

REPUBLICA



ARGENTINA

SERVICIO ESTADISTICO NACIONAL

CURSO DE

MATEMATICAS PARA NUMEROS INDICES

Profesor: Dr. MIGUEL ERREA

agosto - diciembre 1955

CENTRO DE CAPACITACION TECNICA PARA FUNCIONARIOS ESTADISTICOS

MATEMATICAS PARA NUMEROS INDICES

INTRODUCCION

12-Clase
26/8/1955

Prof. Dr. Miguel Errea

I) CONCEPTOS SOBRE EL CURSO:

El presente curso de Matemáticas para Números Índices que hoy iniciamos con los auspicios del Centro de Capacitación Técnica para Funcionarios Estadísticos del Ministerio de Asuntos Técnicos de la Nación, tiene por objeto suministrar a los señores funcionarios que asisten al mismo las bases matemáticas y técnicas indispensables para la elaboración, interpretación y uso de los números índices o indicadores.

Por tal razón lógicamente estará íntimamente vinculado con el curso sobre Teoría y Práctica de los Números Índices y lo precederá en varias clases a efectos de que al iniciarse este último los asistentes dispongan ya de algunas nociones generales indispensables para su mejor comprensión.

Ante todo debemos advertir que la Teoría de los Números Índices y las fórmulas comunmente utilizadas para la elaboración de Índices, aspectos estos que forman parte de la Estadística Metodológica, no requieren para su estudio y análisis elevados conocimientos de matemáticas sino solamente conocimientos generales de álgebra, análisis matemático, geometría analítica y estadística en general. Situación ésta distinta a la que requiere el estudio de otros tópicos de estadística matemática, como ser la Teoría de las Muestras, para cuya exacta comprensión se requiere además de completos conocimientos de análisis matemático, el profundo estudio de la estadística y del cálculo de probabilidades.

Con relación al título de este curso debemos aclarar que el estudio de la matemática es único y general: no existe en consecuencia una matemática especial para Números Índices, como no la hay para cualquier otra rama de la estadística o de las matemáticas aplicadas. Simplemente se quiere señalar con ello que dentro del estudio de la matemática, que no tiene fin, nos limitaremos a considerar aquellos aspectos que son indispensables para la perfecta interpretación de las fórmulas y procedimientos que requiere la Teoría de los Números Índices.

Consecuentemente dentro de este curso se incluirá un repaso general de matemáticas, estudiando conceptos básicos de álgebra, la aplicación de logaritmos, indispensables para la construcción de índices geométricos, nociones generales de Análisis Matemático y Geometría Analítica y los elementos de estadística matemática que sean más nece-

sarios, especialmente la teoría de los promedios. Desarrollaremos en consecuencia un programa muy general abarcando diversos tópicos no sólo de matemáticas sino de otras ramas del conocimiento vinculadas a la misma.

Con estas directivas se ha confeccionado el programa general de la asignatura que cumpliremos, en el curso.

II) NUMEROS INDICES O INDICADORES

La primera elaboración de números índices que se recuerda fué realizada por G.R. Carli quien deseaba conocer los efectos del descubrimiento de América sobre el poder adquisitivo de la moneda. Para ello consideró los precios de 3 artículos en el año 1500: granos, aceite y vino, los comparó con los precios del año 1750 en forma de porcentaje, los sumó y los dividió por tres.

A fines del siglo XIX se inician en Inglaterra y Alemania las primeras compilaciones de precios y la construcción de los primeros índices generales de precios con el propósito de analizar sus fluctuaciones. Entre los más antiguos índices corresponde señalar la serie de "The Economist" de 1869 y la de Janerbeck de 1886 para Gran Bretaña; los índices de Conrad de 1887 en Alemania y la serie de Bradstreet de 1897 en Estados Unidos.

A comienzos del presente siglo se mejora la regularidad y calidad de los índices que empiezan a ser compilados por publicaciones y especialmente por reparticiones públicas. Esto es especialmente notable en Estados Unidos con las publicaciones del Departamento de Trabajo que incluyen índices de precios y del costo de la vida con datos reconstituídos que llegan hasta el año 1840.

En nuestro país corresponde señalar entre los precursores, los índices confeccionados por la Dirección General de Estadística, el costo de la vida elaborado por el ex-Departamento Nacional de Trabajo y diversos índices generales de precios que fueron elaborados sobre bases técnicas por la antigua oficina de Investigaciones Económicas del Banco de la Nación y publicadas en la respectiva revista.

Corresponde señalar muy especialmente que las razones que han de terminado la lenta elaboración de Números Índices en todo el mundo, no residen en dificultades de orden técnico o matemático, que no tienen importancia fundamental, sino en razones de orden práctico vinculadas con obtención de precios y ponderaciones en forma regular y permanente y que sean suficientemente representativos.

Así por ejemplo consideremos un producto cualquiera como ser: la carne bovina y veamos cuáles su precio. Existe en primer término precios de la carne para la 1/2 res en gancho puesta en el Frigorífico, y que se establece por Decreto del Poder Ejecutivo. Este precio varía en función de cada clasificación de Hacienda, de cada grado de calidad tipificada y de cada escala de peso de la res. Esto determina alrededor de 40 precios diferentes.

Existen además los precios denominados Mayoristas que son los precios de venta de la carne por parte de los frigoríficos y mataderos a los carniceros, precios estos que además de las clasificaciones ante-

riores varían también por razones geográficas siendo diferentes en Buenos Aires, de La Rioja, o a veces distintos entre dos partidos o departamentos de una misma provincia.

Finalmente y en la etapa minorista rigen precios por corte: lomo, carneza, cuadril, etc. que lógicamente difieren fundamentalmente unos de otros. Este rapidísimo bosquejo nos indica que la determinación de un precio representativo para un índice no puede efectuarse sin un profundo análisis y estudio previo.

Distintas clases de índices

Las distintas clases de Números Índices que pueden elaborarse son prácticamente infinitos: así por ejemplo puede elaborarse Índices de Producción; Índices de Consumo; Índices de Exportación; Índices de Precios; Índices del Costo de la Vida, etc. y cada uno de estos admite subdivisiones distintas. Así por ejemplo puede construirse un Índice General de Precios, un índice de precios mayoristas, de precios al detalle, de productos agropecuarios, de productos de la ganadería, de la Hacienda Bovina, etc., etc.

Es indispensable en consecuencia, con carácter previo, una exacta definición de los propósitos o fines que guían la construcción del índice y la utilización de los resultados numéricos.

Bases para la elaboración de índices

Otro de los aspectos que debe contemplarse es la determinación de los productos a incluirse. Este es un aspecto difícil, principalmente en un índice del costo de la vida, ya que ciertos productos con el tiempo pierden importancia o son sustituidos por otros en el consumo familiar. En general, cuanto más productos se incluyen, más representativo será el índice.

En todos los casos las fórmulas a emplear deben facilitar la cómoda sustitución de un producto por otro, eligiendo aquellos cuyos precios puedan seguirse más fácilmente a través del tiempo. En general es recomendable que los precios de los productos incluidos se coticen en forma regular y sistemática y que se expresen en iguales magnitudes: ~~mon~~ por kilo por ejemplo, o en forma equivalente. Esto último es fundamental en el caso de construir índices no ponderados.

Período base

La elección del período base, por lo general año base, que se toma como referencia para el cálculo de un índice, expresando en función de él los precios volúmenes o valores de cada año o período y de cada uno de los productos incluidos, es un aspecto de gran importancia práctica. Dadas las fluctuaciones que se registran en los precios de año a año resulta conveniente elegir un período base relativamente próximo, para evitar una dispersión considerable en los índices individuales de cada producto.

Estadísticamente se ha demostrado en trabajos de investigación que las fluctuaciones de precios sobre bases próximas se distribuyen en forma aproximadamente normal, de acuerdo al significado de este término en cálculo de probabilidades, mientras que la comparación de precios entre 2 períodos lejanos (20 ó más años) determina fluctuaciones

irregulares. Es necesario entonces elegir un año base suficientemente próximo y en general es preferible a efectos comparativos que coincidan los años bases de todos los números índices de un país: precios, índices de producción, del costo de la vida, etc., etc. para facilitar de inmediato todo género de comparaciones,

Si este último no es factible por razones prácticas, de jurisdicción, etc., es conveniente elegir procedimientos de cálculo que posibiliten los inmediatos cambios del año base sin alterar la estructura o cálculo del índice.

Ponderación de Números INDICES

En un índice ponderado cada artículo recibe una asignación o importancia relativa, denominada ponderación que es proporcional a su influencia. Así indudablemente en un índice del costo de la vida tiene más importancia el precio del pan, de la leche o de la carne que el precio de las nueces, o de los dátiles ya que estos últimos artículos son de escasa importancia en el consumo familiar.

La elección de las ponderaciones de un índice es muy difícil, especialmente en el índice del costo de la vida, donde es necesario disponer de datos correspondientes a gastos familiares perfectamente discriminados. En tal sentido forma parte de este curso en su faz práctica la obtención de las referidas cifras obtenidas de una muestra de familias que sean perfectamente representativas.

En la obtención de estas ponderaciones debe tenerse muy en cuenta la denominada "variación estacional". Así por ejemplo si los datos obtenidos no se refieren por lo menos a un período de 1 año completo, la ponderación de algunos de los productos incluidos en el índice, podría quedar afectada. Es indudable que el consumo de combustibles, por ejemplo, es mayor en invierno que en verano, viceversa el consumo de hielo por parte de las familias es mayor en verano que en invierno; determinadas verduras o frutas solo se producen y venden en determinados meses del año, etc.

En un índice general de precios las ponderaciones pueden basarse en distintos criterios cada uno de los cuales puede hacer variar fundamentalmente la posición relativa de cada producto.

Entre los diversos criterios a aplicar pueden citarse los siguientes:

- 1) En base a la producción,
- 2) En base al consumo interno.
- 3) En base al comercio exterior.

Si se acepta el criterio 1) un producto como el café no se incluiría en el índice y la importancia del petróleo sería inferior a la cifra basada en el consumo interno. En cambio la carne tendría más importancia en base al criterio 1) que al 2) ó 3) al igual que los cereales,

Si se toma el criterio 3) los productos cuya producción se consume íntegramente en el país no tendrían importancia, ejemplo la papa y algunos cereales, frutas, etc. El café en cambio sería importante.

En consecuencia la elección del criterio a seguir para la pon

elaboración requiere un cuidadoso análisis de todos los factores y especialmente de los propósitos y fines del índice.

Fórmulas a utilizar para el cálculo de Números Índices

Otros de los aspectos fundamentales a considerar para la elaboración de un número índice es la determinación de la fórmula a emplear para su cálculo. Corresponde señalar a este respecto que cada fórmula o procedimiento de cálculo tiene distinta adaptación según la utilización y tipo de índice. Cada una de las diversas fórmulas que corrientemente se emplean para el cálculo de Números Índices goza además de determinadas propiedades y presenta en general algunas ventajas en determinados casos con respecto a sus similares.

Existen además las denominadas "pruebas de números índices" que son criterios preestablecidos sobre las condiciones y propiedades que debe llenar una determinada fórmula de Números Índices, para juzgar sobre su mayor o menor aceptabilidad.

Todos estos aspectos formaran parte fundamental del curso sobre Teoría y Práctica de los Números Índices, a iniciarse en la próxima semana y con relación al cual, este curso de Matemáticas para números índices puede considerarse como preparatorio.

Volviendo ahora al primitivo índice de Carli y utilizando una moderna notación, si indicamos por $n = 3$ el total de productos considerados, por i cada uno de ellos o sea:

- 1 : granos
- 2 : aceite
- 3 : vino

por $P_{1,0}$ el precio de los granos en el año base; (1.500) por $P_{2,0}$ el precio del aceite en igual año y por $P_{3,0}$ el del vino; por $P_{1,t}$ el precio de los granos en el año 1750, por $P_{2,t}$ el precio del aceite y por $P_{3,t}$ el del vino en el año 1750, tendremos que el cálculo realizado por Carli fué el siguiente:

Producto: i	Precio año 1750	Precio año 1500	Número Índice
granos 1	$P_{1,t}$	$P_{1,0}$	$I_1 = \frac{P_{1,t}}{P_{1,0}}$
aceite 2	$P_{2,t}$	$P_{2,0}$	$I_2 = \frac{P_{2,t}}{P_{2,0}}$
vino 3	$P_{3,t}$	$P_{3,0}$	$I_3 = \frac{P_{3,t}}{P_{3,0}}$

Resulta así

$$I_{t,0} = \frac{1}{3} (I_1 + I_2 + I_3) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,0}} \right) \quad \text{como expresión}$$

general del cálculo realizado, y la fórmula resultante es el del denominado índice aritmético no ponderado.

Para dar una idea general de las fórmulas que más corrientemente se emplean para el cálculo de Números índices vamos a indicarles en forma somera, a objeto de que Vds. dispongan de un panorama de los conocimientos matemáticos que requiere su elaboración y utilización.

Además de la fórmula anterior, puede citarse el índice aritmético ponderado donde a cada producto se le asigna una ponderación, peso, o importancia relativa que simbolizamos por q_1 - Dicha fórmula es

$$I_{t,0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n q_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,0}} \right) q_1$$

La fórmula del índice geométrico no ponderado es

$$I_{t,0} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,0}} \right)}$$

y la correspondiente al índice geométrico ponderado

$$I_{t,0} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,0}} \right)^{q_1}}$$

La expresión analítica del índice agregativo no ponderado es

$$I_{t,0} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{i,t}}{\sum_{i=1}^n P_{i,0}}$$

y la del índice agregativo ponderado

$$I_{t,0} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{i,t} q_1}{\sum_{i=1}^n P_{i,0} q_1}$$

La fórmula del índice armónico no ponderado es

$$I_{t,0} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{P_{i,0}}{P_{i,t}}}$$

y la del índice armónico ponderado

$$I_{t,0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,0}}{P_{i,t}} \right) q_i}$$

Finalmente existe el denominado Índice Ideal de Fisher cuya expresión anéltica es

$$I_{t,0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n P_{i,t} q_{i,0}}{\sum_{i=1}^n P_{i,0} q_{i,0}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n P_{i,t} q_{i,t}}{\sum_{i=1}^n P_{i,0} q_{i,t}}}$$

Como puede apreciarse en este panorama general las fórmulas para el cálculo de Números Índices, que son del tipo precedentemente señalado, no son de difícil expresión analítica. Propósito básico de nuestro curso es facilitar los conocimientos matemáticos previos para el correcto uso y aplicación de las citadas fórmulas y otras similares.

MATEMATICAS PARA NUMEROS INDICES

I.- TEORIA DE LOS NUMEROS

1. Números Enteros y Positivos

Consideramos como elemento fundamental el conjunto de los números enteros y positivos;

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Se trata de un conjunto numerable integrado por infinito número de elementos. Dado un número cualquiera n , siempre existe otro número $n+1$ que los supera.

La ausencia de toda cantidad se simboliza por cero(0).

Como axioma se admite que los números enteros formen un conjunto sin fin, es decir infinito, simbolizándose el infinito en la siguiente forma: ∞

2. Números negativos

En la vida corriente se utilizan frecuentemente números negativos. Así, si una empresa dispone de un Activo de 100.000 m\$. y un Pasivo de 80.000 m\$, el Capital es evidentemente, de 20.000 m\$. Si otra empresa en cambio, dispone de un Activo de 100.000 m\$. y un Pasivo de 120.000 m\$. -Cuál será su Capital?, evidentemente esta última empresa tendrá un déficit de 20.000 m\$, es decir un capital es de - 20.000 m\$. Análogamente una temperatura de 2° bajo cero, representa en realidad - 2°, es decir un número negativo.

Tenemos así caracterizado el conjunto numerable e infinito de los números negativos enteros:

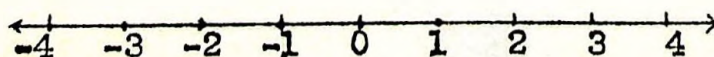
- 1, - 2, - 3, - 4, - 5, - 6, ...

La consideración simultánea de ambos conjuntos de números positivos y negativos, da origen al conjunto de números enteros que varía entre:

- ∞ e ∞

... - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, ...

Gráficamente podemos señalar la posición de cada número sobre una línea recta donde marcaremos el origen 0, y los distintos valores, eligiendo previamente como unidad de medida una determinada magnitud



3. Operaciones fundamentales. Suma y resta de números enteros.

En el conjunto de números enteros pueden realizarse diversas operaciones. Así la igualdad.

similar $1+3+4+5 = 13$ Indica la suma de números y en forma
 $P_1+P_2+P_3+P_4 = S$ Puede representar la suma de los pre-
 cios de los artículos 1, 2, 3, y 4 incluidos en un de-
 terminado índice.

Con respecto a la suma y a la resta: operación esta última que puede considerarse como Suma de números negativos, se verifican las siguientes propiedades.

a) Propiedad conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma.

$$P_1+P_2+P_3+P_4 = P_1+P_3+P_2+P_4 = P_1+P_4+P_3+P_2 = \dots$$

b) Propiedad asociativa:

$$P_1+P_2+P_3+P_4 = (P_1+P_4)+(P_3+P_2) = (P_2+P_4)+(P_1+P_3) = \dots$$

Debiendo realizarse primeramente las sumas indicadas por los paréntesis.

4. Multiplicación y división.

$$\underbrace{a+a+\dots+a}_{m \text{ veces}} = S \text{ resulta así } m \times a = S$$

es decir la suma S es igual al producto o multiplicación de los números enteros m y a .

Si $m \times a = S$ resulta como operación contraria de la multiplicación, la división $m = \frac{S}{a} = S/a$

c) Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

Sea q_0 la ponderación uniforme y constante correspondiente a los precios de los artículos 1,2,3,4. En virtud de la propiedad distributiva de la suma con respecto al producto es:

$$q_0(P_1+P_2+P_3+P_4) = q_0 P_1 + q_0 P_2 + q_0 P_3 + q_0 P_4$$

Además en la multiplicación se verifican también la propiedad conmutativa y asociativa en la siguiente forma:

$$\text{Conmutativa: } P_1 P_2 P_3 P_4 = P_2 P_3 P_4 P_1 = P_4 P_3 P_2 P_1 = \dots$$

$$\text{Asociativa: } (P_1 P_2) \times (P_3 P_4) = (P_2 \times P_3) (P_4 \times P_1) = (P_4 \times P_3) \cdot (P_2 \times P_1)$$

debiendo realizarse primeramente los productos indicados por los paréntesis.

Resulta así que el orden de los factores no altera el producto.

En forma similar, en virtud de la propiedad distributiva es:

$$h(a - b + c - d + e) = ha - hb + hc - hd + he$$

y viceversa, sacando factor común h , en la última expresión

$$ha - hb + hc - hd + he = h(a - b + c - d + e)$$

5. Números fraccionarios.

El cociente o división de números enteros da origen a los números fraccionarios.

Es así por ejemplo:

$$\frac{3}{2} = 1,5 ; \frac{4}{5} = 0,8 ; \frac{3}{4} = 0,75, \text{ etc.}$$

Existen además fracciones periódicas puras con infinito número de términos, como ser:

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$$

donde los puntos suspensivos indican que es

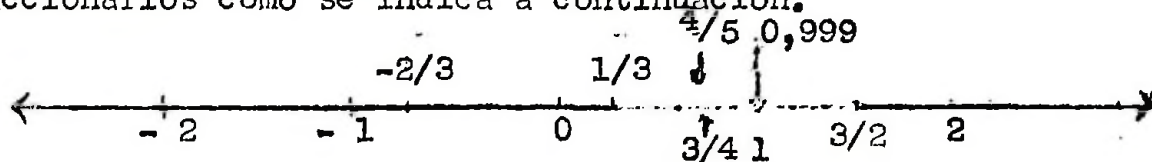
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{0,333 \dots 3}^n = \frac{1}{3}$$

En forma similar es:

$$0,999 \dots = 1$$

$$-\frac{2}{3} = 0,666 \dots \text{ etc.}$$

Dentro de la recta indefinida indicada en el punto 2 podemos marcar la colocación y el orden de cualquiera de estos números fraccionarios como se indica a continuación.



El conjunto de los números positivos y negativos, enteros o fraccionarios constituyen los denominados números reales.

6. Números irracionales.

Los números irracionales o inconmensurables son aquellos formados por infinito número de cifras decimales y que no son susceptibles de enunciarse por cociente o fracciones periódicas. Ejemplo de ellos es:

$$\sqrt{2} = 1,4142136$$

que podemos expresar con todas las cifras decimales que se quieran, pero sin llegar nunca a un resultado exacto o expresable por una fracción del tipo de $\frac{m}{n}$.

Son también irracionales las raíces cuadradas de muchos números enteros y la mayor parte de las funciones trigonométricas: senos, cosenos, tangentes, etc.

Es también inconmensurable o irracional la relación constante existente entre la circunferencia y el diámetro que se expresa por $\pi = 3,14159$ y el número e utilizado frecuentemente en el análisis matemático: $e = 2,71828$.

Desde el punto de vista de las aplicaciones los números irracionales pueden tomarse con todas las cifras decimales que se requiere para lograr una conveniente aproximación a su valor exacto.

7. Redondeo de cifras decimales.

En aplicaciones prácticas, especialmente en estadística y en publicación de datos, es necesario limitarse a un número determinado de decimales: 2, 3 y etc., suprimiendo los siguientes.

La regla práctica consiste en dejar invariable el último decimal, cuando el posterior no considerado está comprendido entre 0 y 4 inclusive, y en aumentar en una unidad el último decimal considerado, cuando el siguiente está comprendido entre 5 y 9 inclusive. Así si consideramos exclusivamente 2 decimales es:

$$\pi = 3,14$$

$$\frac{2}{3} = 0,67$$

$$\frac{1}{5} = 0,33$$

$$e = 2,72$$

8. Producto y cociente de números de igual y distinto signo.

Al efectuar el producto de expresiones algebraicas debe tenerse en cuenta el signo de cada término para asignar el signo al producto.

Es así:

$$(+a) \cdot (+b) = +a \cdot b$$

$$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$$

$$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$$

$$(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b$$

Es decir, el producto de dos términos de igual signo (positivo o negativo), es positivo y el producto de dos términos de distinto signo es negativo. Esta regla de los signos se aplica en igual forma para cociente: el cociente de 2 términos de igual signo es positivo y el cociente de dos términos de distinto signo es negativo.

9. Números imaginarios.

5

$$\begin{array}{l} \text{Es } (+1) \times (+1) = +1 \\ (-1) \times (-1) = +1 \end{array} \quad \text{resulta así } \sqrt[2]{1} = \pm 1$$

Existen en consecuencia 2 raíces cuadradas de la unidad y ellas son +1 y -1 respectivamente. No existe en cambio dentro del campo de los números racionales o irracionales ningún número que multiplicado por sí mismo de -1, o cualquiera otra cantidad negativa.

Como consecuencia de lo anterior, se admite en aritmética que no existen raíces cuadradas de números negativos.

Para la realización de diversas operaciones en matemáticas, es no obstante necesario disponer de raíces cuadradas de cantidades negativas. Esto da origen a los denominados números imaginarios, definiéndose como expresión de ellos

$$1 = \sqrt[2]{-1}$$

Admitido este concepto tendremos por ejemplo:

$$\sqrt[2]{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt[2]{(-1)} \sqrt{(4)} = 2i$$

expresión esta última formada por una parte real (2) y otra imaginaria (i).

Ejercicios:

1º) Representar sobre una recta los números -4, $-\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 3.

2º) $m(a+b+c+d) =$

3º) Dar un ejemplo de las siguientes clases de números: entero positivo, entero negativo, fraccionario positivo, fraccionario negativo, irracional, imaginario.

4º) $a \cdot (-b) \cdot c =$

5º) $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) =$

6º) $(-a) \cdot b \cdot (-c) =$

M.1.II

II.- ELEMENTOS DE ALGEBRA

10. Aritmética y Algebra.

En álgebra es usual reemplazar letras por números y operar con éstas como si fuesen números, generalizando así el resultado obtenido y permitiendo la obtención de fórmulas algebraicas mediante las cuales se solucionan un infinito número de problemas aritméticos similares, mediante la utilización directa de una fórmula.

Algunos ejemplos aclararán estos conceptos. Nos proponemos calcular la diferencia entre el cuadrado de un número y el que inmediatamente sigue:

$$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

$$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

y así sucesivamente. Si queremos saber la diferencia entre el cuadrado de 98 y el de 97, aritméticamente, tendremos que hacer respectivas y hallaremos como resultado un número que solucionaría nuestro problema, pero no nos dará una solución general del problema de la diferencia del cuadrado de dos números consecutivos.

Utilizando los procedimientos algebraicos hallamos de inmediato la solución general. Llamamos n a un número cualquiera y $(n+1)$ al siguiente. En consecuencia el problema algebraico consiste en expresar ahora la diferencia entre los cuadrados de $(n+1)$ y de n .

$$(n+1)^2 - n^2$$

pero $(n+1)^2 = (n+1) \times (n+1)$

$$\begin{array}{r} n+1 \\ n+1 \\ \hline n+1 \\ n^2 + n \\ \hline n^2 + 2n + 1 \end{array}$$

Entonces: $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = \boxed{2n + 1}$

y tenemos ahora la fórmula buscada.

Si es por ejemplo $n = 97$

$$98^2 - 97^2 = (2 \times 97) + 1 = 194 + 1 = 195$$

Estamos en condiciones de hallar de inmediato la diferencia entre los cuadrados de dos números sucesivos cualesquiera mediante la aplicación de una fórmula algebraica. En forma similar, si deseamos hallar el interés simple de un capital de 10.000 m\$n. al 7% anual durante un plazo de 5 años, desde el punto de vista aritmético necesitamos efectuar un razonamiento previo, plantear la correspondiente regla de tres y luego solucionarlo. El resultado aritmético al que arribamos, en este caso un interés de 3.500 m\$n., soluciona nuestro problema, pero no nos da la norma o regla para resolver problemas similares, de interés simple.

