, como veremos, puede despreciarse sin inconvenientes.

## 2.8 FORMULA DE WALLIS

Descubierta por John Wallis (1616-1703) aparece en su obra Arithmetica infinitorum publicada en 1655.

Siendo  $\frac{\text{sen } x \leq 1}{\text{de variación elegido}}$  en un punto genérico del intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$  se podrá decir que

$$\text{sen}^{2n+1} x < \text{sen}^{2n} x < \text{sen}^{2n-1} x$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n-1} x \, dx \quad (1)$$

siempre que  $n$  sea entero y positivo.

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n-1} x \cdot \text{sen } x \, dx = - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n-1} x \cdot d(\cos x)$$

aplicamos a esta integral la regla de integración por partes

$$\int u \, dv = u v - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} x \, dx &= - \left[ \text{sen}^{2n-1} x \cdot \cos x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot d(\text{sen}^{2n-1} x) \\ &= \text{sen}^{2n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} - (2n-1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx \end{aligned} \quad (2)$$

Calculamos separadamente cada uno de estos dos sumandos:

$$- \operatorname{sen}^{2n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2} x \, dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx$$

Sustituyendo estos valores en (2) se obtiene:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = (2n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2} x \, dx - (2n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx$$

$$\therefore 2n \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = (2n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2} x \, dx$$

o sea

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2} x \, dx \quad (3)$$

que nos da una fórmula de reducción para el cálculo de la integral del primer miembro. En efecto, dando a  $n$  los valores sucesivos de 1; 2; 3; .....  $n$ , se obtiene:

$$(n): \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2} x \, dx$$

$$(n-1): \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2} x \, dx = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-4} x \, dx$$

$$(n-2): \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-4} x \, dx = \frac{2n-5}{2n-4} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-6} x \, dx$$

.....

$$(1): \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Multiplicando miembro a miembro se obtiene:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

En forma análoga se deduce que:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3} \quad (5)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx = \frac{(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3} \quad (6)$$

Sustituyendo (4) (5) (6) en (1) nos da:

$$\frac{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3} < \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3}$$

...

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n \cdot 2n}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n-1)} < \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n)}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n-1)}$$

Es decir que:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n \cdot 2n}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n-1)}$$

que es la fórmula de Wallis.

## - DISTRIBUCIONES TEORICAS -

### 1.- Generalidades

Las distribuciones de frecuencia cuyos datos son extraídos de la observación, se los sustituye teóricamente, para su estudio, por distribuciones de ciertos colectivos, que se ajustan a ciertas hipótesis, obteniéndose las denominadas distribuciones teóricas.-

En la Estadística Matemática hay tres distribuciones teóricas clásicas, a saber:

a) la binomial, debida a Santiago Bernonilli (1654-1705) conocida con el nombre de Esquema de Bernonilli y obtenida del estudio del problema de las pruebas repetidas .

b) la normal debida a Abraham De Moivre (1667-1754) obtenida como forma límite de la distribución binomial cuando el número de pruebas tiende al infinito. Su estudio fué completado por Pedro Simón de Laplace (1749-1827).

c) la de Poisson, debida a Simeón Denis Poisson (1781-1840) que la publicó en 1837.-

Estas tres han servido como punto de partida para el estudio de otras distribuciones descubiertas durante el siglo XIX.-

### 2.- Distribución binomial

#### 2.1.- Problema de las pruebas repetidas

Supongamos que en una urna se han colocado un cierto número  $n$  de bolas blancas y negras. Sea  $p$  la probabilidad de sacar una bola blanca de la urna y  $q$  la de sacar una bola negra. Se saca una bola de la urna, se anota su color y se vuelve a reponer en ella, y lo mismo se hace con las sucesivas bolas que se extraigan, con lo que la composición de la urna permanece invariable en cada nueva extracción, es decir, que las probabilidades  $p$  y  $q$  son constantes de prueba a prueba.-