Si en cambio utilizamos los métodos de álgebra y llamamos con letras: "I" al interés, "C" al capital, "n" al tiempo e "i" a la tasa unitaria, y hacemos con estas letras razonamiento análogo al de los números, llegamos como resultado no a un número, sino a una fórmula,

$$I = C.i.n.$$

que permite solucionar directamente todos los problemas similares.

En nuestro caso es $C = 10.000$ $i = 0,07$ $n = 5$

Es entonces aplicando la fórmula

$$I = 10.000 \times 0,07 \times 5 = 3.500$$

y se apreciará así las ventajas del álgebra sobre la aritmética.

11. Fracciones.

En la elaboración de números índices es frecuente la utilización de fracciones del tipo de:

$$\frac{P_1}{P_0}$$

Veremos ahora las diversas operaciones que pueden realizarse con expresiones fraccionarias y sus propiedades.

Suma de fracciones:

Es $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$

$$\frac{P_{1,5}}{P_{1,0}} + \frac{P_{2,5}}{P_{2,0}} + \frac{P_{3,5}}{P_{3,0}} + \frac{P_{4,5}}{P_{4,0}} = \frac{P_{1,5}}{P_{1,0}} = 1$$

$$\frac{P_{1,5} P_{2,0} P_{3,0} P_{4,0} + P_{2,5} P_{1,0} P_{3,0} P_{4,0} + P_{3,5} P_{1,0} P_{2,0} P_{4,0} + P_{4,5} P_{1,0} P_{2,0} P_{3,0}}{P_{1,0} \cdot P_{2,0} \cdot P_{3,0} \cdot P_{4,0}}$$

M.1.III y IV

Suma de fracciones con igual denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+c+d}{b}$$

Resta de fracciones:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Producto de fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{P_{1,5}}{P_{1,0}} \cdot \frac{P_{2,5}}{P_{2,0}} \cdot \frac{P_{3,5}}{P_{3,0}} \cdot \frac{P_{4,5}}{P_{4,0}} = \prod_{i=1}^4 \frac{P_{i,5}}{P_{i,0}} = \frac{P_{1,5} \cdot P_{2,5} \cdot P_{3,5} \cdot P_{4,5}}{P_{1,0} \cdot P_{2,0} \cdot P_{3,0} \cdot P_{4,0}}$$

División de fracciones:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$1 \div \frac{P_{1,5}}{P_{1,0}} = \frac{P_{1,0}}{P_{1,5}}$$

Propiedad conmutativa de la suma o resta de fracciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \frac{a}{b} - \frac{e}{f} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} - \frac{e}{f} + \frac{a}{b} = \dots$$

Propiedad conmutativa del producto:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{a}{b} = \dots$$

Propiedad asociativa de la suma o resta:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) - \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} - \frac{e}{f} \right) + \frac{c}{d} = \dots$$

Propiedad asociativa del producto:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \right) \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right) \cdot \frac{a}{b} = \dots$$

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma o resta:

$$\frac{m}{n} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = \frac{ma}{nb} + \frac{mc}{nd}$$

12. Igualdades

Se denomina igualdad toda expresión algebraica del siguiente tipo

$$a + b - c = d$$

M.1.III y IV

En toda igualdad debe distinguirse el primer miembro, a la izquierda del signo igual, del segundo miembro situado a la derecha. Cada miembro puede estar formado por uno o varios términos se parados unos de otros por los signos más (+) o menos (-).

En el ejemplo anterior el primer miembro está formado por tres términos: a, b y (-c) y el segundo miembro por un solo término: d.

Es también evidentemente $d = a + b - c$

Si en una igualdad se suma o resta a ambos miembros una misma cantidad, la igualdad se mantiene, formándose una nueva igualdad equivalente a la anterior.

Sea sumar c a ambos miembros

$$a + b - c + c = d + c$$

$$a + b = d + c$$

Sea ahora restar d a ambos miembros.

$$a + b - d = d + c - d = c$$

Corolario: Todo miembro pasa de un miembro a otro con signo contrario. Si se multiplica o divide ambos miembros de una igualdad por una misma cantidad la igualdad es equivalente a la anterior

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = S \text{ multiplicando por } \underline{q} \text{ ambos miembros}$$

$$\therefore q (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = S \cdot q$$

Sea $ac + bc + dc = m$

$$\therefore c(a + b + d) = m \text{ y dividiendo por } \underline{c} \text{ ambos miembros.}$$

$$(a + b + d) = \frac{m}{c}$$

Sea $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = n$

$$\therefore \frac{1}{b} (a + c + d) = n \text{ y multiplicando por } \underline{b} \text{ ambos miembros}$$

$$\therefore (a + c + d) = n \cdot b$$

Corolario: todo factor que multiplica a un miembro de una igualdad pasa al otro miembro como divisor. Todo divisor de un miembro pasa al otro como factor.

13. Recíprocas e inversas.

La recíproca e inversa de una cantidad es igual al co ciente entre la unidad y esa cantidad. Así la inversa de m es $\frac{1}{m}$, la

recíproca de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$; la recíproca de $\frac{1}{b}$ es b ; la de $\frac{P_{2,5}}{P_{2,c}}$ es $\frac{P_{2,0}}{P_{2,5}}$,
etc.

Dividir una expresión algebraica por una cantidad dada es igual a multiplicar dicha expresión por la recíproca de la cantidad dada.

Ejemplo:

$$(a + b + c) \div m = (a + b + c) \times \frac{1}{m} = \frac{a + b + c}{m}$$

Como consecuencia de lo anterior multiplicar una expresión algebraica por una cantidad dada es igual a dividir dicha expresión por la recíproca de la cantidad.

Ejemplo:

$$(4 + 5 + 6) \times \frac{1}{3} = (4 + 5 + 6) \div 3 = \frac{4 + 5 + 6}{3} = 5$$

14. Proporciones.

Se denomina así la igualdad de fracciones, como ser

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

a y d son los extremos; b y c los medios y k la razón.

$$\text{Es } a.d = b.c$$

El producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\therefore a = \frac{b.c}{d} \quad \therefore b = \frac{a.d}{c}$$

Un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.

Un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.

Sea

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

$\therefore a = b.k \quad c = d.k \quad e = f.k$, y sumando ordenadamente las tres igualdades resulta

$$a + c + e = b.k + d.k + f.k = k(b + d + f)$$

M.i. III y IV

$$k = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Toda proporción es igual al cociente entre la suma de los numeradores y la suma de los denominadores.

Más general aún es
$$k = \frac{n.a \pm n.c. \pm \bar{n}.e}{m.b \pm n.d \pm \bar{n}.f}$$

Ejercicio:

7º) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{j} =$

8º) $\frac{P_0 - P_1}{P_1} - \frac{P_2}{P_2} - \frac{P_2}{P_3} =$

9º) $\frac{P_0}{P_1} - \frac{P_1}{P_2} - \frac{P_2}{P_3} =$

10º) $\frac{m}{n} \times \frac{a}{b} =$

11º) Calcular las recíprocas o inversas de 1, 2, 3, 1/5, 1/9, P_1 , P_2 , P_4 , P_1 .

12º) Siendo $ab+ac+ad = S$ pasar d al 2º miembro.

13º) Siendo $P_0 P_1 P_2 = S - P_4$ pasar $(- P_4)$ al 1er miembro.

14º) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ $n \cdot$

M.i.

5a y 6a Conferencia

30/8/1955

15.- Desigualdades

Si comparamos 2 números cualquiera, por ejemplo, 10 y 8 observamos que uno es mayor que otro. Esto puede escribirse de la siguiente forma,

$$\begin{array}{lcl} 10 > 8 & (10 \text{ mayor que } 8) & \text{o viceversa} \\ 8 < 10 & (8 \text{ menor que } 10) & \end{array}$$

Una expresión como las citadas precedentemente se conoce como de desigualdad y a la misma le son aplicables todos los conceptos expuestos y demostrados en la clase anterior para las igualdades

Así si es por ejemplo

$$\begin{array}{l} \text{será} \quad a + b - c > m.n \\ \quad \quad a + b > m.n + c \\ \quad \quad \frac{a, b - c > n}{m} \\ \quad \quad \frac{a + b - c}{m, n} \\ 0 < \frac{a + b - c - n}{m} \quad \text{etc.} \end{array}$$

Una desigualdad puede comprender también a un conjunto de términos como ser

$$\frac{P_1}{P_0} < \frac{P_2}{P_1} < \frac{P_3}{P_2} < \dots < \frac{P_n}{P_{n-1}} < \frac{P_{n+1}}{P_n} < \dots$$

$$a < X < b$$

Esta última expresión nos indica que el valor de X debe ser mayor que a pero menor que b. Si es en cambio

$$a \leq X \leq b \quad X \text{ estará comprendido entre los límites } a \text{ y } b \text{ ambos inclusivos.}$$

Es entonces (a; b) el campo de variación de X

Si es $1 \leq i \leq 5$ y por la índole del problema planteado i solo puede tomar valores enteros resulta que los valores que podrá tomar i son 1, 2, 3, 4 y 5.

Existen desigualdades de muy distinta forma, con las cuales los signos utilizados indican explícitamente el campo de variación respectivo, como ser

$$\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a < x < b \\ (a+b)^2 \gg 4ab, \text{ etc., desigualdad esta última que demostraremos más adelante.} \end{array}$$

16.- Potencias

Es $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ y en forma similar

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ veces}} = a^m$$

donde a se denomina base y m exponente.

Resulta así la elevación a una potencia como un caso particular del producto de un número o una expresión por si mismo.

Sea

$$a^m \cdot b^m = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ veces}} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^{m \text{ veces}} \text{ y en}$$

virtud de la propiedad asociativa del producto es

$$a^m \cdot b^m = \overbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}^{m \text{ veces}} = (ab)^m$$

Para multiplicar potencias de igual exponente se multiplican las bases.

$$\text{Recíprocamente es } (ab)^m = a^m b^m$$

Para elevar un producto a una potencia se eleva cada uno de los factores.

Sea

$$a^m a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^m \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n = a^{m+n}$$

Para multiplicar potencias de igual base se suman los exponentes.

Sea

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ veces}}}{\overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

Un cociente elevado a una potencia es igual al numerador elevado a dicha potencia dividido por el denominador elevado a la misma potencia.

Sea

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = a^{m-n}$$

para dividir potencias de igual base se restan los exponentes.

Ejemplo: $\frac{2^5}{2^2} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 \quad 2^{5-2} = 2^3 = 8$

Si es

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 \text{ pero } \frac{a^m}{a^m} = 1 \therefore a^0 = 1$$

Cualquier cantidad elevada al exponente cero es igual a la unidad

Sea ahora

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = a^{2-5} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

resulta en consecuencia $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Una cantidad elevada a un exponente negativo es igual a la recíproca de dicha cantidad elevada a un exponente positivo.

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1.000} = 0,001$$

Sea

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_n = a^{\overbrace{m+m+m+\dots+m}^n} = a^{m \cdot n}$$

Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los 2 exponentes.

Ejemplo:

$$(3^2)^3 = 3^{2 \times 3} = 3^6 = 729$$

17.- Raíces

La operación contraria a la elevación o potencia es la extracción de raíces.

$$\text{Si } a^m = b \text{ es } a = \sqrt[m]{b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{ya que } 3^4 = 81$$

Propiedades

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b} \sqrt[m]{c}$$

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de cada factor.

Cuando en una raíz no se expresa en forma explícita el índice de una raíz se admite que la misma es una raíz cuadrada, o sea de índice 2.

Siendo la radicación la operación contraria a la potenciación es
M.I. V y VI

$$\left(\sqrt[2]{a b c} \right)^2 = a b c$$

y en general $\sqrt[m]{(a b c)^m} = a b c$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \quad \text{ejemplo} \quad \sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4} = 1,25$$

La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces del numerador sobre la raíz del denominador.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \text{Ejemplo} \quad \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Para extraer una raíz de otra se multiplican las raíces respetivas.

Es $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$ y en consecuencia $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

En particular $\sqrt[3]{10^2} = 10^{\frac{2}{3}} = 10^{0,666}$

Resulta así

$$a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$$

$$2^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\sqrt[m]{a} \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{b}{c} \frac{d}{c} = \frac{b}{c} + \frac{d}{c} = \frac{b+d}{c} = \sqrt[c]{a^{b+d}}$$

Cualquier potencia, entera o fraccionaria, positiva o negativa puede expresarse mediante potencias positivas y raíces enteras.

Sea por ejemplo

$$10^{-4,57} = \frac{1}{10^{4,57}} = \frac{1}{10^{\frac{457}{100}}} = \frac{1}{\sqrt[100]{10^{457}}}$$

en general

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

18.- Racionalización de denominadores

Para la resolución de fracciones que presentan raíces cuadradas en el denominador es conveniente la racionalización de denominadores su eliminación pasándolas al numerador.

Sea por ejemplo

$$\frac{n}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ tenemos en el denominador

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a}\sqrt{b} - \sqrt{a}\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2}{a - b} = \frac{a - b}{a - b}$$

y en consecuencia es

$$\frac{n}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{n(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} = \frac{n\sqrt{a} - n\sqrt{b}}{a - b}$$

si en lugar de esa fracción tenemos

$\frac{n}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ se logra igual propósito multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\therefore \frac{n}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{n(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

Ejercicios:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{3 - 2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{(\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}) (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{1}{2} \sqrt{3} + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{10}$$

19.- Binomio de Newton

Se conoce como binomio la suma o resta de dos términos.

Sea a el primer término y b el segundo. Veremos los valores que se obtiene al elevar a determinadas potencias un binomio

$$(a+b)^2 = (a+b) (a+b)$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de la suma de un binomio es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo. Sea ahora

$$(a-b)^2 = (a-b) (a-b)$$

$$\begin{array}{r} (a-b) \\ (a-b) \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\therefore (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de la resta de un binomio es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Calculemos ahora el producto $(a+b) (a-b)$

$$\begin{array}{r} (a+b) \\ (a-b) \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

$$\therefore (a+b) (a-b) = a^2 - b^2$$

Analogamente es $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\therefore (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primero más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo.

Resultados similares obtenemos elevando el binomio a distintas potencias: 4, 5, 6, etc.

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a + b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ (a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\ (a+b)^7 &= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \\ (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n \end{aligned}$$

Siendo la última expresión de carácter general y válida para valores de n positivos o negativos, enteros o fraccionarios.

Como puede apreciarse en el desarrollo anterior los exponentes de a van decreciendo una unidad en cada término por ej: 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 mientras que los exponentes de b van creciendo en igual forma: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

En cuanto a los coeficientes del binomio, se trata de los llamados números combinatorios y surgen del desarrollo del Triángulo de Tartaglia o Pascal.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & 1 & & 6 & & 15 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

Cuya construcción, evidente por sumas, puede considerarse también como productos sucesivos por 11 que representa a los coeficientes de $(a+b)$.

Ejercicios:

15) $a + b - c > 5$ pasar $(-c)$ al 2º miembro

16) $2^5 \cdot x \cdot 2^2 =$

17) $m^3 \cdot n^3 =$ (comprobar para $m = 3$; $n = 5$)

18) $\frac{b^9}{b^8}$

20) $\frac{3}{4^5}$

21) $(3^2)^3 =$

22) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$

23) $2 \sqrt[3]{\frac{64}{3}}$

24) $a - \frac{2}{3}$

25) $\frac{35a^{x+1} b^{2y-2} c^{m+n+1}}{-7a^2 b^{y+2} c^{n-1}}$

26) $\frac{-4\sqrt[5]{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}{a^4 \sqrt[4]{4} \sqrt{5}}$

M.1. V y VI

20.- APLICACION GENERALIZADA DEL BINOMIO

Las expresiones de las distintas potencias del binomio permiten su aplicación a cualquier otra expresión similar, es decir se utilizan como fórmulas donde a y b tienen valores particulares cualesquiera.-

Ejemplos :

$$\begin{aligned}(5ab^2 + 2c)^2 &= (5ab^2)^2 + 2(5ab^2)(2c) + (2c)^2 = \\ &= 25a^2b^4 + 20ab^2c + 4c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6x^3 - 3y)^3 &= (6x^3)^3 - 3(6x^3)^2(3y) + 3(6x^3)(3y)^2 - (3y)^3 = \\ &= 216x^9 - 324x^6y + 162x^3y^2 - 27y^3\end{aligned}$$

21.- Media aritmética y media geométrica de 2 cantidades

Vamos ahora a demostrar la desigualdad, indicada ya en el punto 15,

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

pasando $4ab$ al primer miembro

$$(a+b)^2 - 4ab \geq 0$$

Es decir que para probar la desigualdad la diferencia entre $(a+b)^2$ y $4ab$ debe ser una cantidad mayor o a la suma igual a cero, es decir una expresión positiva

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

pero es (punto)

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$\therefore (a-b)^2 \geq 0$$

Cualquier expresión elevada al cuadrado es siempre mayor o igual a cero.-

Si $a > b$ es $a - b > 0$.°. una cantidad positiva elevada al cuadrado también positiva.

Si $a < b$ es $a - b < 0$.°. una cantidad negativa elevada al cuadrado es también positiva

Si $a = b$ es $a - b = 0$.°. $(a - b)^2 = 0$ caso límite

En consecuencia siendo

$(a - b)^2 \geq 0$ resulta cierta la desigualdad y es por tanto

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

.°. $\frac{1}{4} (a + b)^2 \geq ab$ y extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros

$$\sqrt{\frac{(a + b)^2}{4}} \geq \sqrt{ab}$$

$$\therefore \boxed{\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

Pero $\frac{a + b}{2}$ es la Media Aritmética de las cantidades a y b y $\sqrt{ab}$ es la denominada

Media geométrica de a y b En consecuencia es M. Aritmética $\geq$ Media Geométrica

Correspondiendo la igualdad en el caso de ser $\boxed{a = b}$ (caso extremo)

Aplicación

$$\text{Sea } a = 4 \quad b = 9 \quad \frac{a + b}{2} = \frac{4 + 9}{2} = 6,5 \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$

Es $\boxed{6,5 > 6}$ o sea se comprende la desigualdad.

$$\text{Si es } a = b = 5 \quad \frac{5 + 5}{2} = 5 \quad \sqrt{5 \times 5} = 5$$

$$\boxed{5 = 5}$$

Ejercicios

$$27) \quad (3a^2 + 2b)^2 =$$

$$28) \quad \frac{a^2 + ab}{a^2 + b^3} \cdot \frac{b}{a + b} \cdot \frac{a}{a - b} =$$

29) Construir el triángulo de Tartaglia o Pascal para los coeficientes del Binomio de Newton hasta la 8a. potencia inclusive.

$$30) \quad (3xz^2 - 4x^3)^2 =$$

$$31) \quad (3x^2 + z^3)^3 =$$

M. i. VII

RESOLUCION DE ECUACIONES

22 = Ecuaciones de 1er. grado.-

En álgebra se indican en general con las últimas letras del alfabeto x, y, z las llamadas incógnitas o sea valores a determinar.-

Una ecuación es una igualdad del tipo de las indicadas en el punto 12, donde figuran incógnitas a determinar, elevadas a determinadas potencias, y que en consecuencia solo se cumple o satisface para determinados valores de las incógnitas.-

Los valores que cumplen o satisfacen a una ecuación se llaman sus raíces y pueden ser números reales o imaginarios.- El grado de una ecuación está dado por la mayor potencia de las incógnitas que figuran en uno de sus términos.-

Para poder solucionar una determinada ecuación es necesario además que se cumplan determinadas condiciones.- Así por ejemplo para solucionar una ecuación de 1er. grado con 2 incógnitas es indispensable contar con 2 ecuaciones independientes, es decir disponer de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.-

En forma similar para resolver un sistema de primer grado con 3 incógnitas debe disponerse de 3 ecuaciones independientes y en general para resolver un sistema de n incógnitas se necesitan n ecuaciones independientes.-

Dos ecuaciones son independientes cuando las mismas no son equivalentes, es decir cuando puede deducirse una de la otra mediante la suma o resta de números o mediante producto o cociente de cantidades.- En estos casos las ecuaciones al igual que las igualdades, son equivalentes y por consiguiente no son válidas para la resolución del sistema.-
el sistema no puede resolverse en forma

Si disponemos de menos ecuaciones que incógnitas explícita y puede haber un infinito número de soluciones posibles.-

Damos a continuación algunos ejemplos de ecuaciones de 1er grado para elustrar los conceptos expresados precedentemente:-

$$22 \div 3 = 11$$

$$a x + b = 0$$

$$x + 1 = 2 x + 4$$

Ecuación de 1er. grado con incógnitas

$$x + 2 y = 1$$

$$3 x + y = 2$$

$$1 x + 3 y = 1$$

$$2 \quad 3$$

$$x - 1 y = 1$$

$$4 \quad 2$$

$$- 5 x + 4 y = - 6$$

Ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas

$$\begin{array}{l} a x + b y + c z = d \\ 3 x + 2 y + 4 z = 8 \\ a x + b y + \dots + n z = h \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ecuaciones de 1er. grado con 3 incógnitas} \\ \text{Ecuación de 1er. grado con } n \\ \text{incógnitas} \end{array}$$

23.- Solución de la ecuación de 1er. grado con una incógnita

El método de resolución que se aplica consiste en pasar términos de un miembro a otro hasta despejar la incógnita que debe quedar aislada en un miembro:

Ejemplos:

$$a) \quad 2x + 3 = 11 \quad \therefore 2x = 11 - 3 = 8 \quad \therefore x = \frac{8}{2} = 4$$

La solución $x = 4$ se comprueba fácilmente reemplazándola en la ecuación originaria

$$2x(4) + 3 = 11 = 8 + 3 \text{ obteniéndose una igualdad}$$

$$b) \quad x + 1 = 2x + 4$$

$$\therefore 1 - 4 = 2x - x$$

$$\therefore -3 = x \quad \text{Comprobación } -3 + 1 = 2x(-3) + 4$$

$$\therefore -2 = -2$$

$$c) \quad \frac{2}{3}x = \frac{4}{5} \quad \therefore x = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$$

$$d) \quad ax + b = 0 \quad \therefore x = -\frac{b}{a}$$

$$e) \quad ax + c = c \quad \therefore x = \frac{c - b}{a}$$

24.- Resolución de un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas.-

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas existen diversos métodos, de los cuales vamos a considerar por el momento, dada la índole de este curso solo tres:

a) Por igualación; b) Por sustitución y c) Por determinantes.-

25.- Resolución por igualación.-

Consiste este método en despejar el valor de una misma incógnita en ambas ecuaciones y luego igualar los resultados obtenidos, teniendo en cuenta que dos expresiones que son iguales a una tercera son

iguales entre si.-

25

Se obtiene así una nueva ecuación con una sola incógnita que se resuelve fácilmente por el método indicado en el punto 23.-

Hallado así el valor numérico de una incógnita se reemplaza el mismo en cualquiera de las ecuaciones y se despeja fácilmente el valor de la otra incógnita.-

Ejemplo: Sea el sistema de 2 ecuaciones

$$x + 2y = 1$$

$$3x + y = 2$$

De la primera ecuación se obtiene

$$x = 1 - 2y$$

y de la segunda

$$3x = 2 - y \quad \therefore \quad x = \frac{2 - y}{3}$$

Iguando ambos resultados resulta

$$1 - 2y = \frac{2 - y}{3}$$

$$\therefore 3 - 6y = 2 - y \quad \therefore 3 - 2 = 6y - y \quad \therefore 1 = 5y \quad \therefore y = \frac{1}{5}$$

Despejado el valor numérico de $y = \frac{1}{5}$ se reemplaza, por ejemplo, en la ecuación es decir

$$x + 2y = 1$$

$$\text{es decir } x + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1 \quad \therefore x = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad \therefore x = \frac{3}{5}$$

Los valores hallados $y = \frac{1}{5}$ $x = \frac{3}{5}$ constituyen las raíces o solución del sistema conforme puede comprobarse reemplazándoles en las ecuaciones originales.-

$$x + 2y = 1 \quad \therefore \frac{3}{5} + 2\frac{1}{5} = 1$$

$$3x + y = 2 \quad \therefore 3 \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 2$$

Sea ahora el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \therefore x = 2 - \frac{2}{3}y \\ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y \end{array} \quad \therefore 2 - \frac{2}{3}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y$$

Resulta así $y = \frac{18}{11} \quad \therefore x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{18}{11} \right) = \frac{10}{11}$ que

soluciona el sistema.-

26.- Resolución por sustitución

Consiste este método en despejar el valor de una incógnita en una de las ecuaciones y luego reemplazar el valor hallado en la otra ecuación.- En tal forma se transforma el sistema en una ecuación con una sola incógnita que resuelta por el procedimiento indicado en el punto 23 permite hallar luego por sustitución del valor hallado en cualquiera de las ecuaciones el valor de la otra incógnita.-

Sea el siguiente sistema

$$3x + y = 8$$

$$2x + 4y = 10$$

De la primera ecuación despejamos $y = 8 - 3x$

valor éste que sustituimos en la 2ª ecuación

$$2x + 4(8 - 3x) = 10$$

$\therefore 2x + 32 - 12x = 10 \quad \therefore x = 2,2$ y reemplazando este valor resulta $y = 8 - 3 \times 2,2 = 1,4$

Comprobación

$$3 \times 2,2 + 1,4 = 8$$

$$2 \times 2,2 + 4 \times 1,4 = 10$$

27.- Sistemas equivalentes

Si las dos ecuaciones del sistema son equivalentes el sistema no admite solución determinada.-

Sea $3x + y = 4$ ecuaciones equivalentes ya que la

$6x + 2y = 8$ segunda es igual al doble de la primera.-

es $y = 4 - 3x$ y sustituyendo en la 2ª ecuación

$$6x + 2(4 - 3x) = 8$$

$$\therefore 6x + 8 - 6x = 8 \quad \therefore 8 = 8$$

Es decir no hay solución determinada ya que solo disponemos de 1 sola ecuación con 2 incógnitas

$$3x + y = 4 \quad \therefore y = 4 - 3x$$

ecuación esta que admite un infinito número de soluciones.- Para cada valor que se asigne a x resultará un distinto valor para y

$$\text{Si } x = 1 \quad y = 1$$

$$\text{Si } x = 2 \quad y = 2$$

$$\text{Si } x = 0 \quad y = 4 \text{ etc.}$$

En casos como este y conforme se verá más adelante, decimos que y es una función de x es decir que a cada valor de la variable x corresponderá un valor particular para la función y .-

Ejercicios

$$32) \quad \frac{1}{5}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \quad \therefore x =$$

$$33) \quad \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x + \frac{4}{5} \quad \therefore x =$$

$$34) \quad 8y + 2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}y \quad \therefore y =$$

35) Resolver por el método de igualación el siguiente sistema de ecuaciones de 1er grado con 2 incógnitas

$$3x + y = 7$$

$$5x + 4y = -6$$

36) Resolver por el método de sustitución el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{5}x + 2y = 8$$

$$\frac{1}{2}x - 10y = 15$$

M.I. VIII



MATEMATICAS PARA NUMEROS INDICES

28.- Resolución de ecuaciones de 1er. grado por Determinantes.

El procedimiento de resolución de ecuaciones de 1er. grado por determinantes, es de índole muy general ya que permite solucionar sistemas de ecuaciones con más de dos incógnitas, es decir de soluciones de carácter general aplicable a cualquier sistema de primer grado donde se dispone de igual número de ecuaciones como de incógnitas.

Consideremos en general el siguiente sistema de ecuaciones con 2 incógnitas:

$$ax + by = c$$

$$Ax + By = C \quad \text{ecuaciones que admitimos no son equivalentes.}$$

Formemos el determinante común del sistema que llamaremos Δ en la siguiente forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix}$$

es decir está formado por los coeficientes de las incógnitas en las 2 ecuaciones consideradas.

El valor del determinante anterior se define en la siguiente forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = aB - Ab$$

y en forma analoga reemplazando en cada caso los coeficientes de las incógnitas por los valores de 2º miembro, determinamos el valor numérico de las 2 incógnitas.

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c & b \\ C & B \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} (cB - Cb) = \frac{cB - Cb}{aB - Ab} = x$$

$$y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} (aC - Ac) = \frac{aC - Ac}{aB - Ab} = y$$

Fórmulas estas que permiten solucionar cualquier sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas.

29.- Aplicaciones:

30

Como ejemplo de aplicación de las fórmulas anteriores vamos a calcular el valor numérico de las incógnitas del siguiente sistema.

$$3x + y = 8$$

$$2x + 4y = 10$$

Es entonces $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (3 \times 4) - (1 \times 2) = 12 - 2 = 10$

$$\therefore x = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \left[(8 \times 4) - (10 \times 1) \right] = \frac{1}{10} (32 - 10) = \frac{22}{10} = 2,2$$

$$\therefore y = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{10} \left[(3 \times 10) - (2 \times 8) \right] = \frac{1}{10} (30 - 16) = \frac{14}{10} = 1,4$$

Resulta así $x = 2,2$; $y = 1,4$ valores estos que solucionan el sistema conforme puede comprobarse, reemplazando en las ecuaciones originales.

$$(3 \times 2,2) + 1,4 = 8$$

$$(2 \times 2,2) + (4 \times 1,4) = 10$$

Resolver por determinantes el siguiente sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas

$$3x + y = 7$$

$$-5x + 4y = -6$$

Es $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 5 = 17$

$$x = \frac{1}{17} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{17} (28 + 6) = 2$$

$$y = \frac{1}{17} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{17} (-18 + 35) = 1$$

$x = 2$; $y = 1$ son las soluciones del sistema propuesto.

30.- Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

La solución de un sistema de primer grado con 3 incógnitas requiere

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

donde x , y , z representan las tres incógnitas consideradas. La solución de un sistema de esta clase puede realizarse perfectamente mediante la aplicación de determinantes conforme se ha señalado en los puntos anteriores.

El determinante general del sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Existen reglas prácticas como la Regla de Sarrus que permiten resolver el determinante de 3er orden, integrado por 3 columnas y 3 filas, pero no tienen aplicación para el cálculo de determinantes de un orden superior: de 4º, 5º, etc. Por tal razón vamos a considerar la solución general del determinante en función de los términos de una fila o columna cualquiera y de los números complementarios respectivos.

a) Signos.

Los signos correspondientes al desarrollo de un determinante, por sus menores complementarios son alternativamente positivos y negativos en la siguiente forma:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

b) Menor complementario

Menor complementario de un término, es el determinante formado excluyendo los términos correspondientes a la columna y fila del término dado.

Así, por ejemplo, en el determinante anterior el menor complementario del término a_1 , es $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ que excluye a la fila y columna correspondiente a a_1 .

En forma similar el menor complementario del término b_3 es $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Como puede apreciarse el menor complementario es un nuevo determinante de orden inferior en una unidad al determinante original. Así los menores complementarios de un determinante de 3er. orden, son de 2º orden, ya que se elimina una fila y una columna.

En forma similar los menores de un determinante de 4º orden, son determinantes de 3er. orden y en general los menores correspondientes a un determinante de orden n son de orden n-1

c) Desarrollo de un determinante:

Un determinante cualquiera es igual a la suma de los productos de los términos de una fila o columna por sus respectivos menores complementarios. Es entonces desarrollando Δ , por la primera columna:

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

y en forma similar es

$$X = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$X = \frac{d_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - d_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + d_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}$$

Analogamente la incógnita y es:

$$Y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(a_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \right)$$

y el valor numérico de Z resulta

$$Z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \right)$$

En consecuencia es

$$Y = \frac{a_1 (d_2 c_3 - c_2 d_3) - a_2 (d_1 c_3 - c_1 d_3) + a_3 (d_1 c_2 - c_1 d_2)}{a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}$$

$$Z = \frac{a_1 (b_2 d_3 - b_3 d_2) - a_2 (b_1 d_3 - d_1 b_3) + a_3 (b_1 d_2 - b_2 d_1)}{a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}$$

31.- Sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

Un sistema de n ecuaciones de 1er grado con n incógnitas, toma la

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots + n_1 z &= k_1 \\ a_2 x + b_2 y + \dots + n_2 z &= k_2 \\ &\dots \\ a_n x + b_n y + \dots + n_n z &= k_n \end{aligned}$$

La solución general de este sistema es similar al de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, es decir se resuelve mediante la aplicación de determinantes. El determinante de orden n se reduce a varios de orden $n-1$; estos a su vez desarrollados por una fila o columna y sus menores complementarios se reducen a varios de orden $n-2$, y así sucesivamente hasta llegar al orden 2.

El determinante general del sistema, que representa el divisor común para el cálculo de las n incógnitas es

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & n_n \end{vmatrix}$$

y el valor de las incógnitas $x, y, \dots, z$ se determinan desarrollando los determinantes:

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & \dots & n_1 \\ k_2 & b_2 & \dots & n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n & b_n & \dots & n_n \end{vmatrix} \quad y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & k_2 & \dots & n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & k_n & \dots & n_n \end{vmatrix} \quad \dots \quad z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & m_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & m_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & m_n \end{vmatrix}$$

Ejercicios

- 37: Resolver por determinantes el siguiente sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- $$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + y &= 2 \end{aligned}$$
- 38: Resolver, aplicando determinantes, el siguiente sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 5 \\ 5x - 4y + 4z &= 9 \\ -4x + 8y - 2z &= 6 \end{aligned}$$

32.- Ecuación de 2º grado.

La ecuación general de la ecuación de 2º grado es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ejemplo:

$$3x^2 - 4x - 2 = 0$$

Siendo en este caso $a = 3$; $b = -4$; $c = -2$..

La ecuación es de 2º grado ya que la incognita x esta elevada al cuadrado o sea a la 2º potencia.

Dividiendo por a toda la ecuación resulta

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{y llamando } p = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{a}$$

obtenemos la expresión más simple de la ecuación de 2º grado

$$x^2 + px + q = 0$$

33.- Solución de la ecuación de 2º grado.

Es

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{2xp}{2} + \frac{p^2}{4}$$

$$\therefore x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\therefore x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \therefore x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

En consecuencia existen dos raíces o soluciones para la ecuación de 2º grado

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Aplicando la fórmula hallada es

$$x_1 = -\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3} = -1 + \sqrt{4} = -1 + 2 = 1$$

$$x_2 = -\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3} = -1 - \sqrt{4} = -1 - 2 = -3 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Reemplazando las dos raíces reales y de distinto signo halladas obtenemos

$$1^2 + 2(1) - 3 = 0$$

$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$ que satisface la ecuación original.

Sea ahora

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 4} = -2 \quad \text{En este caso existe como se ve}$$

una sola raíz es decir, es $x_1 = x_2 = x = -2$ que satisface la ecuación general.

Estos casos de una sola raíz corresponden al caso de que la ecuación de 2º grado es un cuadrado perfecto. En este ejemplo es

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

Sea ahora

$x^2 + 4x + 3 = 0$ o sea $x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$ un cuadrado perfecto menos una cantidad dada.

$$x_1 = -\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - 3} = -2 + \sqrt{1} = -2 + 1 = -1$$

$$x_2 = -\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - 3} = -2 - \sqrt{1} = -2 - 1 = -3$$

La ecuación de 2º grado tiene 2 raíces reales.

Finalmente sea ahora

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \quad \text{es} \quad x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \quad \text{o sea}$$

un cuadrado perfecto más un número positivo.

36

$x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} - 5} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$ en este caso la ecuación de 2º grado tiene raíces imaginarias, es decir no reales.

En resumen los tres casos que pueden presentarse son que el trinomio de 2º grado sea:

- a) Un cuadrado perfecto: 1 sola raíz real $= -\frac{p}{2}$
- b) Un cuadrado perfecto menos un número positivo = 2 raíces reales
- c) Un cuadrado perfecto más un número positivo = raíces imaginarias

34.- Solución de la ecuación general

Si en la solución hallada

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ reemplazamos } p \text{ y } q \text{ por sus valores } p = \frac{b}{a}; q = \frac{c}{a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \text{ Es } \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2a - 4a^2c}{4a^3} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ pero } \sqrt{4a^2} = 2a$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ que es la solución de la ecuación general.}$$

35.- Relación entre los pasametros de la ecuación y sus raíces.

Sea

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Sumando ambas raíces se obtiene

$$x_1 + x_2 = -\frac{2p}{2} \therefore \boxed{x_1 + x_2 = -p}$$

Si ahora en cambio multiplicamos ambas raíces se obtiene

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \left(\frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right)$$

$$\therefore x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q \text{ Es entonces } \boxed{x_1 x_2 = q}$$

resultados estos que pueden comprobarse fácilmente en los ejercicios realizados.

36.- Expresión de la ecuación de 2º grado en función de sus raíces

$$\text{Es } x^2 + px + q = 0 \text{ siendo } p = -(x_1 + x_2)$$

$$q = x_1 x_2 \text{ resulta reemplazando}$$

$$x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 x_2$$

M. i. x

pero es $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 x_2$, resulta así la fórmula que permite expresar la ecuación de 2º grado en función de sus raíces.

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

y análogamente en la ecuación general es

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

37.- Ecuación de 3er grado

La expresión general de la ecuación de 3er grado es

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

y esta expresión en general admite tres raíces que pueden ser reales, imaginarias o confundidos.

No existe solución general analítica para la ecuación anterior. En cambio si existe solución para ecuaciones particulares de 3er grado como ser

$$x^3 + px + q = 0$$

expresión a la cual puede ser reducida la ecuación general de 3er grado. Utilizando los métodos de la Geometría Analítica pueden determinarse en forma gráfica las raíces reales, si existen, de una ecuación de 3er grado.

La solución de la ecuación de 3er grado reducida es

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ejercicios:

- 39.- Hallar las raíces de la ecuación de 2º grado: $3x^2 - 4x - 2 = 0$
 40.- Resolver la ecuación de 2º grado $x^2 - 3x + 2 = 0$
 41.- Hallar las raíces de la ecuación de 2º grado: $3x^2 - 2x + 1 = 0$
 42.- Comprobar aritméticamente que en los diversos ejercicios realizados se verifican las igualdades

$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + p x + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

38.- RAICES DE LA ECUACION DE 2º GRADO

Las ecuaciones vistas en la clase pasada, y especialmente la relación demostrada entre las raíces reales de la ecuación de 2º grado y los parámetros p y q de la ecuación reducida es decir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 x_2 &= q \end{aligned}$$

permiten resolver prácticamente problemas aritméticos interesantes del tipo siguiente:

Hallar dos números tales que su suma sea igual a 8 y su producto igual a 12.- Llamando a dichos números x_1 y x_2 resulta así

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 8 \\ x_1 x_2 &= 12 \end{aligned}$$

y en consecuencia es $p = -8$; $q = 12$ planteándose así la siguiente ecuación de 2º grado

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Es entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{8}{2} + \sqrt{\frac{8^2}{4} - 12} = 4 + \sqrt{4} = 6 \\ x_2 &= \frac{8}{2} - \sqrt{\frac{8^2}{4} - 12} = 4 - \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

Son entonces $x_1 = 6$ y $x_2 = 2$ los dos números buscados que satisfacen las condiciones requeridas.-

39.- ECUACION DE 4º GRADO

La expresión general de la ecuación de 4º grado es:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

que puede representar 4 raíces indicadas por x_1, x_2, x_3 y x_4 respectivamente.-

No existe una solución general para la ecuación de 4º grado, pero si en cambio puede solucionarse la denominada ecuación bicuadrada, cuya forma general puede expresarse en la siguiente forma:

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

Si en esta ecuación se efectúa un cambio o sustitución de la incógnita, haciendo para ello

$$x^2 = z \quad \therefore \quad x^4 = z^2 \quad \therefore \quad x = \sqrt{z}$$

$$z^2 + pz + q = 0$$

transformando así la ecuación bicuadrática en una función de 2º grado.-

La solución de esta ecuación es

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

En consecuencia se obtiene así las 4 raíces de la ecuación bicuadrática, cuya expresión analítica es la siguiente:

$$k_1 = + \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

$$k_2 = + \sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

$$k_3 = - \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

$$k_4 = - \sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

40.- SOLUCION DE LA ECUACION BICUADRATICA

Como aplicación de los conceptos precedentemente expuesto vamos a resolver prácticamente la siguiente ecuación bicuadrática.-

$$\boxed{k^4 - 10k^2 - 24 = 0} \quad \therefore p = -10 \quad q = 24$$

$$k_1 = + \sqrt{\frac{10}{2} + \sqrt{\frac{10^2}{4} - 24}} = - \sqrt{5 - \sqrt{25 - 24}} = + \sqrt{5 - 1} = \sqrt{6}$$

$$k_2 = + \sqrt{\frac{10}{2} - \sqrt{\frac{10^2}{4} - 24}} = + \sqrt{5 - 1} = + \sqrt{4} = +2$$

$$k_3 = - \sqrt{\frac{10}{2} + \sqrt{\frac{10^2}{4} - 24}} = - \sqrt{6}$$

$$k_4 = - \sqrt{\frac{10}{2} - \sqrt{\frac{10^2}{4} - 24}} = - \sqrt{4} = -2$$

Las raíces son en este caso $x_1 = \sqrt{6}$; $x_2 = 2$; $x_3 = -\sqrt{6}$; $x_4 = -2$
 es decir 4 raíces reales. 2 negativas y 2 positivas.
 Si reemplazamos en la ecuación original x por sus raíces $\pm\sqrt{6}$ y ± 2
 obtendremos:

$$(\pm\sqrt{6})^4 - 10(\pm\sqrt{6})^2 + 24 = 6^2 - 10(6) + 24 = 36 - 60 + 24 = 0$$

$$(\pm 2)^4 - 10(\pm 2)^2 + 24 = 16 - 40 + 24 = 0$$

Comprobándose así el resultado obtenido.

41.- ECUACION DE GRADO "N"

La expresión analítica general de la ecuación de grado n , siendo n entero y positivo es.-

$$a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \dots + h = 0$$

ecuación esta que admite, en general n raíces: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
 que pueden ser números reales imaginarios o confundidos.-

No existe solución general analítica para la determinación de las raíces de la ecuación de grado n pero si pueden hallarse raíces reales aplicando procedimientos gráficos de geometría Analítica.-

Ejercicios:

43.- Hallar 2 números tales que su suma sea igual a 40 y su producto igual a 24.

43.- La superficie de un rectángulo vale 20 m^2 y su perímetro 18 ms. determinar la medida de los lados del rectángulo.-

45.- Hallar las raíces de la siguiente ecuación bicuadrática

$$x^4 + 3x^2 - 18 = 0$$

LOGARITMOS42.- CONCEPTO Y DEFINICION:

$$\text{Sea } a^m = b \quad \therefore a = \sqrt[m]{b}$$

Se define como logaritmo del número b , en base a , al exponente m al que debe elevarse la base a para obtener el número b .

Es entonces $m = \log_a b$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 4^2 &= 16 \quad \therefore 2 = \log_4 16 \\ 10^3 &= 1.000 \quad \therefore 3 = \log_{10} 1.000 \\ 2^5 &= 32 \quad \therefore 5 = \log_2 32 \\ e^x &= 8 \quad \therefore x = \log_e 8 \end{aligned}$$

Corrientemente como número base para el cálculo de logaritmos se toman las 2 cifras que a continuación se indican y que dan origen a 2 tablas diferentes:

- a) Los logaritmos vulgares o decimales, contruídos sobre la base del número 10.
- b) Los logaritmos naturales o neperianos contruídos sobre la base del número.

$$e = 2,7182818284 \dots$$

Desde luego no existe inconveniente alguno, teórico o práctico en construir tablas de logaritmos sobre la base de otros números como ser: 2, 4, 5, etc. Pero la práctica y las ventajas del sistema decimal han hecho que se prefieran y utilicen constantemente los logaritmos decimales o vulgares. Como se verá más adelante es muy fácil por otra parte, pasar de un sistema a otro bastando para ello multiplicar los respectivos valores por una constante.

Cuando la base no se indica en una forma explícita se admite que los logaritmos son decimales es decir referidos a una base 10.

Los logaritmos naturales se indican a veces en la forma siguiente.

$$\log_e n = \log. n = L.n$$

En todo lo que sigue nos referiremos exclusivamente a los logaritmos decimales.

Logaritmo decimal de un número N es el exponente m al que debe elevarse la base 10 para que sea

$$10^m = N \quad \therefore \quad M = \log N$$

Es entonces $10^m = N$ y dando al exponente (o logaritmo) m diversos valores positivos y negativos podemos construir la siguiente tabla:

Potencia, exponentes o logaritmos	Números
- 3	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001 \quad \therefore \quad \log 0.001 = -3$
- 2	$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01 \quad \therefore \quad \log 0.01 = -2$
- 1	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \therefore \quad \log 0.1 = -1$
0	$10^0 = 1 \quad \therefore \quad \log 1 = 0$
1	$10^1 = 10 \quad \therefore \quad \log 10 = 1$
2	$10^2 = 100 \quad \therefore \quad \log 100 = 2$
3	$10^3 = 1.000 \quad \therefore \quad \log 1.000 = 3$
4	$10^4 = 10.000 \quad \therefore \quad \log 10.000 = 4$

Se advierte que mientras los exponentes o logaritmos crecen en progresión aritmética, los números aumentan en progresión geométrica.

Es por ejemplo $10^{0.5} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3.162 \quad \therefore \quad 0.5 = \log 3.162$

$10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$ de donde puede advertirse que existe siempre

la posibilidad de determinar los logaritmos correspondientes a cada número y viceversa, los números correspondientes a logaritmos dados.

43.- CALCULO DE LOGARITMOS DE NUMEROS ENTEROS:

Sea calcular el logaritmo de 875. Es indudable que por ser $100 < 875 < 1.000$ debe ser

$$2 < \log 875 < 3 \text{ es decir está comprendido entre } 2 \text{ y } 3,$$

y más próximo a 3 que a 2.

Resulta así $\log 875 = 2+m$ donde $m < 1$ en esta expresión el número 2 recibe el nombre de característica y m es la mantisa cuyo valor exacto se determina en las tablas. En forma similar

$$\log 4,833 = ?$$

$$1.000 < 4.833 < 10.000$$

$$\therefore 3 < \log 4.833 < 4$$

$\therefore \log 4,833 = 3+m$ siendo 3 la característica y m la mantisa.

Utilizando la tabla de logaritmos adjunta que solo da las mantisas ya las características se calculan de inmediato, tenemos

$$\log 875 = 2,9420$$

$\log 4,833 = 3+0,6842 = 3,6842$ que son los logaritmos buscados.

En consecuencia para determinar el logaritmo, de un número entero, en característica es igual al orden de la primera cifra significativa del número. En cuanto a la mantisa al determinar sumando a la característica el valor fraccionario determinado por la tabla.

Ejemplos-	$\log 175,400 = 5,2440$	$\log 1 = 0$
	$\log 2 = 0,3010$	$\log 7.990.000 = 6,9025$

44.- LOGARITMOS DE EXPRESIONES FRACCIONARIAS:

Si la expresión fraccionaria se forma con una parte positiva y otra fraccionaria, el logaritmo se determina igual que para los números enteros.

Sea por ejemplo:

$$\begin{aligned} \log 7,56 &= 0+m = 0,8785 \\ \log 341,25 &= 2,5331 \\ \log 1,457 &= 0,1635 \end{aligned}$$

Si la expresión es totalmente fraccionaria la norma a aplicar es la misma.

Sea por ejemplo hallar $\log 0,00178$

$$\text{Es } 0,001 < \log 0,00178 < -2$$

Resulta entonces $\log 0,00178 = -3+m$, es decir el logaritmo de una expresión totalmente fraccionaria tiene característica negativa y mantisa positiva. El valor de la característica negativa es igual al orden de las unidades superiores y la mantisa o parte decimal del logaritmo se determina por la tabla.

Ejemplo.-	$\log 0,00178 = 3,2504 = -3 + 0,2504$
	$\log 0,00065 = 4,8129 = -4 + 0,8129$
	$\log 0,02548 = 2,4062 = -2 + 0,4062$
	$\log 0,165 = 1,2175 = -1 + 0,2175$
	$\log 1,001 = 0,0004$

45.- LOGARITMOS TOTALMENTE NEGATIVOS:

El logaritmo de una cantidad o número menor a la unidad puede expresarse en forma totalmente negativa, tomando el complemento de la parte decimal y aumentando en una unidad la característica respectiva.

Ejemplo:

$$\text{Es } \log 0,00178 = \bar{3},2504 = -3 + 0,2504 = -2,7496$$

$$\log 0,02548 = \bar{2},4062 = -2 + 0,4062 = -1,5938$$

$$\log 0,165 = \bar{1},2175 = -0,7825$$

Logaritmos estos que son totalmente negativos - y que en ocasiones permiten facilitar los cálculos numéricos especialmente productos y cocientes.

46.- LOGARITMOS DE UN PRODUCTO:

$$\begin{aligned} \text{Es } 10^m &= a & 10^n &= b \\ \therefore m &= \log a & n &= \log b. \end{aligned}$$

Resulta así,

$$a \cdot b = 10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \log (a \cdot b) &= m+n \\ \therefore \boxed{\log (a \cdot b) &= \log a + \log b} \end{aligned}$$

Es decir el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\begin{aligned} \text{Es también } \log (a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot z) &= \log a + \log b + \log c + \log d + \\ &+ \dots \dots \dots \log z. \end{aligned}$$

Comprobación numérica

$$\text{Sea } z = 10 \times 4 \times 20 \times 5 \times 2 = 8.000$$

$$\therefore \log z = \log 10 + \log 4 + \log 20 + \log 5 + \log 2 =$$

$$\log z = 1 + 0,621 + 1,3010 + 0,6990 + 0,3010 = 3,9031$$

$$\therefore z = 8.000$$

47.- LOGARITMOS DE UN COCIENTE:

Si es $10^m = a$ $10^n = b$ es $m = \log a$ $n = \log b$.

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n} \quad \text{resulta así}$$

$$\log \left(\frac{a}{b} \right) = m - n = \log a - \log b.$$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

48.- LOGARITMOS DE POTENCIAS Y RAICES:

Sea

$10^m = a$ elevando ambos miembros a la potencia n , resulta

$$(10^m)^n = a^n \quad \text{pero } (10^m)^n = 10^{m \cdot n} = 10^m{}^n = a^n$$

$$\therefore \log a^n = m \cdot n. \quad \text{pero } m = \log a$$

$$\therefore \log a^n = n \log a$$

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base

$$\text{sea } 10^m = a \quad \therefore m = \log a.$$

$$\sqrt[n]{10^m} = \sqrt[n]{a}$$

$$\therefore 10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\therefore \log \sqrt[n]{a} = \frac{m}{n} = \frac{\log a}{n}$$

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la base dividido por el índice de la raíz.

49.- ANTILOGARITMOS

La operación contraria al cálculo de un logaritmo consiste en la determinación del denominador antilogaritmo o número correspondiente a un logaritmo determinado.

Existen tablas de antilogaritmos o números que corresponden a logaritmos tabulados, pero en general se puede utilizar la propia tabla de logaritmos para el cálculo de los números utilizándola en forma inversa es decir buscando el logaritmo que más se aproxima al dado y determinando el valor del número correspondiente.

Sea por ejemplo determinar el número correspondiente al logaritmo 2,4953.