Supongamos que se hacen  $n$  extracciones y el suceso esperado  $E$  ha aparecido:

$$j = 0; 1; 2; \text{-----}; n \text{ veces}$$

y el suceso contrario  $F$  :

$$n; n-1; n-2; \text{-----}; 0 \text{ veces}$$

se tienen  $n+1$  eventualidades o combinaciones posibles, que indicaremos así :

$$E^0 F^n; E^1 F^{n-1}; E^2 F^{n-2}; \text{-----}; E^n F^0$$

Designemos con  $P_0; P_1; P_2; \text{-----}; P_n$  la probabilidad de que el suceso favorable  $E$  se presente 0; 1; 2; ----;  $n$  veces, es decir; que  $E$  tome los valores 0; 1; 2; -----  $n$  y sea  $P_j$ , genéricamente, la probabilidad de que este suceso se presente  $j$  veces en las  $n$  pruebas; siendo  $j$  un número entero y positivo que puede tomar uno cualquiera de los  $n+1$  valores que tiene  $E$ . Deseamos averiguar la probabilidad  $P_j$  de extraer un cierto número  $j \leq n$  fijado, de bolas blancas y  $n-j$  de bolas negras.-

Se ha fijado el orden de presentación del suceso  $E$  y del  $F$ , por ejemplo, las bolas blancas deberán presentarse en las  $j$  primeras pruebas y las bolas negras en las  $n-j$  restantes, la probabilidad de estos dos sucesos se obtiene aplicando el principio de las probabilidades compuestas.-

La probabilidad de que el suceso E (extracción de una bola blanca) se presente en la primera extracción es  $p$ , y como la misma permanece constante en las sucesivas extracciones, dicha probabilidad buscada será

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{(\nu \text{ veces})} = p^\nu$$

La probabilidad de que en la  $\nu + 1$  extracción salga una bola negra (suceso desfavorable F) es  $q$  y como ésta es invariable a partir de la extracción  $\nu + 1$  en adelante, los sucesos desfavorables tendrán las mismas probabilidades, de modo que:

$$\underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(n - \nu) \text{ veces}} = q^{n - \nu}$$

El suceso esperado tiene una sola forma de cumplirse, vale decir, saliendo bolas blancas en las  $\nu$  primeras extracciones y bo las negras en las  $n - \nu$  extracciones restantes. Por el principio de las probabilidades compuestas, la probabilidad pedida es:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{\nu} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n - \nu} = p^\nu \cdot q^{n - \nu}$$

Pero esta es también la probabilidad de sacar  $\nu$  bolas blancas y  $n - \nu$  bolas negras en cualquier otro orden prefijado, pues el ra zonamiento es el mismo. En efecto, si fijáramos como orden de aparición que las  $n - \nu$  primeras bolas fueran negras y las  $\nu$  restantes sean blancas, la probabilidad pedida es:

$$\underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n - \nu} \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{\nu} = q^{n - \nu} \cdot p^\nu = p^\nu \cdot q^{n - \nu}$$

En forma análoga, si se fija un orden alternado de obtener bolas blancas y negras hasta obtener  $\nu$  blancas y luego todas negras, su probabilidad sería:

$$\underbrace{p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot \dots \cdot p \cdot q}_{2\nu} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n - 2\nu} = p^\nu \cdot q^\nu \cdot q^{n - \nu} = p^\nu \cdot q^\nu$$

Y lo mismo sucede para cualquier otro orden de presentación del suceso deseado.

Suponiendo indiferente este orden de presentación de las bolas blancas y negras, el total de los modos de aparición que podemos formar es igual al número de combinaciones de  $n$  elementos tomados de  $\nu$  en  $\nu$ , o sea  $C_n^\nu$ . Por el principio de las probabilidades totales, la probabilidad buscada es:

$$P_v = C_{n,p}^v q^{n-v}$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que arrojando 100 veces una moneda, obtengamos 60 veces el suceso cara.-