La característica 2 nos indica que se trata de un número con 3 cifras enteras. El valor del número lo obtenemos buscando en la tabla de antilogaritmos el correspondiente a la

mantisa: $2,4953 = 312,8$

Ejemplo: antilog. 3,4562. A la mantisa corresponde el número 2859 y siendo la característica 3 será ...

antilog 3,4562 = 0,002359

En forma similar antilog 1,2645 = 0,1839

" 0,15 = 1,413

50.- VENTAJAS DE LOS LOGARITMOS:

El uso de los logaritmos permite la realización práctica de cálculos aritméticos que en otra forma sería de imposible realización. Especialmente al transformar una extracción de raíces en una división, una elevación a potencias en una multiplicación y una multiplicación o división en una suma o resta de logaritmos.

Esto es especialmente importante para el cálculo práctico de números índices, y especialmente en el Índice Geométrico que sólo puede construirse con la utilización de logaritmos.

51.- CAMBIO DE BASE DE LOGARITMOS:

Indicando por L el logaritmo natural de un número, N , resulta

$$e^L = N \quad \therefore L = \log_e N$$

si ahora tomamos logaritmos decimales en ambos miembros

$$L \log_{10} e = \log_{10} N$$

$$\therefore \log_{10} N = \log_e N \cdot \log_{10} e$$

$\log_{10} e$ es una constante llamada Módulo que se designa por la letra M y vale

$$M = \log_{10} e = 0,4342 \dots\dots$$

Resulta así que para pasar de los logaritmos naturales a los decimales basta multiplicar los primeros por la constante o Módulo.

$$\log_{10} N = \log_e N \cdot M = 0,4342 \log_e N$$

Recíprocamente es

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{M} = \frac{\log_{10} N}{0,4342 \dots} = 2,302585 \log_{10} N$$

- 48.-Hallar los antilogaritmos o números correspondientes a los siguientes logaritmos decimales: 3,8594; 6,7324; 1,14; 6,7589; 0,2837; 0,00042; 1,3782; 2,2643; 5,8271; 4,2900.
- 49.-Hallar los antilogaritmos correspondientes a los siguientes logaritmos: - 3,2457; - 0,2895; - 6,2530; - 3,0217.
- 50.-Expresar en forma de logaritmo decimal o vulgar los siguientes logaritmos naturales: 6,68461; 3,68888; 4,54329.
- 51.-Expresar en forma de logaritmo natural los siguientes logaritmos decimales: 1,2784; 5,3540; 0,2985.
- 52.-Resolver, utilizando logaritmos, las siguientes expresiones numéricas:

$$x = \sqrt[8,2]{\frac{365 \times 983 \times (64,5)^4}{0,893 \times (655)^2 \times (35,1)^{3,4}}}$$

$$y = \sqrt[8]{\left(\frac{41,4}{99,7}\right)^3 \left(\frac{395}{214}\right)^2 \left(\frac{67,5}{105,1}\right)^3}$$

$$z = \sqrt[32,5]{8 \times 41,5}$$

$$w = (1,085,5)^{\frac{35,7}{20,4}}$$

- 53.- Siendo $I_1 = 108,33$; $I_2 = 100,63$; $I_3 = 104,41$; $I_4 = 100,64$; $I_5 = 96,18$

hallar utilizando logaritmos la media geométrica simple de los índices anteriores.

Es decir calcular:

$$\sqrt[5]{108,33 \times 100,63 \times 104,41 \times 100,64 \times 96,18}$$

- 54.-En el ejercicio anterior siendo $q_1 = 0,5$; $q_2 = 0,2$; $q_3 = 0,15$;

$q_4 = 0,1$; $q_5 = 0,05$ las ponderaciones unitarias correspondientes a los números índices de los productos 1, 2, 3, 4, y 5 respectivamente, calcular utilizando los logaritmos la media geométrica ponderada de los índices señalados.

Debe en consecuencia calcularse:

$$(108,33)^{0,5} \times (100,63)^{0,2} \times (104,41)^{0,15} \times (100,64)^{0,1} \times (96,18)^{0,05}$$

- 55.- Estimar el logaritmo decimal del número 8,975,324,27
- 56.- Estimar el antilogaritmo correspondiente al logaritmo decimal 6,754328932.

Es decir para calcular el valor de un logaritmo natural basta dividir el logaritmo decimal por el módulo $0,4342$ o simplemente multiplicar por la constante $2,302585 = \frac{1}{0,4342}$ el valor de dicho logaritmo decimal.

Corresponde señalar que para el cálculo de las tablas de logaritmos decimales se parte de los logaritmos naturales multiplicados por el Módulo.

52.- CALCULO DE LOGARITMOS O ANTILOGARITMOS NO INCLUIDOS EN LAS TABLAS

En los casos en que sea necesario trabajar con mayor número de decimales, puede plantearse el problema de determinar el valor de un logaritmo no incluido en las tablas, En estos casos puede estimarse el valor de dicho logaritmo mediante procedimientos de interpolación elementales conforme se indica a continuación:

Sea por ejemplo estimar el logaritmo del número 660,358 utilizando una tabla con 5 decimales. La característica es desde luego = 5, siendo el problema calcular la mantisa respectiva.

Al número 6603 corresponde el logaritmo (mantisa): 81974 y al número 6604 corresponde el logaritmo (mantisa): 81981 en consecuencia por cada unidad de número corresponde una diferencia de 7 unidades en la 5ª cifra de la mantisa. Para una diferencia en el número de 0,58 corresponderá una diferencia en la mantisa de $7 \times 0,58 = 4,06$

Resulta así el logaritmo del número dado

$$5,81974 + 4,06 = 5,8197806$$

$$\therefore \log. 660,358 = 5,8197806$$

Un procedimiento similar se utiliza para resolver el problema inverso o sea estimar el antilogaritmo correspondiente a un número que no figura incluido en la tabla.

Sea, por ejemplo, estimar el número correspondiente al logaritmo 6,789352.

Siendo 6 la característica deducimos que se trata de un número con 7 cifras enteras. Utilizando una tabla común de mantisas con 5 decimales es:

$$\text{mantisa } 78930 = \text{número } 6156$$

$$\text{" } 78937 \text{ " } 6157$$

Es decir por una diferencia 7 unidades en la 5ª cifra decimal de la mantisa varía 1 unidad en la 4ª cifra del número. En consecuencia por una diferencia de 5,2 unidades en la 5ª cifra decimal de la mantisa la variación en el número será $\frac{5,2}{7} = 0,74285 \dots$

$$\text{Es entonces antilogaritmo } 6,789352 = 6.156,742,85$$

Ejercicios:

46.- Hallar los logaritmos decimales de los siguientes números enteros: 1; 2; 3; 9; 10; 29; 99; 101; 3,895; 75,990; 6,580.000.

47.- Hallar los logaritmos correspondientes a los siguientes números fraccionarios: 13,57; 6,953; 398,45; 1,007; 0,895; 0,073; 0,000354; 0,000023.

53.- SIMBOLOS UTILIZADOS EN FORMULAS DE NUMEROS INDICES.

En las fórmulas usuales para el cálculo de números índices se utilizan corrientemente diversos símbolos matemáticos que en general sintetizan las operaciones a realizar: sumas, productos, etc.- y facilitan así la fácil expresión analítica de las respectivas fórmulas.-

Veremos a continuación el significado y la aplicación práctica de los símbolos que mas comunmente se utilizan en números índices.

54.- FACTORIAL.

El factorial, simbolizado por un signo de exclamación: !, representa el producto sucesivo de todos los números enteros y positivos comprendidos entre la unidad y el número que figura a la izquierda de dicho signo:

Ejemplos:

$$5 ! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$8 ! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 =$$

$$1 ! = 1$$

$$n ! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots (n-1) \times n \quad (n: \text{entero y positivo})$$

$$(m.n) ! = m \cdot n (m \cdot n - 1)(m \cdot n - 2) \dots 2 \times 1$$

$$(m - n) ! = (m - n) (m - n - 1) (m - n - 2) \dots 2 \times 1$$

En los dos últimos ejemplos debe ser (m.n) y (m+n), enteros y positivos respectivamente, aún cuando m y n individualmente no lo sean.

El producto de sucesivos números fraccionarios puede expresarse en matemáticas por una de las denominadas integrales de Euler - (función gama), no teniendo sentido su expresión por un factorial.-

Se admite además por convención que es $0 ! = 1$

55.- SUMATORIO.

Con la letra sigma mayúscula Σ se simboliza el sumatorio - que representa un signo abreviado de una suma de términos entre dos límites fijados.- A la derecha de este signo se indica la expresión a sumar.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{n=4} n$$

que se lee suma de n o sumatorio de n- El primer valor de la suma - se indica en la parte inferior del signo de sumatorio (límite inferior) y en el ejemplo anterior es $n = 1$. - El último término de la suma (límite superior) se indica en la parte superior del sumatorio

y es en este ejemplo $n = 4$
 Resulta así, desarrollando el sumatorio indicado:

$$\sum_{n=1}^{n=4} n = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Usualmente no es necesario repetir en el límite superior la variable respectiva pues queda implícita, al figurar ya en el límite inferior del mismo

$$\therefore \sum_{n=1}^4 n = \sum_{m=1}^{n=4} n = 10$$

$$\sum_{m=1}^5 M^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Dada la importancia del sumatorio en números índices vamos a considerar las diversas formas en que puede presentarse.-

Así, el sumatorio puede referirse a un exponente como ser

$$\sum_{i=0}^3 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

Puede referirse también a un subíndice de una determinada expresión como es usual en las fórmulas de números índices y en estadística.

$$\sum_{s=1}^6 X_s = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

y tener un límite superior n no expresado en forma numérica, como ser:

$$\sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

donde p puede significar precio y la variable $i : 1, 2, 3, \dots, n$ los distintos artículos incluidos en el índice.-

Puede referirse también al producto de dos expresiones $Z_i \cdot Y_i$ como en la fórmula de la media aritmética donde X_i representa el atributo o variable e Y_i a la respectiva frecuencia:

$$\sum_{i=1}^4 X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + X_4 Y_4$$

o también como en un índice ponderado:

$$\sum_{i=1}^n P_i q_i = P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 + \dots + P_n q_n$$

56.- PROPIEDADES DEL SUMATORIO.

Siendo el sumatorio solo un signo representativo y abreviado de la suma, goza de todas las propiedades de la misma que fueron expuestas en las primeras clases.-

Es así en particular

$$\sum_{i=1}^5 a = a + a + a + a + a = 5a$$

y en general $\sum_{i=1}^n a = n \cdot a$

Es también

$$\sum_{i=1}^n K x_i = Kx_1 + Kx_2 + Kx_3 + \dots + Kx_n = K(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n K x_i = K \sum_{i=1}^n x_i$$

Resulta también

$$\sum_{i=1}^n (x_i \pm y_i \pm z_i) = \sum_{i=1}^n x_i \pm \sum_{i=1}^n y_i \pm \sum_{i=1}^n z_i$$

Es decir el sumatorio de la suma o resta de varias variables es igual a la suma o resta de los sumatorios de cada variable.

Puede utilizarse también el sumatorio para expresiones mas complejas como ser:

$$\sum_{i=1}^4 Y_i \log X_i = Y_1 \log X_1 + Y_2 \log X_2 + Y_3 \log X_3 + Y_4 \log X_4$$

$$\sum_{i=1}^N P_i \log q_i = P_1 \log q_1 + P_2 \log q_2 + P_3 \log q_3 + \dots + P_n \log q_n$$

expresiones éstas que se utilizan corrientemente en números índices.

Ejercicios.

57) $6! =$

58) $(4,5 + 3,5) ! =$

59) $\sum_{X=1}^6 X =$

60) $\sum_{n=0}^3 5 N^2 =$

(61) $\sum_{i=1}^4 P_i Z_i =$

M.i.

15^o Conferencia

12/9/1955

5.7. SUMATORIOS DOBLES:

Puede referirse también una suma de términos referida a dos variables: i, j utilizando al efecto un doble sumatorio -Es así

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} = P_{1,1} + P_{1,2} + P_{1,3} + \dots + P_{1,m} + P_{2,1} + P_{2,2} + P_{2,3} + \dots + P_{2,m} + P_{3,1} + P_{3,2} + \dots + P_{n,1} + P_{n,2} + P_{n,3} + \dots + P_{n,m}$$

Cuando las variables están separadas en distintas letras que por ejemplo, se multiplican entre sí, pueden considerarse como constantes, con referencia a una de las variables, y sacarse de uno de los sumatorios.-

Ejemplos:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_i Y_j = \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^m Y_j$$

$$\sum_m \sum_n (A_m) (B_n) = \sum_m (A_m) \sum_n (B_n)$$

En la última expresión $\sum_m (A_m)$ indica el sumatorio de (A_m) para todos los valores de la variable m .-

También puede expresarse un sumatorio, utilizando como límites una desigualdad como ser:

$$\sum_{x \leq a} x^2$$

es decir extendiéndose el sumatorio a todos los valores de la variable x que cum-

plan la condición de ser menores ó a lo sumo iguales a a .-

5.8.- SERIES

Una serie puede expresarse mediante un sumatorio cuyo límite superior es infinito - así la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} M = 1 + 2 + 3 + \dots$$

constituye una serie indefinida divergente ya que su suma crece más allá de cualquier número por grande que él sea. Es decir vale infinito.- Podemos así caracterizar una serie de divergentes como aquella cuya suma es infinita.-

Una serie convergente es en cambio aquella formada por infinito número de términos y cuya suma es un número finito y determinado.-

Así constituyen series convergentes las expresiones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots = 0,333\dots = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

cuyas sumas son respectivamente $\frac{1}{3}$ y 2.-

Cuando la suma de una serie no es una cantidad determinada, la serie se denomina oscilante

Ejemplo: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

Cuya suma alternativamente vale 0 ó 1 según que el número de términos considerados sea par ó impar:-

El hecho de que el término general de una serie tienda a cero no significa que la misma sea convergente- Así por ejemplo sea la denominada serie armónica formada por la suma de las recíprocas de todos los números enteros y positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

El término general de esta serie es $\frac{1}{n}$ que cuando n tiende a infinito, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.-

Sin embargo es una serie divergente ya que agregando términos, se verifica

$$\sum_{n=3}^4 \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=5}^8 \frac{1}{n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=9}^{16} \frac{1}{n} = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{y así sucesivamente}$$

cada suma parcial sucesiva de 16, 32, 64, ... términos es mayor a

$\frac{1}{2}$ - Pero $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ es un valor que puede hacerse supe-

rior a cualquier número por grande que sea, es decir vale infinito y siendo la serie armónica mayor que la anterior su suma es infinita - en consecuencia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es una serie divergente.-

Una expresión general del tipo de

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = x^0 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

constituye una serie indefinida que puede ser convergente; divergente u oscilante según el valor que se asigne a x .-

Así para $x = -1$ la serie es oscilante $1-1+1-1+1-\dots$

1º) Para $x \geq 1$ la serie es divergente.- Ya para $x = 1$, es $1+1+1+1+\dots = \infty$

2º) Para $0 < x < 1$ la serie es convergente y su suma vale $\frac{1}{1-x}$

5.9.- PRODUCTORIO

Otro símbolo frecuentemente utilizado en las fórmulas de números índices es el denominado productorio que simboliza el producto ó multiplicación de un conjunto de números ó expresiones algebraicas y se simboliza por la letra pi ($\prod$).-

En forma similar al sumatorio los límites de variación se indican en la parte inferior y superior del símbolo.-

Es así:

$$\prod_{n=3}^5 n = 3 \times 4 \times 5 = 60$$

y en forma similar

$$\prod_{i=0}^3 2^i = 2^0 \times 2^1 \times 2^2 \times 2^3 = 1 \times 2 \times 4 \times 8 = 64$$

La variable del productorio puede referirse también a un subíndice como en las siguientes expresiones usuales en estadística y en nú-

meros índices:

$$\prod_{i=1}^4 P_i = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4$$

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \dots X_n$$

También, pueden variar simultáneamente dos expresiones como en los ejemplos que se dan a continuación y que corresponden al denominado índice geométrico

$$\prod_{i=1}^5 X_i = X_1^{y_1} X_2^{y_2} X_3^{y_3} X_4^{y_4} X_5^{y_5}$$

$$\prod_{i=1}^n P_i^{q_i} = P_1^{q_1} P_2^{q_2} P_3^{q_3} \dots P_n^{q_n}$$

6.0.- SIMPLIFICACION DE UN PRODUCTORIO POR LOGARITMOS

El cálculo numérico de productorios como los indicados precedentemente es prácticamente imposible de realizar en forma directa.- Por tal razón se facilita su cálculo mediante la aplicación de los logaritmos:

Sea

$$Z = \prod_{i=1}^n P_i^{q_i} = P_1^{q_1} P_2^{q_2} \dots P_n^{q_n} \text{ tomando logaritmos resulta}$$

$$\log. \prod_{i=1}^n P_i^{q_i} = \log. (P_1^{q_1} P_2^{q_2} \dots P_n^{q_n})$$

$$\therefore \log. \prod_{i=1}^n P_i^{q_i} = q_1 \log P_1 + q_2 \log P_2 + q_3 \log P_3 + \dots + q_n \log P_n$$

pero el 2º miembro de esta igualdad es simplemente, conforme se vio en el punto 5.6.

$$\sum_{i=1}^n P_i \log. q_i$$

resulta así

$$\log \prod_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n P_i \log q_i$$

lo que permite expresar un productorio en función de un sumatorio de logaritmo.- Es así como puede calcularse prácticamente el número Índice Geométrico.-

En forma similar

sea $Z = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i^{y_i}}}$ expresión del denominador promedio geométrico.- Tomando logaritmos es:

$$\log Z = \log \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i^{y_i}}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \log X_i}{\sum_{i=1}^n Y_i}$$

Ejercicios

62) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n} =$

63) $\sum_{n=1}^{\infty} X^n$ para $X = 10$

64) $\frac{5}{\prod Z^2} =$

65) $\prod_{i=1}^3 x_i^{y_i}$

66) expresar aplicando logaritmos

$$\sqrt[6]{\frac{3}{\prod_{Z=1} Z^2}}$$

M.1.

16^o Conferencia

13/9/1955

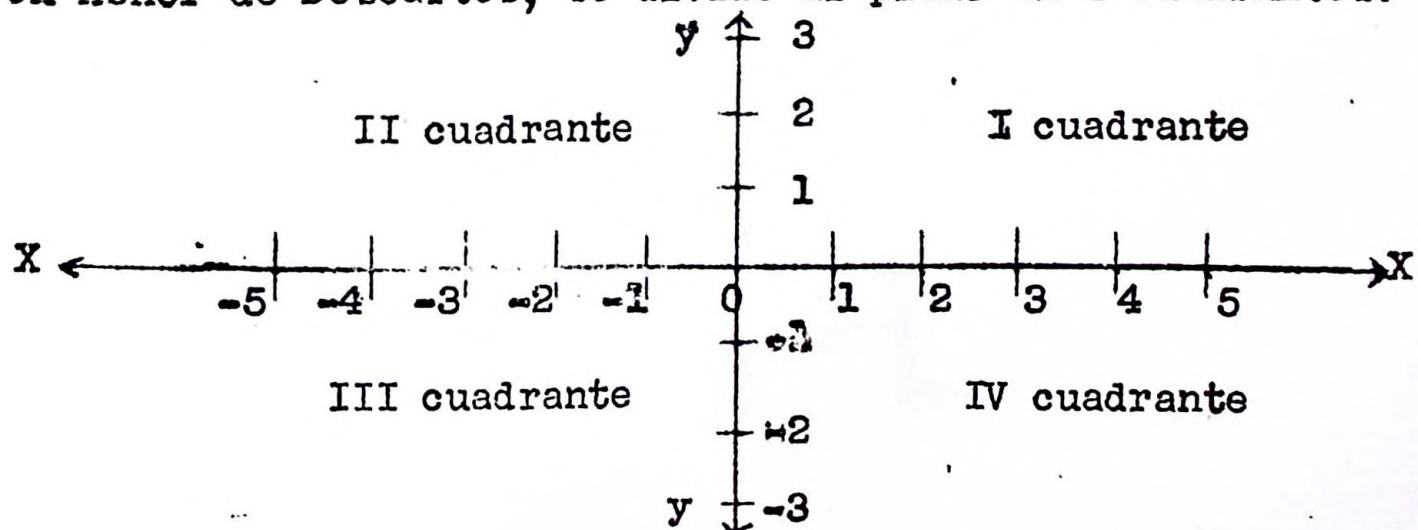
6.1.- NOCIONES DE GEOMETRIA ANALITICA

Esta rama de las matemáticas se debe al filósofo Descartes y se basa fundamentalmente en la denominada geometría de las coordenadas.- La geometría analítica permite aplicar los métodos del álgebra y del análisis matemático a la geometría con mutuo beneficio para ambas ramas de la ciencia.-

Se pone allí de manifiesto la total identificación entre determinadas expresiones analíticas y algebraicas y su representación gráfica mediante rectas, circunferencias, elipses y curvas en general.- Por otra parte la representación gráfica de las series estadísticas, tanto las de frecuencia como las cronológicas, se fundamentan en los principios generales de la geometría analítica.-

6.2. Coordenadas cartesianas

Mediante el sistema de coordenadas cartesianas, denominadas así en honor de Descartes, se divide al plano en 4 cuadrantes:



Existen 2 ejes que se cortan en un punto denominado origen.- El de
M.1. XVI

nominado ejes de las X es simplemente el eje de los números reales, positivos y negativos a que nos referimos ya anteriormente (punto 2) Sobre este eje, denominado de las abcisas, se marcan eligiendo como unidad una determinada magnitud, valores negativos, a la izquierda del cero u origen y valores positivos, a la derecha del origen en forma similar a la ya indicada para los números.-

La perpendicular que pasa por el origen cero y donde al plano con centro cuadrante se denomina eje de las ordenadas o eje de las y. Del origen O hacia arriba los valores de y son positivos y del origen hacia abajo los valores de y son negativos.-

6.3. Puntos en el plano.

Cada punto en el plano cartesiano queda identificado por 2 números; uno ordenado simbolizado por y y una abcisa indicada por la letra X.

Así por ejemplo el punto

$$M \begin{cases} X = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

significa el punto del plano, correspondiente al primer cuadrante, cuya abcisa vale 2 y cuya ordenada es igual a 3.-

Es fundamental en consecuencia el conocimiento de los signos de abcisas y ordenadas correspondientes a cada cuadrante y que surgen de lo expresado en los párrafos precedentes-Resulta así

1er	cuadrante	X : positivo	y : positivo
2º	cuadrante	X : negativo	y : positivo
3er	cuadrante	X : negativo	y : negativo
4º	cuadrante	X : positivo	y : negativo

Considerando esto podemos representar en un plano los puntos: A; B;

C; D y E cuyas coordenadas cartesianas indicamos a continuación:

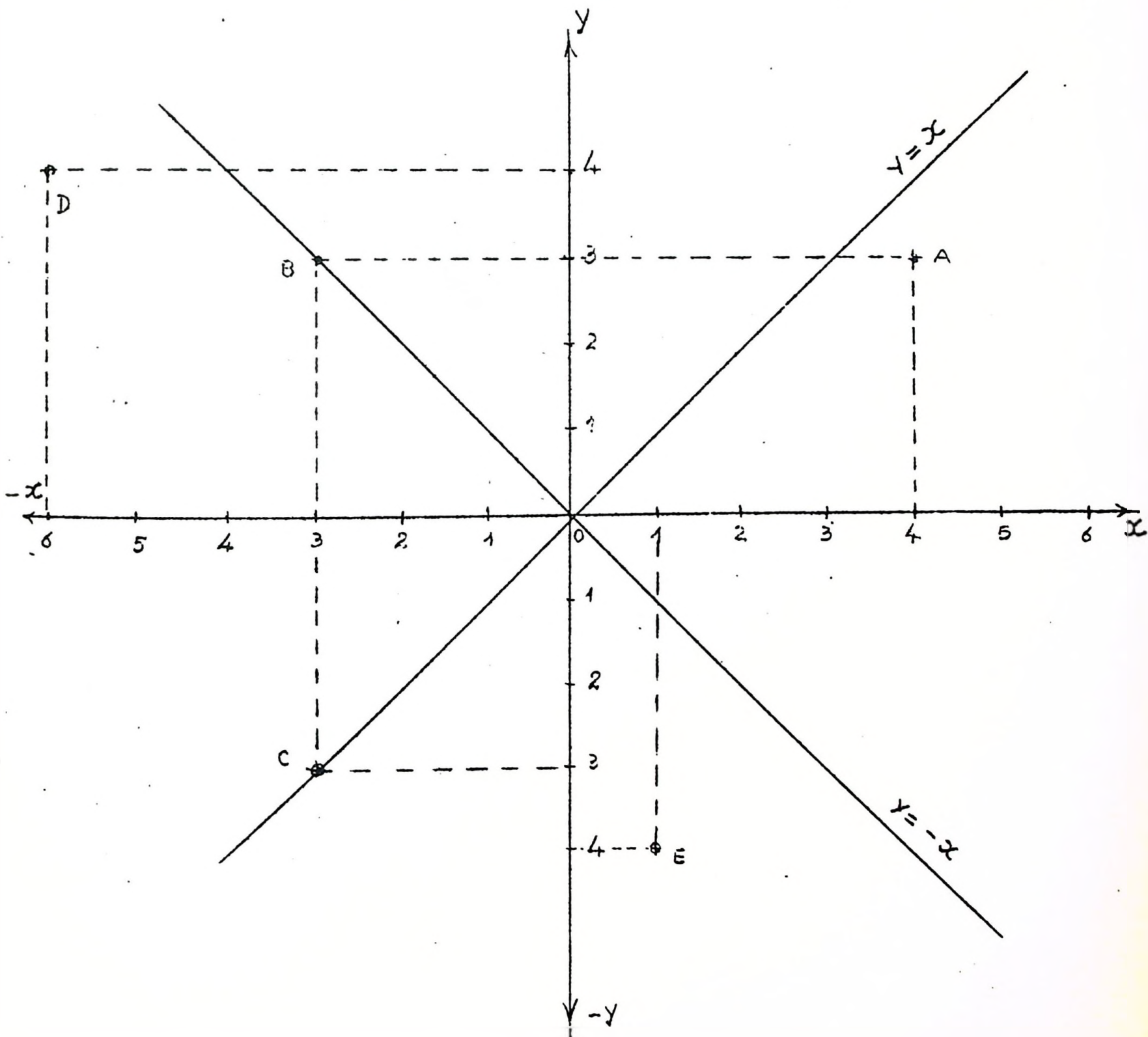
$$A \begin{cases} X = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} X = -3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} X = -3 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} X = -6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$E \begin{cases} X = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$



En el adjunto gráfico N° 1 se indica la representación gráfica de los 5 puntos señalados.-

6.4.- Representación gráfica de una recta

Consideremos ahora la expresión $y = X$. Si damos valor a X vemos que en virtud de la igualdad establecida y varía en igual forma.-

Por ejemplo si $X = 1$ es $y = 1$ si $X = -5$ $y = -5$; $X = 0$ $y = 0$ uniendo los puntos correspondientes al plano cuyas coordenadas son por ejemplo $(4;4)$ $(3;3)$ $(2;2)$ $(1;1)$ $(0;0)$ $(-1;-1)$... $(-5;-5)$ obtenemos una línea recta que pasa por el origen y que corresponde a la representación grafica de la expresión o función $y = X$.-

En forma similar podemos representar otras funciones cuya expresión algebraica sea conocida, dando para ello valores a X y determinando los correspondientes valores de y .-

Sea $y = -X$ esta recta figura también representada en el gráfico N° 1 pasando por el origen y dividiendo en 2 partes iguales al 2º y 4º cuadrante.-

65. RECTAS QUE PASAN POR EL ORIGEN.

Hemos visto que la representación gráfica de las funciones $y = x$ y $y = -x$ nos da dos líneas rectas que pasan por el origen.- En forma similar, pasa también por el origen cualquier función del tipo de

$y = a \cdot x$ donde a es un número real cualquiera, positivo o negativo, entero o fraccionario, y la representación de estas funciones de 1er. grado determina en el plano de coordenadas cartesianas líneas rectas.- Como ejemplo consideremos las expresiones $y = 3x$ y $y = -1/4 x$. Dando valores a x obtenemos los valores correspondientes a y

x	$y = 3x$	x	$-1/4 x = y$
-2	$y = -6$	-2	$y = 0,5$
-1	$y = -3$	-1	$y = 0,25$
0	$y = 0$	0	$y = 0$
1	$y = 3$	1	$y = -0,25$
2	$y = 6$	2	$y = -0,5$

cuya representación gráfica figura en el gráfico N° 2.

El parámetro a correspondiente a la ecuación de la recta

$$y = a x$$

se denomina coeficiente angular y representa la tasa de crecimiento uniforme de la recta.-

Es allí $a = \frac{y}{x}$ y por ejemplo de la recta $y = 3x$

se verifica que $a = 3 = \frac{y}{x} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \dots$

En $y = -1/4 x$ es $a = \frac{y}{x} = -\frac{1}{4} = -\frac{0,5}{2} = -\frac{0,25}{1} = -\frac{0,25}{1} = \dots = -0,25$

$$y = 3x$$

$$y = \frac{1}{4}x$$

$$y = 3x - 1$$

x	y
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6

x	y
-2	0,5
-1	0,25
0	0
1	-0,25
2	-0,5

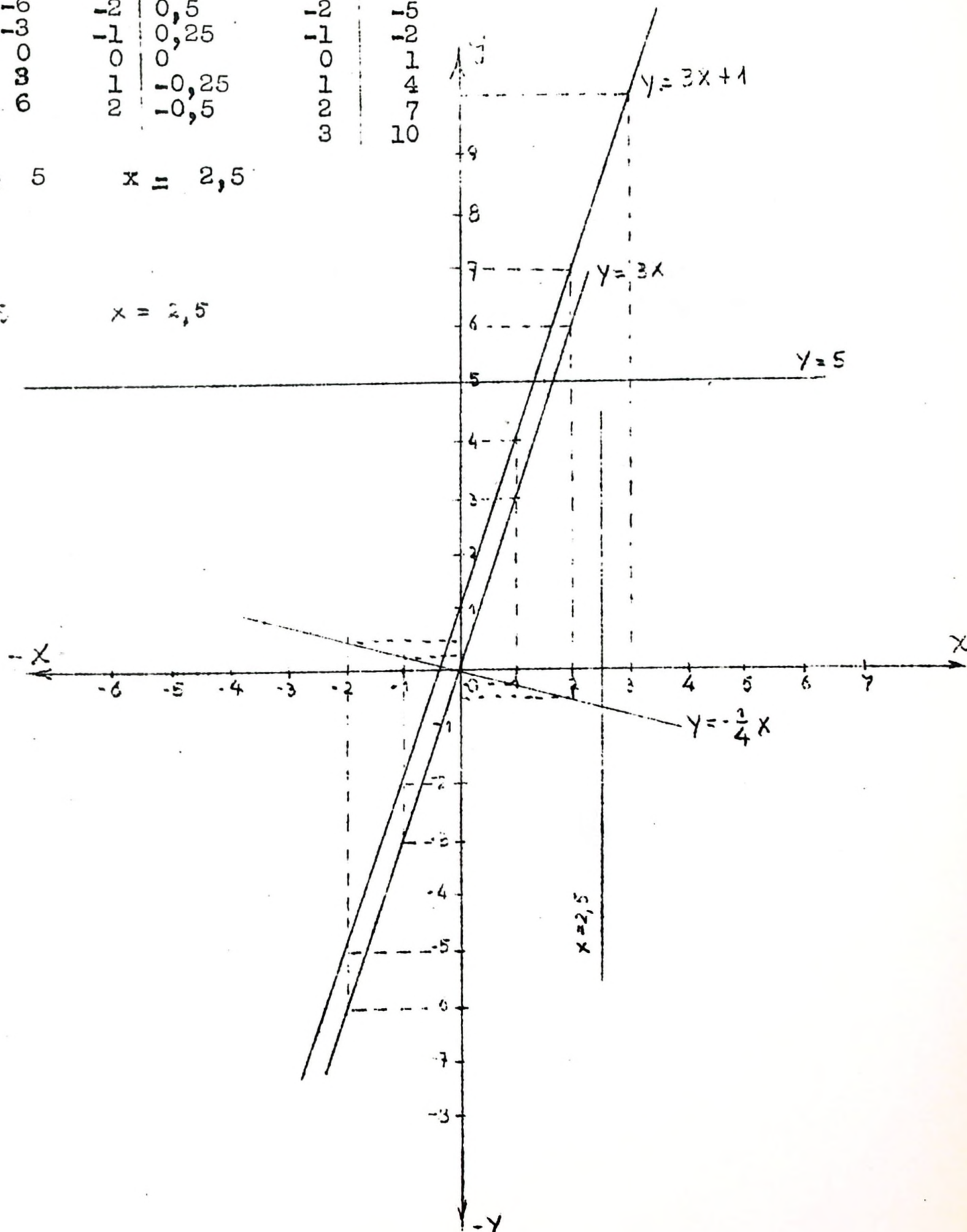
x	y
-2	-5
-1	-2
0	1
1	4
2	7
3	10

$$y = 5$$

$$x = 2,5$$

$$y = 5$$

$$x = 2,5$$



66. RECTAS QUE NO PASAN POR EL ORIGEN.

Sea representar la ecuación $y = 5$ - Esto significa que para cualquier valor que se fije a x el valor de y es constante e igual a 5.- En consecuencia la representación gráfica de esta función es una recta paralela al eje de las x , correspondiendo el valor de ordenada $y = 5$, conforme puede observarse en el gráfico N° 2.

Representemos la función $y = 3x + 1$

Damos para ello valor a x y obtenemos los correspondientes a y

x	$y = 3x + 1$	Se trata como puede apreciarse en el gráfico N° 2 de una recta que no pasa por el origen.-
0	1	La expresión general de una recta de este tipo es $y = ax + b$ donde a es el coeficiente angular y b la ordenada correspondiente al origen.-
1	4	
2	7	
3	10	

Puede advertirse que esta ecuación es una expresión de carácter general y que las rectas que pasan por el origen, analizadas en el punto anterior, constituyen el caso particular de ser $b = 0 \therefore y = ax$

Ejercicios

67. Señalar, en un eje de coordenadas cartesianas los puntos $A \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

$$B \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

68) Representar graficamente las rectas $y = 2x$ $y = -2x$

69) Representar graficamente las funciones $y = 2x - 3$; $y = -4x + 3$

$$y = 5x - 8 ; \quad y = -2x - 1$$

dando valores a x y calculando las correspondientes a y .-

M.I.

XVII.

67.- Situación de 2 rectas en el plano

La ecuación de la recta es:

$$y = a_1 x + b_1$$

supongamos otra recta de ecuación

$$y = a_2 x + b_2$$

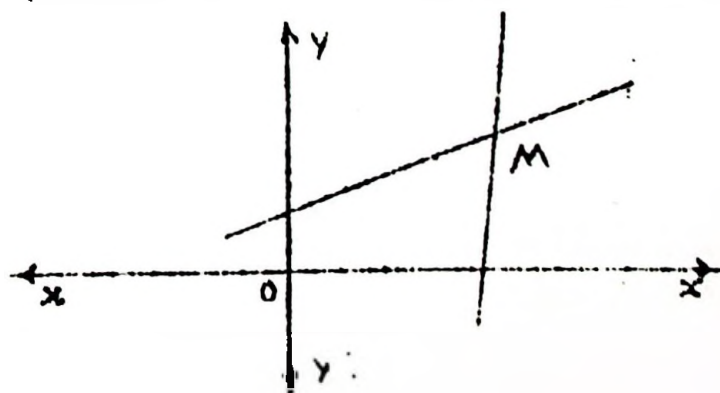
Con respecto a estas 2 ecuaciones pueden presentarse las siguientes alternativas

- 1) Si es $a_1 = a_2$ $b_1 = b_2$ las dos rectas son iguales o confundidas.-
- 2) Si es $a_1 = a_2$ $b_1 \neq b_2$ las dos rectas tienen igual coeficiente angular y por consiguiente son rectas paralelas.
- 3) Si es $a_1 \neq a_2$ las dos rectas se cortan en un punto del plano.
- 4) Finalmente y como caso particular del punto anterior si es $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

las rectas son perpendiculares.

68.- Intersección de dos rectas

En el caso de ser $a_1 \neq a_2$ las dos rectas se cortan en un determinado punto del plano. Interesa determinar las coordenadas de dicho punto M



Es indudable que en el punto de intersección M coinciden las coordenadas de ambas rectas y en consecuencia es allí

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2$$

planteándose así una ecuación de primer grado con una incógnita cuya solución es:

$$a_1 x - a_2 x = b_2 - b_1$$

$$x (a_1 - a_2) = b_2 - b_1 \quad \therefore x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

y reemplazando el valor hallado para x en cualquiera de las dos ecuaciones dadas, obtenemos el correspondiente valor de y , quedando así determinadas las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.

69.- Aplicación práctica

Determinar las coordenadas del punto de intersección de las siguientes rectas:

$$y = 2x + 5$$

$$y = 3x - 4$$

siendo $2 \neq 3$ es indudable que ambas rectas se cortan en algún punto del plano, es allí

$$2x + 5 = 3x - 4$$

$$\therefore 5 + 4 = 3x - 2x = x \quad \therefore x = 9 \text{ es la abscisa del}$$

punto de intersección, Reemplazando en la primera ecuación

$$y = (2 \times 9) + 5 = 23$$

y en la segunda

$$y = (3 \times 9) - 4 = 23$$

resulta en consecuencia que las coordenadas del punto de intersección son:

$$M \begin{cases} x = 9 \\ y = 23 \end{cases}$$

Determinar el punto de intersección de las rectas

$$y = 2x - 4$$

$$y = -\frac{x}{4} + 1$$

Es allí

$$2x - 4 = -\frac{x}{4} + 1$$

$$\therefore 2x + \frac{x}{4} = 1 + 4 = 5$$

$$\therefore \frac{9}{4}x = 5 \quad \therefore x = \frac{4 \times 5}{9} = \frac{20}{9} = 2,222 \dots$$

$$y = 2x - \frac{20}{9} - 4 = -\frac{4}{9}$$

$$y = -\frac{20}{9} \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{4}{9} = 0,444\dots$$

Resulta en consecuencia

$$M \begin{cases} x = 2,222 \dots \\ y = 0,444 \dots \end{cases} \text{ conforme puede apre-}$$

ciarse en el respectivo gráfico inserto en el punto 68.-

70. Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando tienen igual coeficiente angular

Ecuación de todas las rectas paralelas a

$$y = 7x - 8$$

$y = 7x + b$ donde b es un número cualquiera, entero o

fraccionario, racional o irracional.

71. Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando se verifica:

$$a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

es decir sus coeficientes angulares son recíprocos o inversos y de signo contrario.- La demostración de esto se basa en principios de trigonometría, materia ésta que no incluimos en el presente curso.

Aplicación

Hallar la ecuación de todas las rectas perpendiculares a

$$y = 5x + 3$$

Es entonces

$$y = -\frac{1}{5}x + b \text{ la ecuación buscada, siendo } b \text{ un número}$$

entero, fraccionario, positivo o negativo.

Indicar la ecuación de una recta que sea perpendicular a

$$y = -\frac{1}{2}x - 8$$

y que pase por el origen.- La ecuación es

$$y = 2x$$

$$\text{ya que } a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

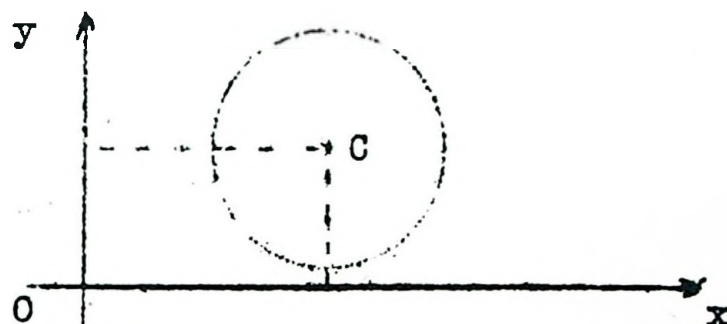
y al pasar por el origen es $b = 0$

19ª Conferencia
27/septiembre/955

72.- Representación gráfica de funciones de 2º grado.

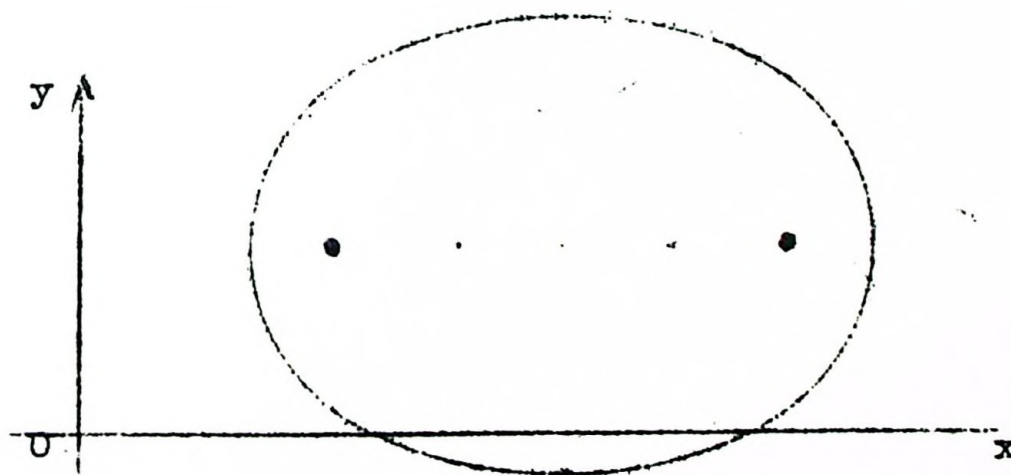
La representación gráfica de las funciones de 2º grado origina como casos particulares el estudio de las denominadas secciones cónicas: circunferencia, parábola, hipérbola y elipse conocidas ya desde la época de los antiguos griegos y cuyas diversas propiedades y características fueron analizadas y estudiadas por ellos desde un punto de vista geométrico.

Si se corta un cono por un plano paralelo a la base la figura resultante es un círculo que puede representarse en un eje de coordenadas cartesianas, y cuyo centro puede o no coincidir con el origen (0;0)



Análogamente si el plano es oblicuo la figura resultante es la curva denominada elipse, que se caracteriza por disponer de 2 focos. Se ha demostrado en Astronomía que el movimiento de los planetas alrededor del sol corresponde a una elipse, uno de cuyos focos es el sol.

La representación gráfica de la elipse es la que se indica a continuación:



ta dar valores a la variable x y luego calcular los correspondientes a Y .-

Sean por ejemplo las siguientes expresiones de 2º grado:

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + 4$$

$$y = x^2 - 4$$

Dando valores a x tendremos

x	$y = x^2$	$y = x^2 + 4$	$y = x^2 - 4$
0	0	4	- 4
± 1	1	5	- 3
± 2	4	8	0
± 3	9	13	5
± 4	16	20	12

En el gráfico nº 3 figura la representación gráfica de estas expresiones que constituyen parábolas.- Puede observarse que dado que x está elevado al cuadrado el valor de y es el mismo para valores de x de igual magnitud pero de signo contrario.- Una función que cumple esta propiedad se denomina función par o simétrica.-

Puede advertirse en el gráfico nº 3 que las 3 parábolas son similares, cortando al eje de las y , para $x = 0$, en distintas ordenadas: 4, 0, -4 respectivamente, que constituyen las respectivas ordenadas al origen.-

73.- Intersección de una recta con una parábola

Trazada una ecuación de 2º grado en un eje de coordenadas y una recta pueden presentarse estas 3 hipótesis: 1º) Que la recta corte a la parábola en dos puntos 2º) Que la recta toque a la parábola en un sólo punto (tangente) y 3º) Que la recta no corte ni toque a la parábola, es decir, sea exterior a la misma.

Caso 1 Supongamos la parábola

$$y = x^2 - 4 \quad \text{y la recta} \quad y = 2x - 1$$

Si la recta corta a la parábola, en el punto o puntos de intersección coinciden las coordenadas de ambas, es entonces

$$x^2 - 4 = 2x - 1$$

$$\therefore x^2 - 2x - 4 + 1 = x^2 - 2x - 3 = 0$$

ecuación de 2º grado cuyas raíces son

$$x_1 = \frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3} = 1 + \sqrt{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3} = 1 - 2 = -1$$

Para $x = 3$ es

$$y = x^2 - 4 = 3^2 - 4 = 5$$

$$y = 2x - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

Para $x = -1$ es

$$y = (-1)^2 - 4 = -3$$

$$y = 2(-1) - 1 = -3$$

Los puntos de intersección de la recta y la parábola son en consecuencia:

$$M \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$N \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

conforme puede apreciarse en el gráfico nº 3.-

Caso 2º Sea la función de 2º grado

$$y = x^2 + 5x + 2 \quad \text{y la recta } y = x - 2$$

En los puntos de intersección

$$x^2 + 5x + 2 = x - 2$$

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} - 4} = -2 \quad (\text{una sola raíz real})$$

Para $x = -2$

$$y = (-2)^2 + 5(-2) + 2 = 4 - 10 + 2 = -4$$

$$y = -2 - 2 = -4$$

Es entonces

$$M \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

las coordenadas del punto de contacto entre la recta y la parábola.

Caso 3º

$$y = x^2 + 4 \quad y = 2x - 1$$

$$\therefore x^2 + 4 = 2x - 1$$

$$\therefore x^2 - 2x + 5 = 0$$

Resulta $x = +\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} - 5}$ raíces imaginarias, es decir la

recta no corta a la parábola conforme puede verse en el gráfico nº3

Ejercicios

70.- Determinar gráfica y analíticamente el punto de intersección de las rectas:

$$y = 0,5x + 2$$

$$y = x + 1$$

$$y = -2x + 10$$

$$y = 3x - 5$$

71.- Indicar la ecuación de 3 rectas que sean paralelas a $y = 6x + 1$

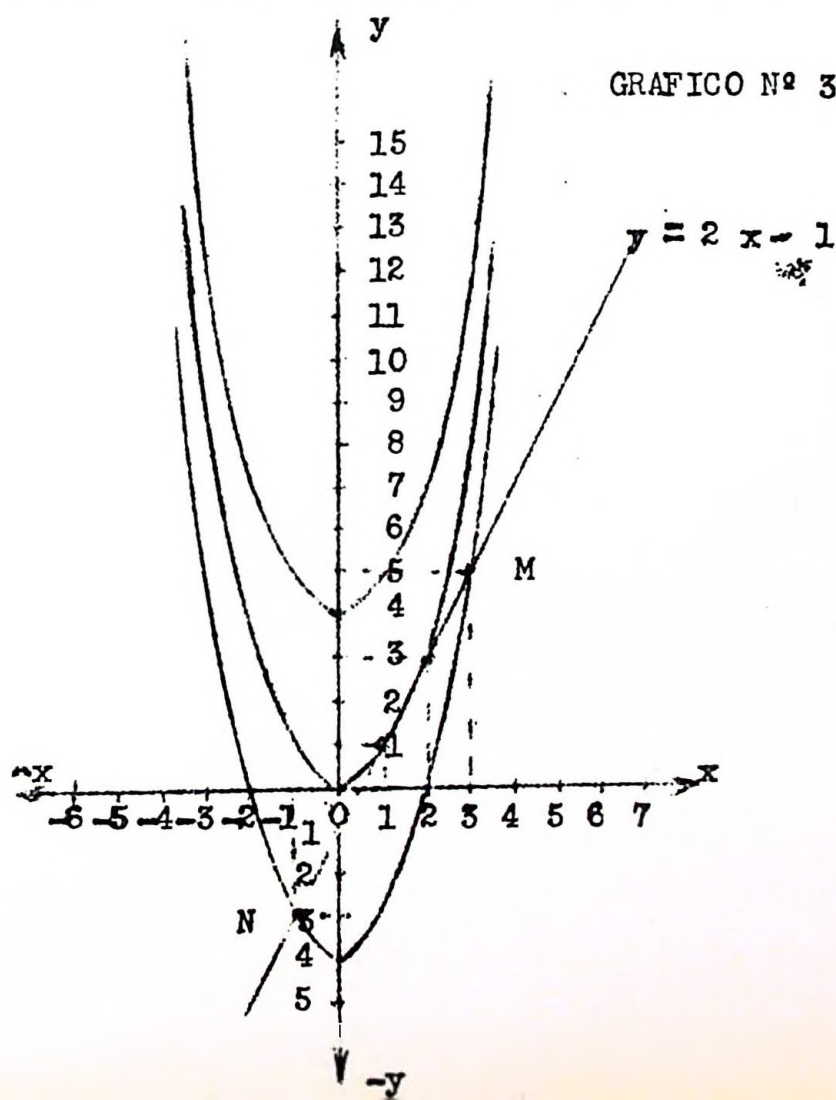
72.- Indicar la ecuación de 1 recta que sea perpendicular a $y = \frac{1}{5}x - 8$

73.- Representar gráficamente la expresión $y = 2x^2 - x + 1$

74.- Determinar las coordenadas del punto de intersección de la ecuación de 2º grado $y = x^2$ y la recta $y = 2x - 2$

75.- Determinar las coordenadas del punto de intersección de la ecuación

$$y = x^2 - 3x + 1 \quad \text{con la recta} \quad y = 3x + 5$$



74.- REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES SUPERIORES

En forma similar a la indicada para las funciones de 2º grado, puede efectuarse la representación gráfica en un eje de coordenadas cartesianas de una función de 3er. grado. Es decir dando valores a X y calculando los correspondientes a la función y.

La forma general de un polinomio de 3er. grado es:

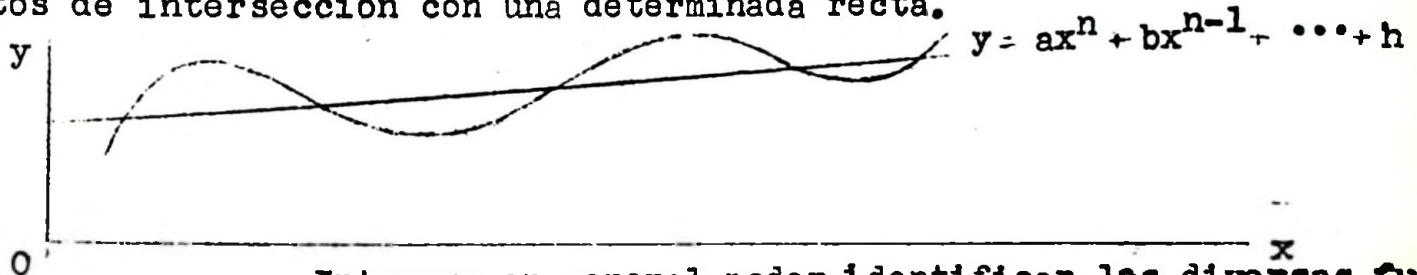
$$y = a x^3 + b x^2 - c x + d$$

donde a, b, c y d son los 4 parámetros de la función. En el ejemplo que se da a continuación figura la representación gráfica de la función de 3er. grado cuya ecuación es:

$$y = -0,00169 x^3 - 0,0155 x^2 + 0,5341 x + 11,41$$

y con la cual se ha realizado el denominado en estadística matemática "ajustamiento" de los precios del trigo en Buenos Aires durante el lapso 1895 a 1935. Como puede observarse una recta puede cortar a una función de 3er. grado en 3 puntos.

En general una función de grado n puede tener n puntos de intersección con una determinada recta.