La probabilidad elemental de que salga cara o cruz es :

$$p = q = \frac{1}{2}$$

$$P_{60} = C_{100}^{60} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{60} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \frac{100!}{60! 40!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$P_{60} = \frac{933.262 \times 10^{152}}{832.099 \times 10^{76} \times 815.915 \times 10^{42}} \cdot \frac{1}{2^{100}}$$

$$P_{60} = \frac{933.262}{832.099 \times 815.915} \cdot 10^{152-76-42} \cdot \frac{1}{2^{100}}$$

$$P_{60} = \frac{933.262}{832.099 \times 815.915} \cdot 10^{34} \cdot \frac{1}{2^{100}}$$

$$P_{60} = \frac{933.262}{832.099 \times 815.915} \cdot \frac{2^{34} \cdot 5^{34}}{2^{100}}$$

$$P_{60} = \frac{933.262}{832.099 \times 815.915} \cdot \frac{5^{34}}{2^{66}}$$

$$P_{60} = 0,010844$$

valor que se ha obtenido utilizando una tabla de factoriales y una de logaritmos. Este valor se ha de encontrar más fácilmente utilizando la fórmula de De Moivre:

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

que después demostraremos .-

Observación: Como la Dra Clotilde Bula ha desarrollado este tema en sus clases de Estadística (Curso A) me limitaré a reproducir, sin demostrar, los siguientes valores característicos de este esquema:

## 2. 2.- Valor medio o Esperanza matemática

$$E \quad \bar{x} \quad n p$$

Teorema: Si un suceso tiene probabilidad constante  $p$  en cada prueba, el valor medio de veces que el suceso se verifica en  $n$  pruebas es  $np$ .

## 2. 3.- Desvío

Si  $Y \approx X - np$  es el desvío de la variable aleatoria  $X$ ; que toma los valores  $1$  y  $0$  según que en la  $i$ -ésima extracción salga bola blanca o negra; será

$$E(Y) = E(X - np) = 0$$

Teorema: La esperanza matemática del desvío es cero.-

## 2.4.- Dispersión o variancia

Siendo  $\sigma_x = \sqrt{E(Y^2)}$  la dispersión

es

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

Teorema: La dispersión del número de veces que se presenta en  $n$  pruebas un suceso, de probabilidad  $p$  constante en cada prueba, vale.

$$\sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$$

## 2.5

### Momentos

a) de orden 3

$$E(Y^3) = npq(q - p)$$

b) de orden 4

$$E(Y^4) = 3n^2p^2q^2 - 6np^2q^2 + npq$$

## 2.6 Probabilidad de un desvío fijado.

Sea  $\ell = V - np$

el desvío entre el número de veces que un suceso  $E$  se ha presentado efectivamente en una serie de  $n$  pruebas y el valor medio o esperanza matemática  $np$  de dicho número y sea  $P_\ell$  la probabilidad de que el desvío tenga el valor en esa serie. Dicha probabilidad es el valor  $y_V$  para que el suceso  $E$  se presente  $V = np + \ell$  veces y  $F$  se presente  $nq - \ell$  veces. En consecuencia, es:

$$P_\ell = \frac{n!}{V! (n-V)!} p^V q^{n-V}$$

siendo

$$V = np + \ell$$

y 
$$n-V = n - np - \ell = n(1-p) - \ell = nq - \ell$$

es 
$$P_\ell = \frac{n!}{(np + \ell)! (nq - \ell)!} p^{np + \ell} \cdot q^{nq - \ell} \quad (1)$$

en donde se puede demostrar que:

$$np - q \leq V \leq np + p$$

es decir

$$np - q \leq np + \ell \leq np + p$$

$$-q \leq \ell \leq +p$$

limitación que se anula para  $np = \text{entero}$ , es decir, la desviación más probable es uno de los dos valores de "más próximos a cero que hacen entera a la expresión  $V = np + \ell$  ; se suele decir que:

El desvío más probable es nulo, y un desvío de signo dado, es tanto menos probable cuanto mayor es su valor absoluto.

Si  $\ell = V - np = 0$

vale decir, el desvío es nulo, la fórmula (1) se reduce a:

$$P_0 = \frac{n!}{(np)! (nq)!} p^{np} \cdot q^{nq} \quad (2)$$

## 2.7 Necesidad de la búsqueda de una fórmula aproximada.

Las fórmulas (1) y (2) de 2.6 que dan la probabilidad de un desvío  $\ell$  en  $n$  pruebas, no se prestan para consideraciones teóricas y me



Calculamos separadamente cada uno de estos dos sumandos:

$$-\sin^{2n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{II/2} = 0$$

$$\int_0^{II/2} \sin^{2n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx = \int_0^{II/2} \sin^{2n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int_0^{II/2} \sin^{2n-2} x \, dx - \int_0^{II/2} \sin^{2n} x \, dx$$

Sustituyendo estos valores en (2) se obtiene:

$$\int_0^{II/2} \sin^{2n} x \, dx = (2n-1) \int_0^{II/2} \sin^{2n-2} x \, dx - (2n-1) \int_0^{II/2} \sin^{2n} x \, dx$$

$$\therefore 2n \int_0^{II/2} \sin^{2n} x \, dx = (2n-1) \int_0^{II/2} \sin^{2n-2} x \, dx$$

o sea

$$\int_0^{II/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{II/2} \sin^{2n-2} x \, dx \quad (3)$$

que nos da una fórmula de reducción para el cálculo de la integral del primer miembro. En efecto, dando a  $n$  los valores sucesivos de 1, 2, 3, .....,  $n$ , se obtiene:

$$(n): \int_0^{II/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{II/2} \sin^{2n-2} x \, dx$$

$$(n-1): \int_0^{II/2} \sin^{2n-2} x \, dx = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{II/2} \sin^{2n-4} x \, dx$$

$$(n-2): \int_0^{II/2} \sin^{2n-4} x \, dx = \frac{2n-5}{2n-4} \int_0^{II/2} \sin^{2n-6} x \, dx$$

.....

$$(4): \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Multiplicando miembro a miembro se obtiene:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

En forma análoga se deduce que:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3} \quad (5)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx = \frac{(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3} \quad (6)$$

Sustituyendo (4) (5) (6) en (1) nos da:

$$\frac{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3} < \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3}$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n \cdot 2n}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n-1)} < \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n)}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n-1)}$$

Es decir que:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n \cdot 2n}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n-1)}}$$

que es la fórmula de Wallis.

### 3.- FORMULA DE DE MOIVRE-STIRLING

Los factoriales van aumentando muy rápidamente y su cálculo exacto resulta prácticamente imposible. Se presenta de una manera natural la cuestión de encontrar una expresión aproximada conveniente para factoriales grandes, problema que ha sido resuelto con la conocida fórmula de Stirling, aún cuando en sus líneas generales fue establecida por De Moivre en sus estudios sobre Cálculo de Probabilidades. Este último no estableció la relación entre el número

$e = 2,71828...$ , y el valor de la constante que aparecía en su fórmula, cosa que lo hizo Stirling más tarde.

Abraham De Moivre (1.667-1.754) publicó la fórmula aludida en su obra "The doctrine of chances" págs 243-254.- Phil.Trans. 27-( 1710- 1712)- Londres - 1756 y James Stirling (1692- 1770) lo hizo en su obra titulada "Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum" publicada en 1710, en Londres, pág. 135. En realidad, esta fórmula la obtiene continuando los estudios de De Moivre sobre el desarrollo en serie del logaritmo de  $N$ , como lo haremos a continuación.

La fórmula que vamos a demostrar establece una relación entre  $n! = 1.2.3.....n$  y  $n^n$ , vale decir, que

$$n! = n^n \cdot \varphi(n) \quad (1)$$

donde  $\varphi(n)$  es una función de la cual se trata de buscar un valor aproximado. Sustituyendo en (1) a  $n$  por  $n+1$ , se obtiene:

$$(n+1)! = (n+1)^{n+1} \cdot \varphi(n+1) \quad (2)$$

Dividiendo (2) por (1) resulta:

$$\frac{(n+1)^{n+1} \cdot \varphi(n+1)}{n^n \cdot \varphi(n)} = \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$\frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \frac{(n+1)!}{n!}$$

pues  $(n+1)! = 1.2.3 ..... n \cdot (n+1)$   
 $(n+1) = n! (n+1)$

$$\therefore \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = 1$$

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad (3)$$

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Haciendo tender  $n \rightarrow \infty$  en (3) es:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{1}{e} = e^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $e = 2,718182 \dots$  es la base de los logaritmos neperianos. La relación (4) nos dice que tanto  $\varphi(n)$  como  $\varphi(n+1)$  deben ser funciones de la forma exponencial. Si sustituimos a  $\varphi(n)$  por  $e^{-n}$  en una primera aproximación, tendremos que:

$$\frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}} = e^{-1}$$

La sustitución de  $\varphi(n)$  por  $e^{-n}$  es solo una aproximación; exactamente podrá escribirse que:

$$\varphi(n) = e^{-n} \cdot \Psi(n)$$

donde  $\Psi(n)$  es una nueva función incógnita. Con esta sustitución, la (1) se transforma en:

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \Psi(n) \quad (5)$$

$$\therefore (n+1)! = (n+1)^{n+1} \cdot e^{-(n+1)} \cdot \Psi(n+1)$$

que dividida por la anterior da:

$$\frac{(n+1)^{n+1} \cdot e^{-(n+1)} \cdot \Psi(n+1)}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \Psi(n)} = \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot e^{-1} \cdot \frac{\Psi(n+1)}{\Psi(n)} = \cancel{n+1}$$

$$\frac{\Psi(n+1)}{\Psi(n)} = e \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = e \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad (6)$$

Recordando ahora que:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$\therefore \log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) > 2x \quad (7)$$

en donde  $0 < x < 1$

hagamos  $x = \frac{1}{2n+1}$

$$\therefore \frac{1+x}{1-x} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+2}{2n} = 1 + \frac{1}{n}$$

luego

$$2x = \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$$

sustituyendo estos valores en (7) se obtiene:

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$$

o sea

$$1 + \frac{1}{n} > e^{\frac{1}{n + \frac{1}{2}}}$$

o bien

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}} > e \quad (8)$$

De (7) se obtiene:

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \dots$$

sustituyendo a 3; 5; 7; ... ; (2n+1) por 3, resulta:

$$\frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x} < 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{3} + \dots$$

$$\frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x} < 1 + \frac{x^2}{3} (1 + x^2 + x^4 + \dots)$$

pero  $1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$

por tratarse de una progresión geométrica de razón  $x^2$ , para  $x < 1$ ,  
cuya suma es  $\frac{1}{1-x^2}$

$$\therefore \frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x} < 1 + \frac{x^2}{3(1-x^2)} \quad (9)$$

hagamos

$$x = \frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \frac{x^2}{3(1-x^2)} = \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{3\left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]} = \frac{1}{3\left[(2n+1)^2 - 1\right]} =$$

$$= \frac{1}{3(4n^2 + 4n)} = \frac{1}{12n(n+1)}$$

Además:

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores hallados en (9) se obtiene:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

$$\therefore \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

o bien

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}} \quad (10)$$

De (8) y (10) puede escribirse que:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}} \quad (11)$$

Teniendo en cuenta la (10) y la (6), y sustituyendo a  $e$  por  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$  resulta:

$$\frac{\Psi(n+1)}{\Psi(n)} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

es decir que:

$$\frac{\Psi(n+1)}{\Psi(n)} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

o bien 
$$\frac{\Psi(n+1)}{\Psi(n)} < \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$$

o sea 
$$\frac{\Psi(n+1)}{\sqrt{n+1}} < \frac{\Psi(n)}{\sqrt{n}}$$

por consiguiente, la función

$$X(n) = \frac{\Psi(n)}{\sqrt{n}} \quad (12)$$

es decreciente y para  $n \rightarrow \infty$  tiende a un límite finito positivo que designaremos con  $X(\infty)$  y el cual calcularemos a continuación.

La función  $X(n)$  decrece muy lentamente al aumentar  $n$ ; en efecto, en la (12) es:

$$\Psi(n) = \sqrt{n} \cdot X(n)$$

que sustituida en (5) da:

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot X(n) \quad (13)$$

$$\therefore X(n) = \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n}}$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots, n$  toma los valores

$$X(1) = e = 2,718$$

$$X(2) = 2,612$$

$$X(3) = 2,577$$

$$X(4) = 2,559$$

$$X(10) = 2,528$$

$$X(20) = 2,516$$

$$\vdots$$

Como puede observarse,  $X(n)$  decrece muy lentamente, y veremos, más adelante, que

$$X(\infty) = 2,506 = \sqrt{2\pi}$$

Podemos escribir la fórmula (13) en la siguiente forma:

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot X(\infty) \quad (14)$$

cometiendo un pequeño error relativo.