Interesa en general poder identificar las diversas funciones con la representación gráfica de sus curvas respectivas en g. analítica y viceversa, trazada la curva identificar la función. Esto es fácil para la recta, parábola, etc., pero es más dificultoso para otros tipos de curvas de ecuación más compleja.

En general a cada función le corresponde una determinada curva y cada curva responde a la representación gráfica de una determinada ecuación.

Veremos ahora la representación gráfica de algunas funciones matemáticas importantes.

En la figura nº 1 se ha representado la denominada hipérbola equilátera, cuya ecuación es $y = \frac{1}{x}$

La función nº 2, representa una función trigonométrica periódica $y = \text{seno } x$ (sinusoide).

En la figura nº 3 se ha representado la función exponencial $y = e^x$ o $y = a^x$ $a > 1$

La figura nº 4 indica la representación gráfica de la función logarítmica, $y = \log x$. Esta función es recíproca o inversa de la anterior, conforme puede observarse comparando los respectivos gráficos, y teniendo en cuenta que si $y = \log x$ es $x = a^y$.

75.- REPRESENTACION GRAFICA DE CURVAS DE FRECUENCIA:

Las representaciones gráficas indicadas precedentemente corresponden a funciones algebraicas, trascendentes o trigonométricas usuales. En estadística existen funciones de ecuación más compleja y que ofrecen variadas características.

Así en la figura 5 se representa una función simétrica o par con respecto al eje de las y . Una función de este tipo es la denominada curva normal o de Gauss de importancia fundamental en cálculo de probabilidades y cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La figura nº 6 representa una curva de frecuencia asimétrica positiva, cuya "cola" se extiende por el eje positivo de las abscisas.

En la figura nº 7, en cambio, la "cola" señala hacia los valores negativos de x y la curva respectiva es "asimétrica negativa".

Cada curva de las indicadas tiene sus características y modalidades propias, existiendo numerosas variedades cuyo análisis y estudio corresponde a la ciencia estadística. Determinados fenómenos estadísticos se adaptan a determinados tipos de curvas y viceversa.

Existen también otros tipos de curvas más complejas como las denominadas "bimodales" (ver figura 8) que comunmente corresponden a la superposición de dos curvas de frecuencias, tal como puede ocurrir cuando un determinado conjunto se integra con elementos pertenecientes a dos razas o tipos distintos.

Asimismo el crecimiento de la población, y de algunos otros organismos similares o vinculados a la misma, se representa por una función de saturación, denominada curva logística, cuya representación gráfica se indica en la figura 9, y cuya ecuación es.

$$y = \frac{L}{1 + e^{\frac{b-x}{a}}}$$

REPRESENTACION GRAFICA DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

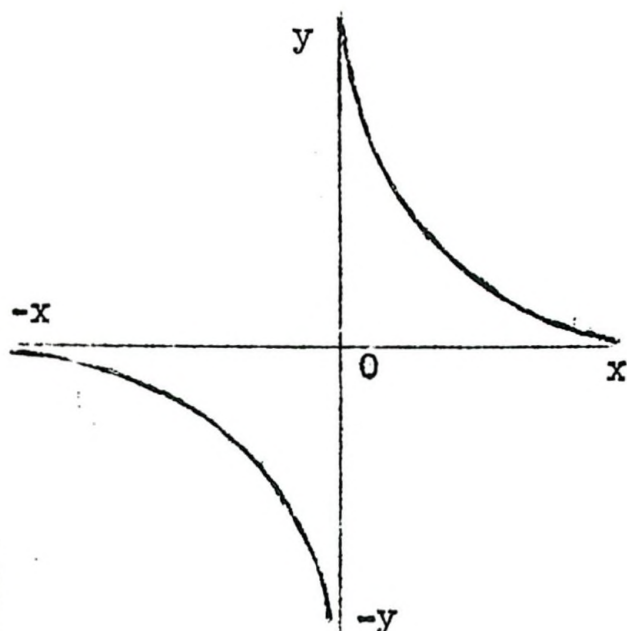


Fig. 1.- Hipérbola equilátera

$$y = \frac{1}{x}$$

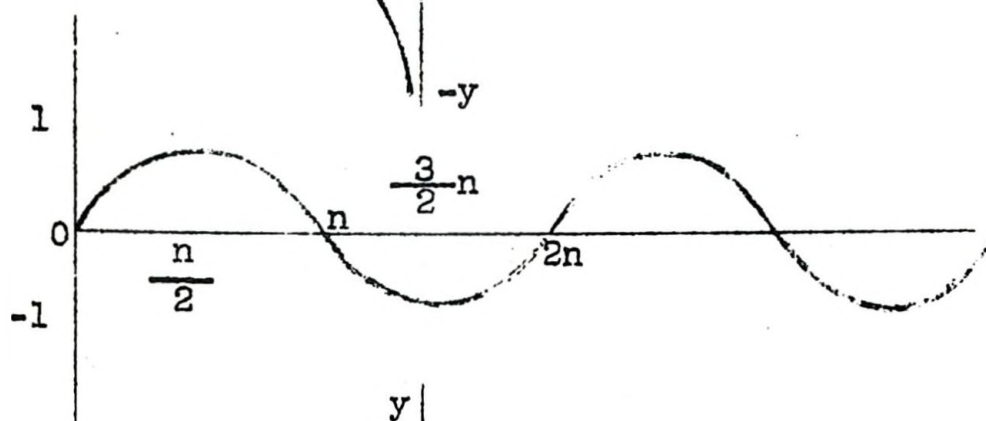


Fig. 2.- Sinusoide

$$y = \sin x$$

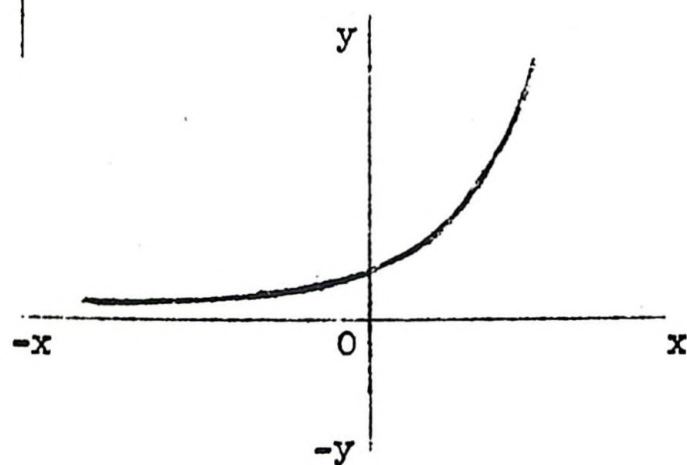


Fig. 3.- Función exponencial

$$y = a^x \quad a > 1$$

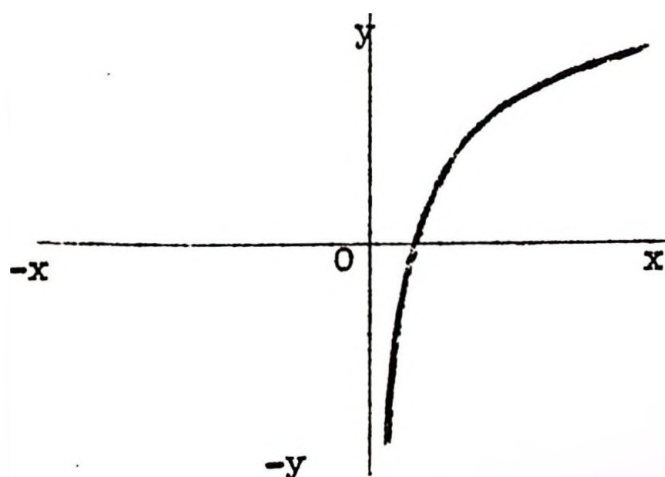


Fig. 4.- Función logarítmica

$$y = \log x$$

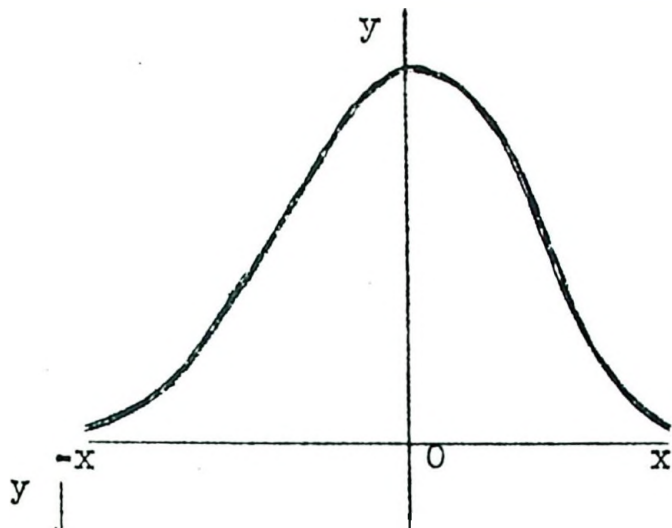


Fig. 5.- Curva simétrica (función par)
Ecuación de la curva normal o de Gauss utilizada en Estadística y cálculo de probabilidades.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Fig. 6.- Curva asimétrica positiva

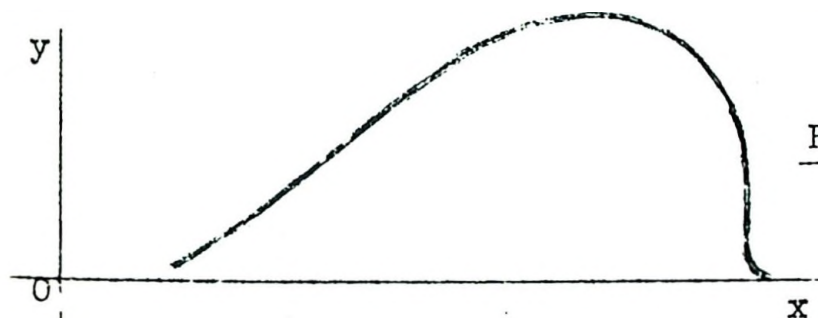


Fig. 7.- Curva asimétrica negativa

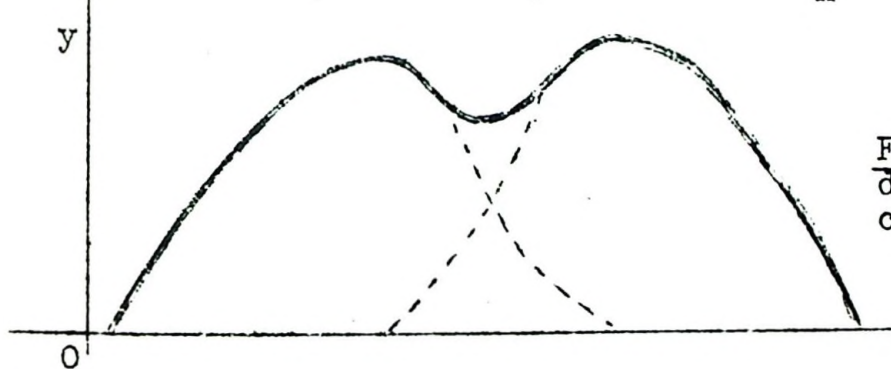


Fig. 8.- Curva bimodal, formada por la superposición de dos curvas de frecuencia.

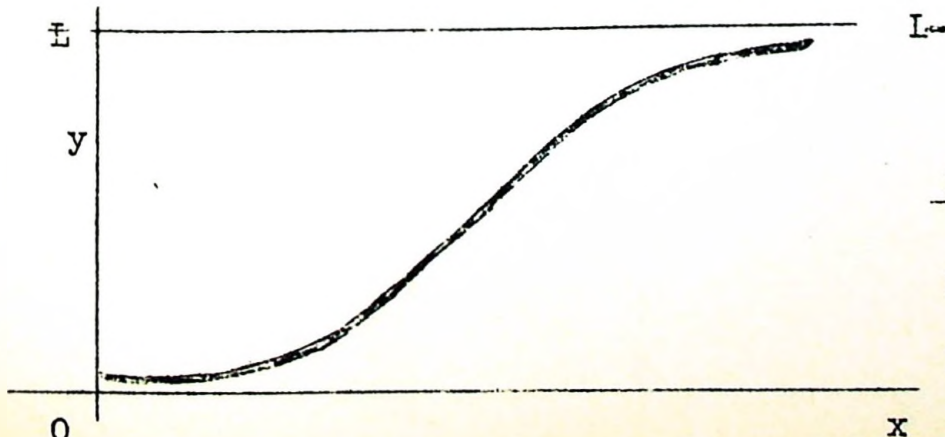


Fig. 9.- Curva logística o de saturación

Ecuación

$$y = \frac{L}{1 + e^{\frac{b-x}{a}}}$$

76.- CRECIMIENTO DE UNA FUNCION

En el caso de la función lineal o de 1º grado se ha visto que cuando el coeficiente angular de la recta es $a > 0$ o la recta es creciente; si en cambio es $a < 0$, es decir coeficiente angular negativo la recta es decreciente - para $a = 0$ es $y = b$, resulta una recta paralela al eje de las x .

En el caso de una curva se pueden presentar diversas alternativas que someramente vamos a considerar.

Así una curva cuya forma es del tipo de la figura 10 se denomina cóncava con respecto al eje de las abscisas y en ella se verifica que las ordenadas de la curva son menores en valor absoluto a las ordenadas de la tangente.

Es en cambio convexa con respecto al eje de las x cuando las ordenadas de la curva son mayores en valor absoluto a las ordenadas de la tangente, tal como en el ejemplo que se indica en la figura 11 adjunta.

77.- PUNTOS DE INFLEXION

Cuando una función pasa de cóncava a convexa o viceversa, la tangente atraviesa a la curva. Tales puntos se denominan puntos de inflexión y figuran señalados como A , A' y A'' en los tres gráficos de la figura 12. En el primer gráfico el crecimiento de la función que es acelerado pasa a ser retardado y en el tercero pasa a ser un crecimiento retardado a uno acelerado.

78.- MAXIMOS Y MINIMOS.

Se dice que la función $y = f(x)$ tiene en un punto M un valor máximo relativo, cuando el valor de y en ese punto es mayor que los valores a su izquierda y a su derecha en un cierto entorno del punto M .

La función en consecuencia en el máximo deja de ser creciente para pasar a ser decreciente. (ver figura 13).

En forma análoga la función tiene en un punto m un valor mínimo relativo cuando el valor de y en ese punto es menor que los valores a su izquierda y a su derecha, en un cierto entorno del punto m . (ver al respecto la figura 14).

En este caso una función que es decreciente pasa a ser creciente como ejemplo pueden citarse las 3 parábolas que figuran representadas en el gráfico 3, las que pasan por un mínimo para el valor de $x = 0$.

No debe confundirse los máximos o mínimos relativos de una función con el valor máximo o mínimo absoluto de la misma.

Así una función puede disponer de varios mínimos y máximos relativos y también de varios puntos de inflexión tal como se observa en la figura 15 adjunta, donde en M y M' la función pasa por dos máximos relativos, en m y m' por dos mínimos relativos y en I , I' o I'' por tres puntos de inflexión. Puede observarse allí asimismo que dentro del intervalo considerado el valor máximo absoluto corresponde al punto b y el valor mínimo al punto a , no coincidiendo estos valores máximos o mínimos absolutos con ninguno de los máximos o mínimos relativos.

79.- GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

En forma similar al plano, un punto en el espacio puede ser representado considerando tres dimensiones y el valor de sus respectivas coordenadas.

Así utilizando tres ejes de coordenadas cartesianas denominados x , y , z respectivamente, podemos representar graficamente el punto M cuyas coordenadas son por ejemplo:

$$M \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ conforme puede apreciarse en la figura 16.}$$

El análisis de figuras o cuerpos, como ser la esfera, el elipsoide, etc. forman parte de la denominada geometría analítica del espacio.

En forma general, y aún cuando en este caso no pueda efectuarse su representación gráfica, un punto en un hiperespacio de n dimensiones se expresa por $M(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ indican sus respectivas coordenadas.

80.- REPRESENTACION GRAFICA DE SERIES CRONOLOGICAS

Dentro de la estadística metodológica las series cronológicas son aquellas que miden los distintos valores de un fenómeno estadístico a través de la variable tiempo. Así constituyen series cronológicas los precios anuales de un determinado producto, las cifras del volumen mensual exportado de otro artículo; los datos de las ventas semanales de una firma comercial, la temperatura registrada en un determinado lugar durante cada una de las 24 horas del día, etc. En todos estos casos la variable considerada es el tiempo expresado en años, meses, semanas, días u horas.

De lo anterior surge la importancia fundamental de las series cronológicas dentro de la teoría y la práctica de los números índices ya que constituyen series cronológicas los precios, las ponderaciones, y los propios números índices de cualquier naturaleza siempre que se expresen a través del tiempo.

La representación gráfica de una serie cronológica se realiza siguiendo las normas básicas de la geometría analítica. Sobre el eje de las x se puede representar la variable tiempo y sobre el eje de las y las frecuencias u observaciones respectivas.

Cada dato u observación representa por consiguiente un punto, cuya ordenada indica el valor de la respectiva frecuencia y cuya abscisa señala el tiempo. Uniendo por trazos rectos los distintos puntos se tiene representada la marcha general de la respectiva serie cronológica.

Como ejemplo, en la figura N°17 adjunta se han representado los precios por kilo vivo de los navillos en el mercado de Liniers durante los años 1945 a 1954 inclusive en m\$n. En la escala que figura a la derecha del gráfico se indican los números índices porcentuales respectivos sobre la base del año 1945 = 100.

tinuación:

Las cifras respectivas son las que se indican a con

Año	Precio novillo m\$n.	Indice porc centual=B ₂ se 1945=100	Año	Precio	Número índice
1945	0,3781	100	1950	0,7530	199,15
1946	0,4096	108,33	1951	1,1966	316,47
1947	0,4973	131,53	1952	1.6845	445,52
1948	0,5268	139,33	1953	1,9707	521,21
1949	0,6266	165,72	1954	2,0457	541,05

M.1. XXI

Fig. 10

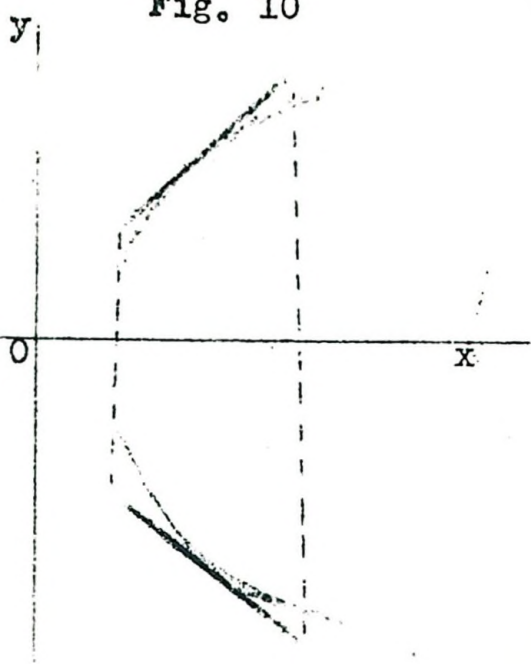


Fig. 11

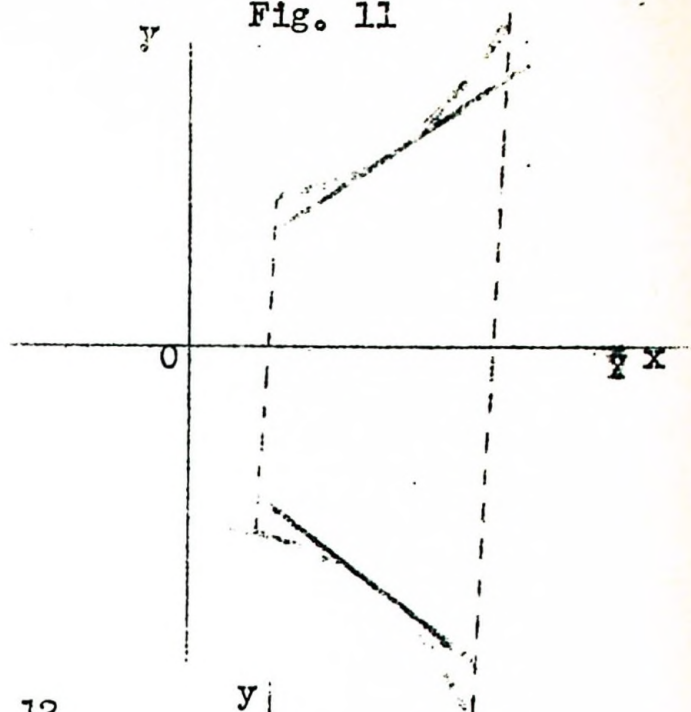


Fig. 12

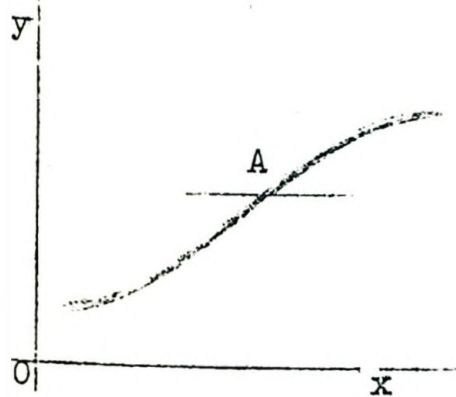
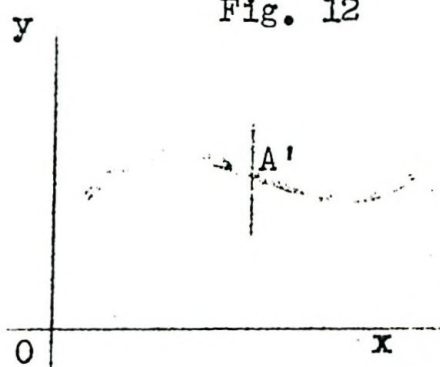


Fig. 13

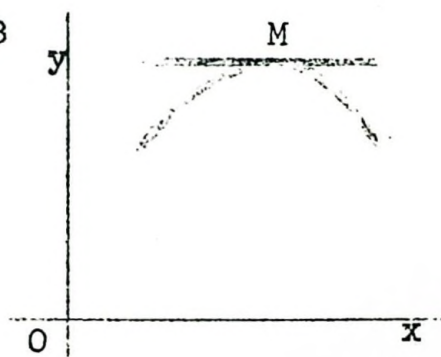


Fig. 14

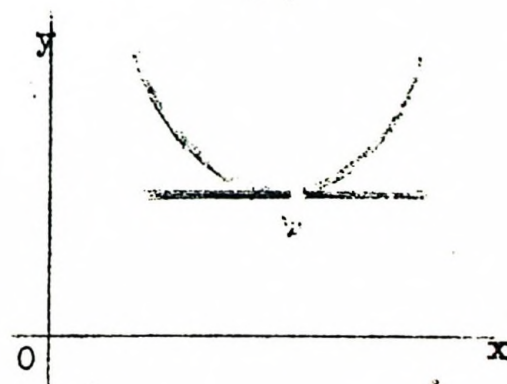
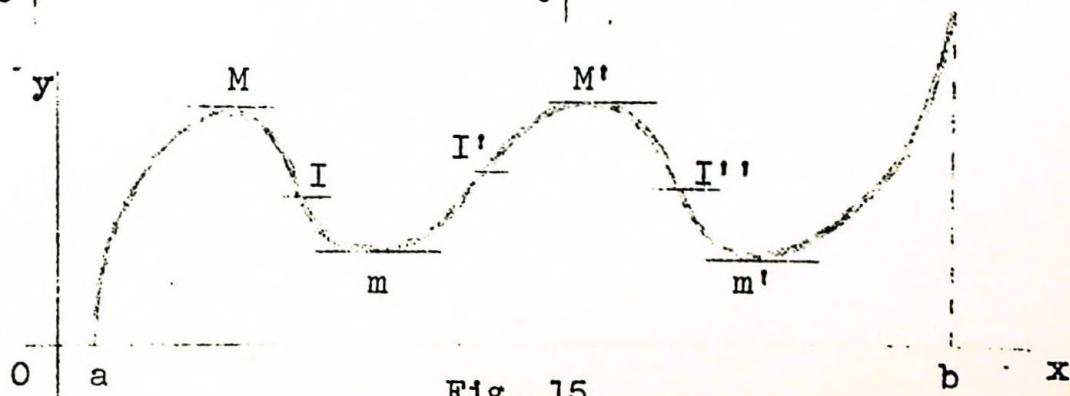