Esta fórmula aproximada (14) es debida a De Moivre; la contribución de Stirling consistió en el descubrimiento del notable signifi-

o de la constante  $X(\infty)$ . Recordemos para ella la fórmula de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)} \quad (15)$$

pero

$$2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n = 2^{2n} (1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot n) = 2^{2n} \cdot (n!)^2$$

∴

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}$$

Si multiplicamos el numerador y el denominador del segundo miembro por  $2^{2n}(n!)^2$  nos da:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]^2 \cdot 2^{2n} \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1)}$$

o sea

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]^2 \cdot [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n]^2 \cdot (2n+1)}$$

en efecto:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 &= (1 \cdot 2)(2 \cdot 2) = (1 \cdot 2) \cdot 2^2 = 2! \cdot 2^2 \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 &= (1 \cdot 2 \cdot 3)(2 \cdot 2 \cdot 2) = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2^3 = 3! \cdot 2^3 \\ &\dots \dots \dots \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) \cdot 2^n = n! \cdot 2^n \\ (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^2 \cdot 2^{2n} = (n!)^2 \cdot 2^{2n} \end{aligned}$$

∴

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{[(2n)!]^2 \cdot (2n+1)}$$

Expresando los factoriales mediante la (13), tendremos:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} \cdot n^{4n} \cdot e^{-4n} \cdot n^2 \cdot [X(n)]^4}{[(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2n} \cdot X(2n)]^2 \cdot (2n+1)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2^{4n}} \cdot \cancel{n^{4n}} \cdot e^{-4n} \cdot n^2 \cdot [X(n)]^4}{(\cancel{(2n)^{4n}} \cdot e^{-2n} \cdot \cancel{2n} \cdot [X(2n)]^2 \cdot (2n+1)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(2n+1)} \cdot \frac{[X(n)]^4}{[X(2n)]^2}$$

Puesto que el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(2n) = X(\infty)$$

y además es

$$X(\infty) \neq 0$$

por ser la función  $X(n)e^{-1/2n}$  es creciente, como veremos más adelante, resulta que:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \cdot [X(\infty)]^2$$

$$X(\infty) = \sqrt{2\pi}$$

pudiéndose escribir en la fórmula aproximada (14), debida a De Moivre, que:

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \quad (16)$$

es la denominada fórmula de De Moivre-Stirling, que es una fórmula aproximada, solo exacta en el límite, cuando  $n \rightarrow \infty$ .

3.1- Cálculo del error que se comete al tomar la fórmula aproximada.

Determinemos el error que se comete al tomar la fórmula (16) para valores finitos de  $n$ .

Siendo la (16) una fórmula aproximada, podemos escribir que ella será exacta en la forma siguiente:

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot f(n) \quad (17)$$

donde  $f(n)$  es una función incógnita.

$$f(n) = \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}$$

y análogamente, se tendría:

$$f(n+1) = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1} \cdot e^{-(n+1)} \cdot \sqrt{2\pi(n+1)}}$$

$$\therefore \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{(n+1)! \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}{n! \cdot (n+1)^{n+1} \cdot e^{-(n+1)} \cdot \sqrt{2\pi(n+1)}}$$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \cancel{(n+1)} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{e^{-n}}{e^{-n} \cdot e^{-1}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi(n+1)}}$$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n}{n+1} \cdot e \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = e \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = e \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

hemos hallado en (10) que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} > e^{-1 - \frac{1}{12n(n+1)}}$$

sustituyendo en (18) resulta:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} > e^{-\frac{1}{12n(n+1)}}$$

$$\therefore f(n+1) > f(n) \cdot e^{-\frac{1}{12n(n+1)}}$$

o bien

$$f(n+1) \cdot e^{\frac{1}{12n(n+1)}} > f(n)$$

y tambien

$$f(n+1) \cdot \frac{e^{\frac{1}{12n(n+1)}}}{e^{\frac{1}{12n}}} > f(n) \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{12n}}}$$