Fig. 15



$$M \begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

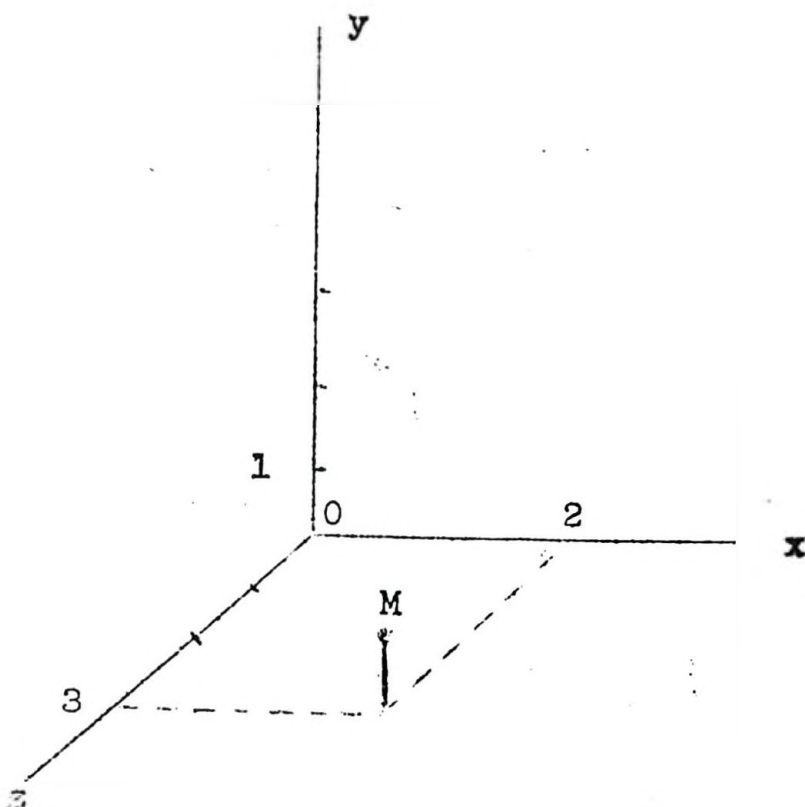


Fig. 16

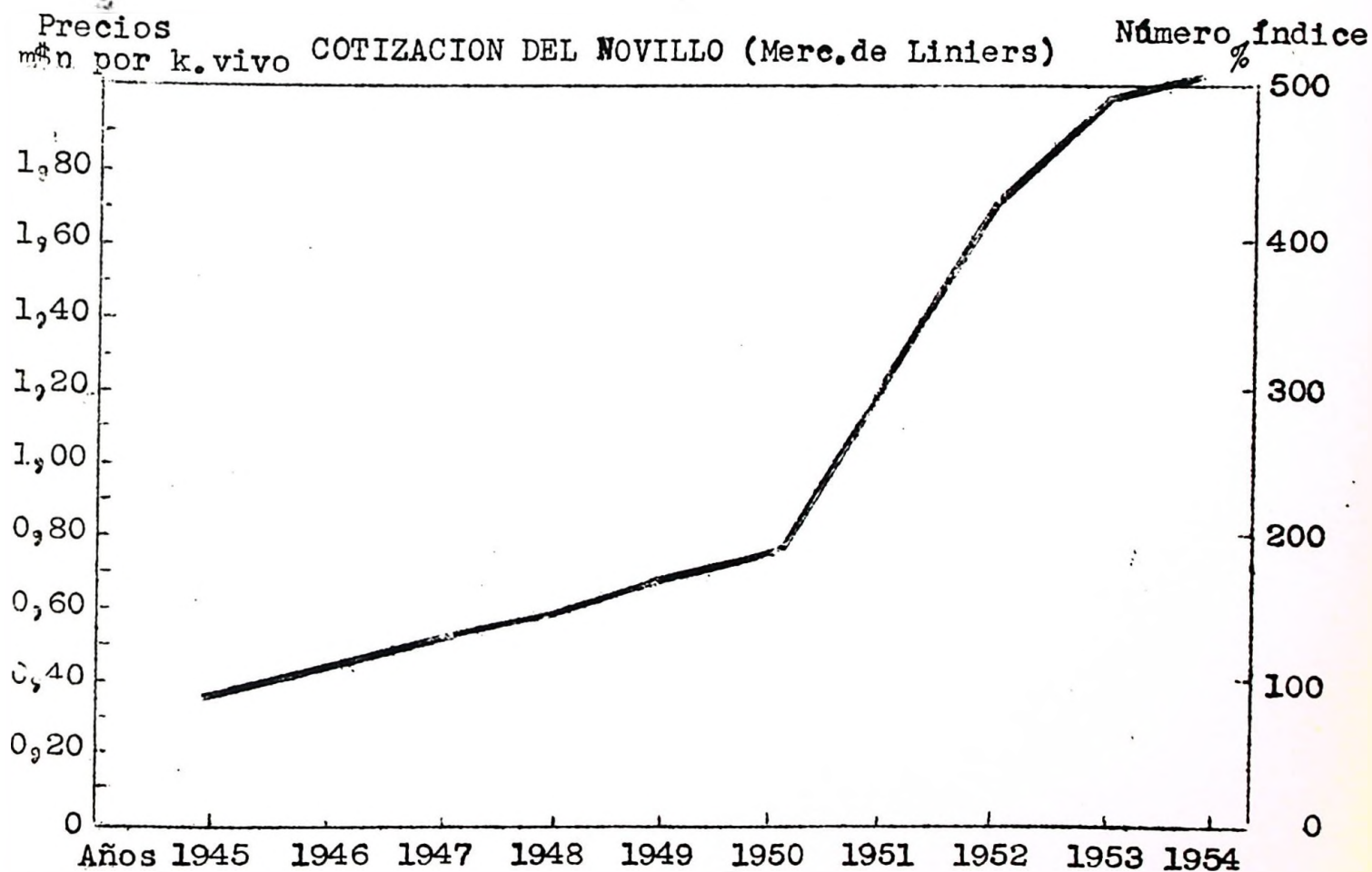


Fig. 17

CONCEPTOS GENERALES DE ANALISIS MATEMATICO

81 Constantes y variables

Dentro de los conceptos generales del análisis matemático el concepto de constante es uno de los mas simples.- Constante es toda aquella expresión o número que no varía.- Así el número 5 expresa una magnitud perfectamente determinante y siempre constante.-

Igualmente $\pi = 3,14159 \dots$ es una cantidad constante perfectamente conocida, lo mismo que $e = 2,7181828 \dots$

A veces una constante puede no tener un valor conocido en una ocurrencia dada, en cuyo caso esta constante se denomina parámetro y se simboliza algebraicamente por una de las primeras letras del alfabeto: a, b, c, d ...

En contraposición al concepto de constante tenemos el de variable, que es toda expresión que puede tomar distintos valores.-

Así en la desigualdad

$$4 \leq x \leq 10$$

x es una variable que puede tomar valores comprendidos entre 4 y 10 ambos inclusivos.-

En la expresión

$\sum_{n=1}^4 n$ n es la variable que toma valores comprendidos entre 1 y 4.-

Una variable puede ser continua o discontinua.- Es continua cuando dado dos valores cualesquiera admite siempre un valor intermedio: Ejemplos de variables continuas son en estadística la altura, el peso, la edad y dentro de la teoría de los números índices los distintos precios de un artículo.-

Sin variables discontinuas aquellos que solo admiten valores particulares, por lo general valores enteros, como ser en estadística el número de hijos tenidos por mujeres, el número de hijos vivos, el número de pisos de un edificio o el número de habitantes de una casa, etc.-

En todos estos casos la variable solo admite como valores números enteros y positivos: 0, 1, 2, 3, 4 ...

82 Función = Su concepto

Una función es una variable y de pendiente de otra variable x , de modo que cada valor de x corresponda un valor de y .-

Así por ejemplo la superficie de un cuadrado es función de la longitud del lado; siendo y dicha superficie y x la longitud del lado resulta

$$y = x^2$$

donde y es la función y x se denomina la variable independiente. A la función y también se la denomina variable dependiente.-

La superficie del círculo es función del radio respectivo resulta así

$y = \pi r^2$ donde r es la variable independiente, es decir que a cada valor del radio corresponderá un valor para y o sea una superficie determinada para el círculo.-

Las funciones anteriores son funciones explícitas cuya ley o relación matemática o ecuación es bien conocida.- Existen otras expresiones en la vida real cuya ley no se conoce en forma explícita.-

Por ejemplo a mayor precio menor demanda.- A mayor rédito mayor impuesto, etc.- En general estos tipos de funciones son de difícil reducción a fórmulas matemáticas.-

83 -Símbolos utilizados para representar funciones

Cuando la función no es explícita como ser

$$y = x^2 ; y = \pi r^2$$

$$y = 3x + 4 ; y = x^2 + 2x - 8 \quad y = a^x \quad y = \sqrt[3]{x}$$

$y = \log_{10} x$, para no citar sino expresiones ya estudiadas se puede representar en general en la forma siguiente.-

$$y = f(x)$$

que se lee y igual a función de x .

También se usa la siguiente notación

$$y = F(x) \quad y = g(x) \quad y = \varphi(x)$$

84 -Funciones implícitas

Son aquellas en las cuales no se hallan expresamente separadas las variables dependientes e independientes

Ejemplo $y x + 4 = 5$

$$\therefore y x = 1$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{función explícita}$$

Las verdaderas funciones implícitas son aquellas que no es posible expresarlas en forma explícita, como ser

$$x y^5 + 2xy - 1 = 0$$

$$y = ?$$

85 -Valores de una función

Para determinar los distintos valores de una función es necesario dar distintos valores a la variable independiente.- A cada valor de la variable independiente corresponderá un determinado valor de la función.-

Esto ya se ha realizado al estudiar geometría analítica y representar gráficamente las funciones de 1º y 2º grado.- Así por ejemplo

$$f(0)$$

indica el valor que toma la función cuando $x = 0$.- Análogamente $f(-4)$ es el valor de la función correspondiente a $x = -4$.-

Este procedimiento es análogo para determinar los valores correspondientes a cualquier clase de función.-

86 -Función par o simétrica

Dijimos que era aquella que tomaba iguales valores por valores de la variable de igual valor absoluto pero de distinto signo.- Es entonces en una función par

$$f(x) = f(-x) \quad \text{Ejemplo } y = x^2 \quad f(4) = f(-4) = 16$$

87 -Límites

Hemos visto ya al estudiar los números que es:

$$0,3333 \dots = \frac{1}{3}$$

$$\text{o mas exactamente } \lim_{n \rightarrow \infty} 0,333 \dots 3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{en forma similar } \lim_{n \rightarrow \infty} 0,999 \dots 9 = 1$$

$$\text{En forma análoga donde la serie } S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \text{ en sumas } \rightarrow 2$$

Es decir que puede aproximarse S a 2 tanto como se desee

$$\lim S = 2$$

o tambien $(S-2) < \delta$ donde δ puede ser tan pequeño como se desee
Se dice que la función $y = f(x)$ tiene el límite l , para $x = a$, cuando la diferencia $y - l$ tomada en valor absoluto, se conserva arbitrariamente pequeña, tomando x suficientemente próxima al número a .-

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x^4 - 5} = \frac{1 + 1}{2 - 5} = -\frac{2}{3}$$

La función $y = j(x)$ es continua en el punto $x = a$, cuando el valor $j(a)$ que toma en el es también un límite

$$\lim_{x \rightarrow a} j(x) = j(a)$$

Cuando no se cumple esta condición la función es discontinua en el punto a .

88 - Funciones de varias variables

Los ejemplos anteriores se refieren a una sola variable.- Existen funciones que dependen de 2 o mas variables.- Así un número índice y depende de precios y ponderaciones es así $y = j(p, q)$ y en forma similar

$$y = j(x, z, w) \text{ por ejemplo } y = 3x^3 z^2 + 2 xwz - zw^3$$

que depende de las variables independientes x, z, w .- Una función de este tipo solo podría ser representada en un espacio de 4 dimensiones

89.- INFINITESIMO:

Un infinitésimo es una variable que tiende a cero.

Es así infinitésimo

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

En el caso anterior de que $x \rightarrow 0$, se denominan infinitésimo de 2º orden a x^2 ; de 3er orden a x^3 , de orden n a x^n .

La suma finita de infinitésimos es un infinitésimo.

Así $S = x^2 + 3x^3 + 9\sqrt{x}$ Cuando $x \rightarrow 0$ es infinitésimo ya que cada uno de estos sumandos puede hacerse tan pequeño como se desea.

El producto cociente de un infinitésimo por una constante es igual a un infinitésimo

$$k \cdot x = \delta \quad \text{donde } \delta \text{ es un infinitésimo.}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\text{Siendo } \lim y = l$$

resulta $y - l = \delta$ donde δ es un infinitésimo que tiende a cero y en consecuencia es

$$y = l + \delta$$

90.- LIMITES DE SUMAS Y PRODUCTOS DE VARIABLES:

El límite de la suma de varias variables es igual a la suma de los límites de cada una de ellas.

Sean las variables y, z, w , cuyos límites son respectivamente l_1, l_2, l_3 , resulta así

$$y = l_1 + \delta_1$$

$$w = l_3 + \delta_3$$

$$z = l_2 + \delta_2$$

$$\therefore y + z + w = (l_1 + l_2 + l_3) + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) =$$

de donde pasando al límite,

$$\lim (y + z + w) = l_1 + l_2 + l_3$$

ya que $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ es un infinitésimo

El límite de un producto de variables es el producto de los límites de los factores.

$$\text{Sea } y = l_1 + \delta_1 \quad z = l_2 + \delta_2$$

$$\text{resulta } yz = l_1 l_2 + l_1 \delta_2 + l_2 \delta_1 + \delta_1 \delta_2$$

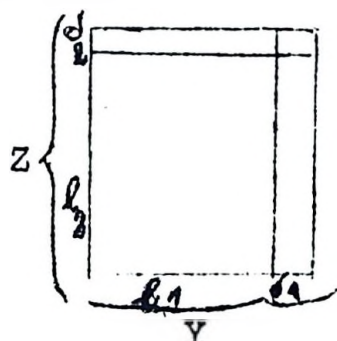
$$\therefore \lim yx = l_1 l_2$$

Ya que el producto de una expresión por un infinitésimo es otro infinitésimo y la suma de infinitésimos es también infinitésimo.

Y en general resulta:

$$\lim (y. z....w) = l_1 l_2 \dots l_n$$

gráficamente puede construirse un rectángulo cuyos lados son respectivamente



Z, y donde puede verse gráficamente el valor de los productos $l_1 \delta_2$; $l_2 \delta_1$, $\delta_1 \delta_2$ y como cuando δ_1 δ_2 tienden a cero es:

$$\begin{aligned} \lim yz &= l_1 l_2 & \text{ya que los rectángulos y el cuadrado tienden a cero.} \\ \delta_1 &\rightarrow 0 \\ \delta_2 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

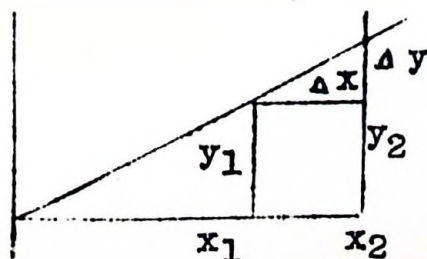
91.- LIMITE DE UN COCIENTE:

El límite de un cociente de funciones es el cociente de sus límites respectivos.

$$\lim \frac{y}{z} = \frac{l_1}{l_2} \text{ siendo } \lim y = l_1 \quad \lim z = l_2$$

92.- CONCEPTO DE LA DERIVADA:

Consideremos una recta que pasa por el origen. Su ecuación es $y = ax$ y tomemos dos puntos en la misma.



$$\begin{aligned} \text{Es allí } y_2 &= ax_2 + \Delta y \quad \therefore \Delta y = y_2 - y_1 \\ x_2 &= x_1 + \Delta x \quad \therefore \Delta x = x_2 - x_1 \end{aligned}$$

y conforme se ha visto y demostrado

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{mide el crecimiento de la función y}$$

representa el coeficiente angular de una recta.

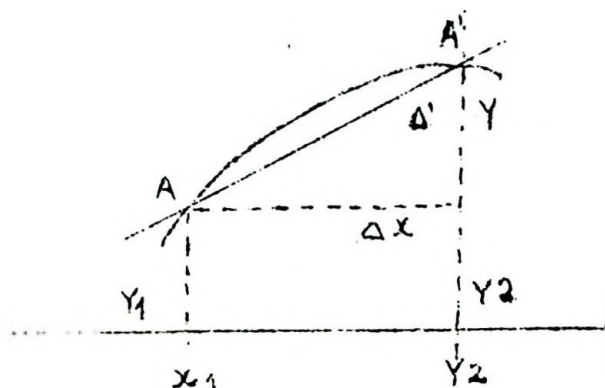
En forma general es:

$y = j(x)$ una función continua, a un incremento en la variable independiente x , corresponderá un incremento en la función y Es decir es:

$$y + \Delta y = j(x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = j(x + \Delta x) - j(x) \quad \text{y resulta} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{j(x + \Delta x) - j(x)}{\Delta x}$$

El cociente de los incrementos finitos de la función y de la variable.



El cálculo diferencial puede definirse como el estudio sistemático de las razones de incremento de las funciones. Podemos calcular en particular el incremento de la función:

$$y = x^3$$

$$\text{Es } y = x^3$$

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\therefore \Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$y \text{ es } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Se define a la derivada de una función continua, como límite del cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Es así

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{j(x + \Delta x) - j(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = j'(x)$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$ A' tiende a ~~el~~ valor A y la secante AA' se transforma en tangente en A.- La derivada de la función $y = j(x)$ para cada valor x, es la pendiente al gráfico de la función en el punto de abscisa x.

93.- Cálculo de Derivadas

Sea el ejemplo $y = x^3$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\text{Es entonces } \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$$

ya que $3x\Delta x$ y $(\Delta x)^2$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ son infinitésimos.-

$$\text{Es entonces } y = x^3 \quad y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Si $y = k$ (constante) es $\Delta y = 0$ y por consiguiente es nula la derivada de una constante cualquiera.

Si $y = x$ es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$

$$y + \Delta y = x + \Delta x \quad \therefore \Delta y = \Delta x$$

La derivada de la variable independiente es igual a 1.

$$y = k j(x) \quad \text{es} \quad y' = k j'(x)$$

La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Sea $y = u \pm v \pm w$ donde $u = j(x)$ $v = y(x)$ $w = h(x)$

Entonces

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$$

La derivada de una suma o resta de funciones, es la suma o resta de las derivadas de cada función.

94.- Derivada de $y = k x^n$

$$\text{Es } y + \Delta y = k (x + \Delta x)^n$$

$$\therefore \Delta y = k \left[x^n + n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n \right] - k x^n$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = n k x^{n-1} + k \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + k (\Delta x)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n k x^{n-1} \quad \text{ya que el resto de los sumandos son infinitésimos.}$$

Ejercicios:

Hallar la derivada, con relación a la variable x , de las siguientes expresiones:

$$y = 4x^2 - 7x^3 + 2x^{-2}$$

$$y = 8x^5 - 16 + 4x^3 - 2 + x$$

M.1,XXIII.-

M.1.

Conferencia 24

6/10/55

95.- Concepto físico de la derivada

Se ha definido la derivada de una función continua como límite del incremento de la función sobre el incremento de la variable independiente cuando esta última tiende a cero.-

Así si un auto recorre con movimiento uniforme un trayecto de 400 km en 4 horas, su velocidad o sea el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado es de 100 km por hora. Esto es exacto siempre que el movimiento sea rectilíneo.-

En tal caso es y el espacio recorrido y x el tiempo y resulta, conforme ya se ha indicado

$$y = a \cdot x \quad \therefore a = \frac{y}{x} = \frac{400}{4} = 100 \text{ Km x hora}$$

Si el movimiento no es uniforme, la velocidad resultante es sólo una velocidad media en el trayecto total recorrido, pudiendo haber variado dicha velocidad considerablemente en los diversos tramos.-

Para obtener la velocidad del auto en un determinado momento del recorrido, podemos marcar el espacio recorrido en una determinada fracción de tiempo; por ejemplo $\Delta x = 1$ minuto.-

Se puede advertir que con respecto a este tramo la velocidad que se obtiene es simplemente una velocidad media en el minuto considerado de características similares a la velocidad media en los 400 km. del recorrido.-

Si en lugar de ser $\Delta x = 1$ minuto hacemos $\Delta x = 1$ segundo, nos aproximaremos más a la velocidad del auto en un instante.-

Este valor límite de la velocidad media $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando el intervalo $\Delta x \rightarrow 0$ se denomina velocidad instantánea en el momento considerado.-

En general sea cualquiera la ley $y = j(x)$ del movimiento del auto se denomina velocidad instantánea en el momento x al:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow 0$$

O sea la velocidad instantánea es la derivada del espacio con respecto al tiempo.

$$v = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = j'(x)$$

Analogamente se demuestra que la derivada de la velocidad con relación al tiempo es la denominada aceleración, que indica como varía la velocidad a través del tiempo.

Así por ejemplo si es:

$$y = \frac{1}{2} g \cdot x^2 \quad \text{la ecuación de un movimiento dado}$$

$$\text{resulta } \frac{dy}{dx} = g \cdot x = v \quad \text{la velocidad correspondiente}$$

$$\text{y es } \frac{dv}{dx} = g \quad \text{la respectiva aceleración.}$$

Además de la aplicación precedente existen numerosas aplicaciones físicas de la derivada, sin considerar aquí su aplicación trigonométrica como tangente de una curva. Igualmente es básico el concepto de derivada dentro de la estadística metodológica general, donde tiene múltiples aplicaciones.

96.- Derivadas de funciones inversas

$$\text{Si se } y = f(x) \quad y \quad x = g(y)$$

se dice que las funciones y y x son funciones inversas.
Ejemplo:

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = e^x$$

$$\therefore x = y^2$$

$$\therefore x = \log_e y$$

Siendo

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{resulta } \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 \div \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{y tomando límites}$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 \div \frac{dy}{dx}$$

Las derivadas de dos funciones inversas son recíprocas.

Aplicación

$$y = \sqrt{x} \quad \therefore x = y^2$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

y expresando y en función de la variable x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Directamente tendríamos $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{comprobando así el resultado obtenido en forma directa.}$$

97.- Derivada de función de función.

Sea: $y = f(u)$ y a su vez $u = f(x)$

Interesa determinar la derivada de y con respecto a x.-

Es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{y tomando límites}$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Dada una variable que depende de otra, y esta a su vez de una tercera, la derivada de la primera respecto de la tercera es el producto de la derivada respecto de la segunda por la derivada de la segunda respecto de la tercera.

En forma general es también para varias variables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Aplicación: Sea

$$y = (3x + 4)^3 \quad \text{hacemos} \quad 3x + 4 = u$$

$$\therefore y = u^3$$

Es entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3 \cdot u^2 \cdot 3 = 9u^2 = 9(3x + 4)^2 \quad \text{que es la}$$

derivada buscada.

98.- El número e.

Al estudiar logaritmos, vimos que la base de los logaritmos naturales o neperianos era el número e, una constante irracional cuyo valor estimado era

$$e \approx 2,71828182 \dots$$

veremos ahora como surge dicho número

$$\text{es } \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \approx 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \approx 2,25$$

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2,37 \text{ una expresión creciente}$$

consideremos la expresión general

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \dots + C_n^n \frac{1}{n^n}$$

que podemos expresar

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

y pasando el límite para $n \rightarrow \infty$ es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e \approx 2,718281 \dots$$

ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \approx 1$ y en forma similar para $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$; etc. $n \rightarrow \infty$

Derivada del logaritmo:

99.- Derivada del logaritmo.

$$\text{Sea } y = \log_e x$$

$$\text{es } y + \Delta y = \log_e (x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \log_e (x + \Delta x) - \log_e x \approx \log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

haciendo $\boxed{x = z \cdot \Delta x}$ resulta $\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{1}{z}$

$$\therefore \Delta y \approx \log_e \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{z}{x} \log_e \left(1 + \frac{1}{z} \right) \approx \frac{1}{x} \log_e \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z$$

cuando $\Delta x \rightarrow 0$ es $\frac{1}{z} \rightarrow 0$ $\therefore z \rightarrow \infty$

y pasando al límite resulta

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \lim_{z \rightarrow \infty} \log_e \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$z \rightarrow \infty$$

Resulta así:

$$\boxed{\frac{d \log_e x}{dx} = \frac{1}{x}}$$

Si se trata de hallar la derivada de un logaritmo decimal

$$y = \log x = \log_e x \cdot M$$

resulta $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot M$ es decir basta multiplicar $\frac{1}{x}$ por el módulo M

100.- Diferencial de una función.

Se denomina diferencial de la función $y = j(x)$ al producto de la derivada por el momento arbitrario de la variable

$$\Delta y \approx dj(x) = j'(x) \cdot \Delta x$$

siendo x función de x tendremos

$$dx = j'(x) \Delta x \quad \text{pero } j'(x) = 1 \quad \text{cuando } j(x) = x$$

resulta así $dx = 1 \cdot \Delta x$

y en consecuencia es también

$$dy = j'(x) \cdot dx$$

Para el cálculo de algunas derivadas es preferible utilizar la diferencial de la función, especialmente cuando se trata de funciones implícitas.

Siendo

$$y = \log_e x$$

resulta

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ y por consiguiente $dy = \frac{dx}{x}$ la denominada diferencial logarítmica

Más general, siendo

$$y = \log_e j(x)$$

aplicando la derivación de una función de función se obtiene

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{j(x)} \quad j'(x) = \frac{j'(x)}{j(x)}$ que es la derivada logarítmica de una función cualquiera.

101.- Derivada de x^n

$y = x^n$ tomando logaritmos naturales.

$$\log_e y = n \log_e x$$

y diferenciando ambos miembros

$\frac{dy}{y} = n \frac{dx}{x} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = n \frac{y}{x} = n \frac{x^n}{x} = n x^{n-1}$ para valores de n , enteros, fraccionarios, positivos o negativos.

Resulta así demostrado con toda generalidad que,

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

lo que ya se había comprobado anteriormente haciendo el desarrollo del binomio para valores del exponente n enteros y positivos.

La aplicación de logaritmos, conforme se ha visto ya en el desarrollo de este curso, facilita considerablemente los cálculos aritméticos. Asimismo es un valioso auxiliar en álgebra para simplificar fórmulas y expresiones algebraicas, como también hemos podido apreciar anteriormente.

En análisis matemático, y especialmente en cálculo infinitesimal, su utilidad es aún mayor ya que como hemos visto en la fórmula anterior, y como se apreciará en las clases próximas gracias al empleo de logaritmos naturales, combinado con la utilización de la diferencial de una función, es posible determinar y demostrar en forma inmediata y simple, derivadas de expresiones cuyo cálculo directo sin utilizar diferenciales logarítmicas sería sumamente largo y engorroso.

En casi todos estos casos el procedimiento que se emplea es siendo $y = j(x)$

se toma logaritmos naturales en ambos miembros

$$\log_e y = \log_e j(x)$$

y en consecuencia siendo iguales ambas expresiones, se procede a igualar sus respectivas diferenciales,

$$\frac{d y}{y} = d(\log_e j(x))$$

de donde puede calcularse fácilmente $\frac{d y}{d x}$ pasando y al miembro segundo,

y $\frac{d x}{d x}$ al primero respectivamente.