$$f(n+1) \cdot e^{-\frac{n}{12n(n+1)}} > f(n) \cdot e^{-\frac{1}{12n}}$$

y con mayor razón

$$f(n+1) \cdot e^{-\frac{1}{12n(n+1)}} > f(n) \cdot e^{-\frac{1}{12n}}$$

lo que indica que la función

$$f(n) \cdot e^{-\frac{1}{12n}}$$

crece, a medida que aumenta  $n$ ,

Además, siendo:

$$f(n) = \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}$$

y

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot X(n) \quad \text{por la (13)}$$

es:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot X(n)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

Siendo, además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{12n}} = 1$$

es

$$f(n) = e^{-\frac{1}{12n}} < 1 \quad \text{para todo valor finito de } n$$

n

$$\therefore f(n) > 1$$

luego, podemos escribir que

$$f(n) = e^{\frac{\theta}{12n}}$$

donde

$$0 < \theta < 1$$

En consecuencia, se puede escribir la fórmula (17) de la siguiente manera:

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}$$

es decir:

$$n! = n^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n + \frac{\theta}{12n}}$$

(19)

que es la fórmula exacta

Teniendo presente que:

$$e^{\frac{1}{12n}} = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{12n}\right)^2 + \dots$$

y que, suprimiendo los factoriales es:

$$\frac{1}{e^{12n}} < 1 + \frac{1}{12n} + \left(\frac{1}{12n}\right)^2 + \dots$$

una proporción geométrica de razón  $\frac{1}{12n}$ , luego:

$$\frac{1}{e^{12n}} < 1 + \frac{\frac{1}{12n}}{1 - \frac{1}{12n}} = 1 + \frac{1}{12n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{e^{12n}} < 1 + \frac{1}{11n} \quad \text{para } n > 1$$

Se puede ahora escribir la siguiente desigualdad:

$$n! < n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{11n}\right)$$

Designemos con  $E$  al error absoluto cometido al tomar la fórmula aproximada por la exacta; será:

$$E > n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} - n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{11n}\right)$$

$$E = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} - n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n + \frac{1}{12n}}$$

$$\therefore E = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 - e^{\frac{1}{12n}})$$

que para  $n \rightarrow \infty$  aumenta hasta tomar valores extraordinariamente grandes.

En cambio, el error relativo  $\xi$  es:

$$\xi = \frac{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{11n}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{11n}\right)}$$

Si hacemos, para abreviar,  $\xi_n = \frac{1}{11n}$

$$\therefore \xi = \frac{1}{1 + \xi_n} = 1 - \xi_n + \xi_n^2 - \xi_n^3 + \dots$$

y para  $n \rightarrow \infty$  es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi = 1$$

vale decir, que para valores suficientemente grandes de  $n$ , la fórmula aproximada coincide con la exacta, y se puede escribir, con toda propiedad, que el error relativo es igual a:

$$\xi < 1 + \xi_n$$

o sea

$$\xi < 1 + \frac{1}{11n}$$

4.-

#### BIBLIOGRAFIA

- 1.- GUIDO CASTELNUOVO: Calcolo delle Probabilità - Ed. N. Zanichelli - Bologna 1947.-
- 2.- ROBERT FORTET: Calcul des Probabilités - Ed. Centre National de la Recherche Scientifique - París 1950.-
- 3.- OLEGARIO FERNANDEZ BAÑOS: Tratado de Estadística. Ed. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid 1945.-
- 4.- J.V. USPENSKY: Matemáticas de las Probabilidades - Trad. española de C. E. Prelat. Ed. Nigar - Buenos Aires 1947.-
- 5.- IVAN y ELIZABETH SOKOLNIKOFF: Matemática Superior para Ingenieros y Físicos. Trad. española de J.C. Vignaux - Ed. Nigar - Buenos Aires 1947.-
- 6.- J. BELTRAND: Calcul des Probabilités - Ed. Gauthier - Villars - París 1907.-