Como aplicación de los conceptos expresados veremos algunos ejercicios prácticos.

Ejercicios

1)

$$y = \log_e x^3$$

$$\text{haciendo } x^3 = u \text{ resulta } y = \log_e u$$

Es entonces aplicando la fórmula de la derivada de una función de función

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

A igual resultado se llega considerando que

$$y = \log_e x^3 = 3 \log_e x$$

$$\therefore \frac{d y}{d x} = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

2)

$$y = 8 x^{-5} \quad ; \quad y' = -40 x^{-6}$$

3)

$$y = -3 x^{-4,25} \quad ; \quad y' = 12,75 x^{-5,25}$$

4)

$$y = \log_e (x^2 + 3x)^{-5} \quad y' = \frac{j'(x)}{j(x)}$$

$$\therefore y = -5 \log(x^2 + 3x) \quad ; \quad y' = -5 \frac{(2x+3)}{(x^2+3x)}$$

5)

$$y = (3x^3 - 8x^2 + 7x - 2)^{-3} \quad ; \quad y' = -3(3x^3 - 8x^2 + 7x - 2)^{-4}(9x^2 - 16x + 7)$$

6)

$$y = \log_{20}(3x+4) \quad ; \quad y' = \frac{3}{3x+4} \cdot M$$

102.- Derivada de un producto de funciones.

Siendo $y = u \cdot v$ donde $u = j(x)$ $v = g(x)$ resulta tomando logaritmos naturales.

$$\ln y = \ln u + \ln v \quad \text{y diferenciando ambos miembros}$$

$$\frac{d y}{y} = \frac{d u}{u} + \frac{d v}{v}$$

$$\therefore \frac{d y}{d x} = \frac{u \cdot v}{u} \cdot \frac{d u}{d x} + \frac{u \cdot v}{v} \cdot \frac{d v}{d x} = v \cdot \frac{d u}{d x} + u \cdot \frac{d v}{d x} = v u' + u v'$$

103.- Derivada de un cociente de funciones:

$$\text{Sea } y = \frac{u}{v} \quad \text{donde } u = j(x) \quad v = g(x)$$

Tomando logaritmos naturales,

$$\ln y = \ln u - \ln v \quad \text{y diferenciando ambos miembros.}$$

$$\frac{d y}{y} = \frac{d u}{u} - \frac{d v}{v}$$

$$\therefore \frac{d y}{d x} = \frac{u}{v \cdot u} \cdot \frac{d u}{d x} - \frac{u}{v \cdot v} \cdot \frac{d v}{d x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d u}{d x} - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{d v}{d x}$$

$$\frac{d y}{d x} = \frac{v \cdot u' - u v'}{v^2}$$

104.- Derivada de la función exponencial.

Sea $y = e^x$ resulta $x = \log_e y$ la función inversa

En consecuencia es $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \therefore \frac{dy}{dx} = y = e^x$

Resulta así que para $y = e^x$ es $y' = e^x$

la derivada de la función exponencial $y = e^x$ es también e^x

Si es $y = a^x$

tomando logaritmos naturales resulta

$\log_e y = x \log_e a$ y diferenciando ambos miembros

$$\frac{dy}{y} = dx \cdot \log_e a \therefore \frac{dy}{dx} = y \log_e a = a^x \cdot \log_e a$$

Ejemplos: $y = 8^x \therefore y' = 8^x \log_e 8$

$$y = 10^x \therefore y' = 10^x \log_e 10$$

105.- Ejercicios de derivación

Como ejercicios prácticos de las fórmulas y procedimientos precedentemente expuestos efectuaremos algunos cálculos de derivadas.

a) Función de Función

$$y = (7x^2 - 3x + 8)^4 + (3x - 6x^2)^3 - (2x^3 + 3x)^2$$

$$\text{Hacemos } u = 7x^2 - 3x + 8$$

$$v = 3x - 6x^2$$

$$w = 2x^3 + 3x$$

$$\text{Es entonces } y = u^4 + v^3 - w^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \frac{du}{dx} - 3v^2 \frac{dv}{dx} - 2w \frac{dw}{dx} \text{ y siendo}$$

$$\frac{du}{dx} = 14x - 3 \quad \frac{dv}{dx} = 3 - 12x \quad \frac{dw}{dx} = 6x^2 + 3$$

resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 4(7x^2 - 3x + 8)^3 (14x - 3) + 3(3x - 6x^2)^2 (3 - 12x) - 2(2x^3 + 3x)(6x^2 + 3)$$

b) Derivada de un producto de funciones

$$y = x^3 e^x$$

$$\text{hacemos } u = x^3 \quad v = e^x$$

$$\text{es } y = u \cdot v \quad \therefore y' = uv' + vu'$$

resulta así

$$y' = x^3 \cdot e^x + e^x \cdot 3x^2 \text{ la derivada buscada}$$

$$y = 8^x \cdot 5x^{-3}$$

$$y' = 5 \left[8^x (-3x^{-4}) + x^{-3} 8^x \log_e 8 \right]$$

c) Derivada de un cociente de funciones

$$y = \frac{\log_e x}{x} \quad \log_e x = u \quad x = v$$

$$y = \frac{u}{v} \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad y' = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \log_e x}{x^2} = \frac{1 - \log_e x}{x^2}$$

$$y = \frac{8^x}{3x^5} \quad 8^x = u \quad 3x^5 = v$$

$$y = \frac{u}{v} \quad \therefore y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{3x^5 8^x \log_e 8 - 8^x 15x^4}{9x^{10}}$$

M.i.
272 Conferencia
11/10/55

106.- Expresiones indeterminadas:

Se denominan expresiones indeterminadas aquellas del tipo de $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ es decir las formadas por cociente de dos funciones que para un determinado valor de la variable independiente se transforman en cocientes indeterminados:

Ejemplo: sea $\frac{e^x - 1}{x}$

la expresión anterior es una función de la variable x perfectamente determinada para valores de x

Así para $x = 1$ es

$$\frac{e^1 - 1}{1} = e - 1 = 1,71828$$

para $x = 3$ vale $\frac{e^3 - 1}{3} \approx 1,6 \dots$

pero para $x = 0$ resulta $\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ es decir un

cociente indeterminado.

107.- Verdadero valor de expresiones indeterminadas. Regla de L'Hôpital. Sea $\frac{f(x)}{g(x)}$ un cociente de funciones dependientes de igual variable independiente, que para un determinado valor de la variable $x = a$ se transforma en una expresión indeterminada del tipo de $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Suponemos entonces

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \quad \text{o sea} \quad f(a) = 0 \quad g(a) = 0$$

Resulta en consecuencia la igualdad:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

y dividiendo numerador y denominador por $x - a$ se obtiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \quad \text{parando ahora el límite para } x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ya que } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Resulta así que el valor de una expresión indeterminada, está dado por el cociente de las derivadas de cada función en el punto donde existe indeterminación.-

Regla de L'Hôpital: Cuando el cociente de dos funciones dependientes de igual variable independiente es para un determinado valor de la variable $x = a$, una expresión indeterminada del tipo de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ el verdadero valor de dicho cociente está dado por el cociente de las derivadas de cada función para $x = a$.-

Aplicación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x}{1} = \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

Calcular como ejercicios las siguientes expresiones.-

$$\frac{\log_e x}{x} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \text{ es } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_e x}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Sea

$$\frac{x^3 - a^3}{x^4 - a^4} \text{ resulta para } x = a \quad \frac{a^3 - a^3}{a^4 - a^4} = \frac{0}{0} \text{ indeterminada}$$

$$x = a$$

Aplicando la regla L'Hôpital es

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^4 - a^4} = \frac{3x^2}{4x^3} = \frac{3}{4x} = \frac{3}{4a}$$

$$x = a$$

$x \rightarrow a$

$$\frac{2^x - 3^x}{x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \frac{2^x \log_e 2 - 3^x \log_e 3}{1} = \log_e \frac{2}{3}$$

Sea $\frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$

$x = \infty \quad x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty$

En ocasiones el cociente de las respectivas derivadas es también una expresión indeterminada. En tales casos es necesario aplicar la regla de L'Hôpital tantas veces que sea necesario hasta obtener un resultado determinado

Sea $\frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ es decir se obtiene una nueva expresión indeterminada.

Aplicando la regla para la nueva expresión $\frac{2x}{e^x}$ cuando $x \rightarrow \infty$ es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \text{ obteniendo un resultado determinado}$$

Si es $\frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ después de n aplicaciones sucesivas de la regla, obtendremos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{n!}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0$$

ya que las derivadas sucesivas de e^x valen todas e^x . Esto también nos indica que dentro de los infinitos, como los infinitésimos, existen distintos órdenes y que es para $x \rightarrow \infty$

$$\log x < x < x^n < e^x$$

El denominador infinito exponencial es mayor que el infinito potencial.

108 - Resolución de una indeterminación en la fórmula de la Media Geométrica

Consideramos ahora la siguiente expresión, denominada fórmula general de los promedios, de gran aplicación en Estadística y especialmente en la teoría de los promedios y en números índices.

$$M(h) = \sqrt[h]{\sum_{i=1}^n x_i^h P_i}$$

donde x_i representa los distintos valores de un atributo cualquiera y P_i sus respectivas ponderaciones o frecuencias relativas.-

$$\text{Es } \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

Queremos determinar el valor de $M(h)$ para $h = 0$

$$\text{Es } M(h) = \left[\sum_{i=1}^n x_i^h P_i \right]^{\frac{1}{h}} \text{ y para } h = 0$$

$$M(0) = \left[\sum_{i=1}^n x_i^0 P_i \right]^{\frac{1}{0}} = 1^\infty$$

expresión esta de carácter indeterminado y donde no puede aplicarse la regla de L'Hôpital por no ser cociente de dos funciones.- Si en la función original $M(h)$ tomamos lo-

garitmos naturales, resulta:

$$\log_e M(h) = \frac{1}{h} \log_e \sum_{i=1}^n x_i^h P_i$$

y si ahora $h \rightarrow 0$

$$\log_e M(0) = \frac{1}{0} \log_e \sum_{i=1}^n x_i^0 P_i = \frac{\log_e 1}{0} = \frac{0}{0}$$

expresión esta que también es indeterminada pero donde puede aplicarse directamente la regla por ser cociente de dos funciones.-

Debe calcularse en consecuencia.

$$\log \sum_{i=1}^n x_i^h P_i \text{ cuando } h \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^n x_i^h P_i}{h} = \frac{\frac{d \log \sum_{i=1}^n x_i^h P_i}{d h}}{\frac{d h}{d h}} = \frac{d \log \sum_{i=1}^n x_i^h P_i}{d h} \text{ cuando } h \rightarrow 0$$

ya que $\frac{d h}{d h} = 1$. La derivada del logaritmo de una función es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ y en este caso es } f(h) = \sum_{i=1}^n x_i^h P_i \therefore f'(h) = \sum_{i=1}^n x_i^h P_i \log_e x_i$$

ya que la derivada de una suma o sumatorio es igual a la suma o sumatorio de las derivadas de cada función, y la derivada de x_i^h con relación a h es

$$\frac{d x_i^h}{d h} = x_i^h \log_e x_i$$

resulta así en definitiva

$$\frac{d \log \sum_{i=1}^n x_i^h P_i}{d h} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^h P_i \log_e x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^h P_i} = \sum_{i=1}^n P_i \log_e x_i$$

$h \rightarrow 0$ $h=0$

y es por consiguiente

$$\log_e M(0) = \sum_{i=1}^n P_i \log_e x_i \quad \text{y pasando a los números}$$

$$M(0) = \prod_{i=1}^n x_i^{P_i}$$

que es la denominada fórmula de la Media Geométrica, de gran aplicación en Estadística y números índices.-

M.i.

Conferencia N°28

13/10/1955

109.- Derivadas sucesivas

Siendo $g = f(x)$ es $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ la respectiva derivada

$f'(x)$ es también una nueva función, justamente la función derivada de la primitiva función $y = f(x)$, que depende de la misma variable independiente x . En consecuencia podemos volver a aplicar el procedimiento de derivación a la función derivada y el resultado obtenido se denomina derivada segunda de $f(x)$ y se representa así

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

ejemplo: si es $y = x^4$

$$\text{resulta } y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3 \quad \therefore y'' = f''(x) = \frac{d(4x^3)}{dx} = 12x^2 = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$y = a^x \quad \therefore y' = a^x \log_e a \quad \therefore y'' = a^x \log_e a \log_e a = a^x (\log_e a)^2$$

En forma similar si volvemos a derivar la segunda derivada obtenemos la derivada tercera, y derivando a esta la derivada cuarta, etc. que se simbolizan en forma análoga.-

Sea $y = x^m$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1) x^{m-2}$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = m(m-1)(m-2) x^{m-3}$$

$$y^{IV} = f^{IV}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4} = m(m-1)(m-2)(m-3) x^{m-4}$$

Continuando así en forma sucesiva y suponiendo m : entero y positivo obtendremos:

$$y^{(m)} = f^{(m)}(x) = \frac{d^m y}{dx^m} = m!$$

y por lo tanto $y^{m+1} = f^{-(m+1)}(x) = 0$ siendo por tanto nulas todas las derivadas siguientes.

110-Derivadas de funciones crecientes y decrecientes

$$\text{Es } \frac{d y}{d x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

por consiguiente el cociente $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ tomando Δx_0 suficientemente pequeño en valor absoluto nos dará el signo de la derivada $f'(x_0)$ en el punto (x_0, y_0)

Al estudiar las funciones en Geometría Analítica (Nºs. 76 a 80) hemos considerado el crecimiento de una función y sus características fundamentales: cóncavo, convexo, puntos de inflexión, máximos y mínimos.

Si la función es creciente en el punto (x_0, y_0) resultará que Δy_0 y Δx_0 tienen el mismo signo. En consecuencia al crecer x aumentan también y , la función es creciente y en consecuencia $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ la derivada es positiva, viceversa, si es $\frac{d y}{d x} > 0$ la función es creciente en los puntos que se verifique. Si en cambio resulta $\frac{d y}{d x} < 0$ es entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ es decir negativo, y en este caso Δy y Δx tienen distinto signo.

Al crecer x decrece y , por consiguiente:

Cuando la derivada es negativa en un determinado intervalo, la función es decreciente en dicho intervalo.

En el gráfico Nº 18 pueden advertirse estos dos casos.

111-Derivadas en los máximos y mínimos relativos

Si en un punto (x_0, y_0) la función pasa por un máximo o mínimo relativo debe anularse en él la derivada ya que si es $\frac{d y}{d x} > 0$ la función es creciente y si $\frac{d y}{d x} < 0$ la función es decreciente.

Por consiguiente para los valores de x en que $f(x)$ es máximo o mínimo relativo, si existe derivada ésta es nula. En estos casos conforme se indicó ya en los gráficos 13 y 14 la tangente es paralela al eje de las x .

Conforme se puede apreciar en el primer y tercer gráfico de la página 12 y en los tres puntos I, I' e I'' de la figura 15, en los puntos de inflexión la tangente atraviesa a la curva y puede ser paralela al eje de las x en cuyo caso la derivada es nula.

Para poder saber si una función presenta máximo, mínimo o punto de inflexión en un punto x_0 donde se anula la derivada, debe venir el signo de la derivada a ambos lados del punto x_0 en que se anula.

Si la derivada pasa de menos a más hay un mínimo

Si la derivada pasa de más a menos hay un máximo

Si la derivada pasa de menos a menos, o de más a más hay punto de inflexión. En efecto en el mínimo relativo la función que es decreciente (derivada negativa) pasa a ser creciente (derivada positiva) ver figura 14. En el máximo la función que es creciente (derivada positiva) pasa a ser decreciente (derivada negativa) ver figura 13. En cuanto a los puntos de inflexión (ver I e I' figura 15) la función decreciente continúa decreciente, o si es creciente continúa creciente.

Otra forma de determinar si la función pasa por un máximo, mínimo, o punto de inflexión consiste en determinar el valor de la 2da. derivada.

Sea $y' = f'(x)$ en el punto x_0 donde admitimos que se anula la primera derivada.

Si es $f''(x_0) < 0$ resulta la primera derivada decreciente, luego la función primitiva $f(x)$ pasa por un máximo para x_0 .

Si es $f''(x_0) > 0$ resulta creciente la primera derivada y por lo tanto la función pasa por un mínimo en x_0 .

Si es $f''(x_0) = 0$ la primera derivada ha pasado por un máximo o mínimo, luego la función pasa por un punto de inflexión.

En consecuencia del análisis de la 1ra. y 2da. derivada surgen las siguientes características:

Máximo: $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$

Mínimo: $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$

Inflexión: $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$

Una función cuya derivada es siempre positiva para cualquier valor de x , es por consiguiente continuamente creciente. Una función de este tipo se denomina monótona creciente. Ejemplo de función monótona creciente es la denominada fórmula general de los promedios cuya expresión analítica es

$$M(h) = \frac{h}{\sum_{i=1}^N x_i p_i}$$

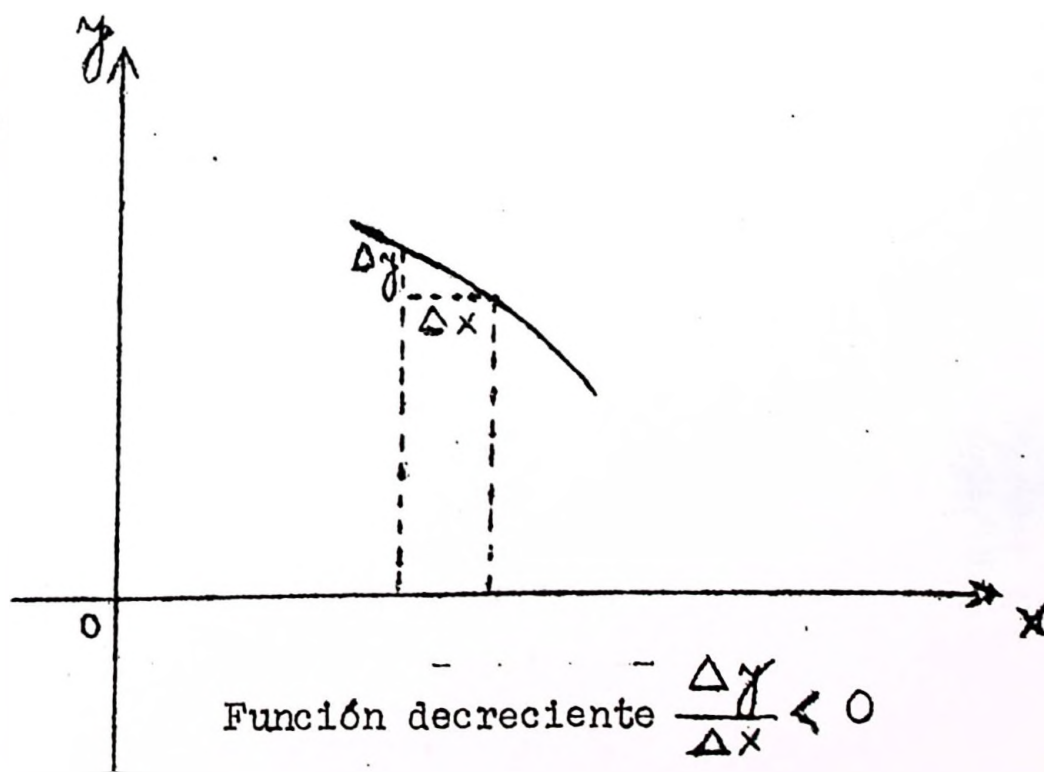
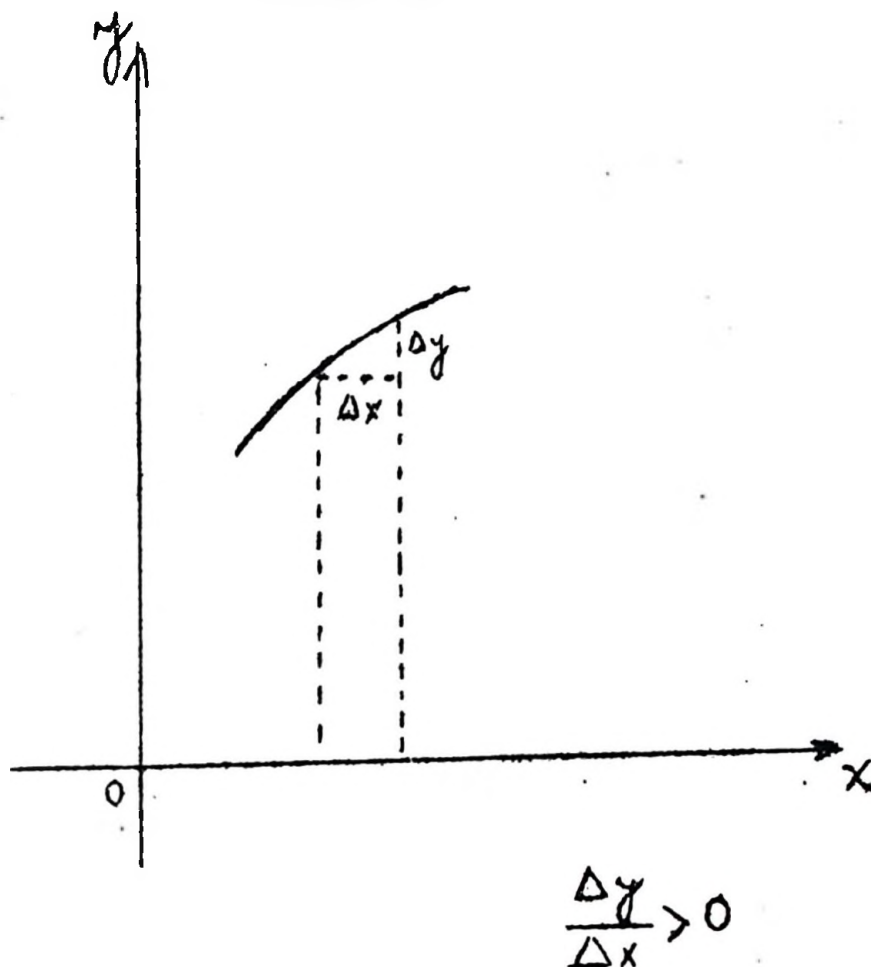
donde la variable es h

En efecto, puede demostrarse que la derivada de $M(h)$ con respecto a la variable h es siempre positiva para cualquier valor de h , comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$. Por consiguiente la función $M(h)$ es una función monótona creciente con respecto a la variable h , y en consecuencia se verifican las siguientes desigualdades

$$M(-\infty) < M(-1) < M(0) < M(1) < M_2 < \dots < M(\infty)$$

En particular, se ha demostrado ya que es $M(0) =$ Media geométrica y $M(1) =$ Media aritmética. Resulta así que la media geométrica es mayor que la media aritmética, generalizando así la demostración hecha para dos cantidades a y b en el punto 21.

FIGURA 18



M.1.
Conferencia 29
14/10/55

112.- Análisis de una función

La determinación, estudio y cálculo de las características de una función, especialmente de los máximos o mínimos relativos y de los puntos de inflexión, constituye el denominado análisis de la función - Dicho análisis se puede realizar en forma gráfica, mediante la representación en coordenadas de la función de acuerdo a los principios de la geometría analítica, complementando con los aspectos analíticos que se obtienen de los derivados de la función y que han sido indicados en la clase pasada,

Recordemos que cuando la función pasa por un máximo o mínimo relativo su primera derivada vale 0 y su segunda derivada en ese punto es negativa o positiva según se trate de un máximo o de un mínimo respectivamente - Asimismo cuando la función pasa por un punto de inflexión la segunda derivada es nula,

Como aplicación práctica de estos conceptos consideremos la función

$$y = x^3 + 3x^2 - x$$

cuyo análisis deseamos efectuar.

Dando valores a la variable x , obtenemos los correspondientes a la función y , que figura representada en el gráfico N° 19 adjunto

x_1	$y = x^3 + 3x^2 - x$
- 3	$y = 3$
- 2	$y = 6$
- 1	$y = 3$
0	$y = 0$
1	$y = 3$
2	$y = 18$

x	y
3	51

Resulta también

$$y' = 3x^2 + 6x - 1$$

$$y'' = 6x + 6$$

como expresión de la primera y segunda derivada de la función considerada - En los máximos o mínimos relativos es

$$y'_x = 0 \quad \therefore 3x^2 + 6x - 1 = 0$$

ecuación de segundo grado cuyas raíces son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y en nuestro caso}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} \quad \therefore x_1 = \frac{-6 + 6,93}{6} = 0,155 \quad x_2 = \frac{-6 - 6,93}{6} = -2,155$$

$$x_1 = 0,155 \quad x_2 = -2,155$$

para $x = 0,155$ es $y'' = (6 \times 0,155) + 6 = 6,93 > 0$ y por lo tanto

la función pasa, para dicho valor de x , por un mínimo relativo. Para hallar el valor de la función en el mínimo solo basta reemplazar en la función original

$$y = x^3 + 3x^2 - x$$

el valor de x por 0,155
es entonces

$$y = (0,155)^3 + 3(0,155)^2 - 0,155 = 0,0076 - 0,155 = -0,079$$

y en consecuencia las coordenadas del mínimo relativo son

$$m \begin{cases} x = 0,155 \\ y = -0,079 \end{cases}$$

Para $x = -2,155$ es la segunda derivada

$$y'' = 6x(-2,155) + 6 = -6,93 < 0$$

en consecuencia la función pasa por un máximo relativo

El valor de la función en el máximo se determina reemplazando en la función original el valor de la variable x por $-2,155$

Resulta así

$$y = (-2,155)^3 + 3(-2,155)^2 + 2,155 = -10,0078 + 13,932 + 2,155$$

$y = 6,0792$ el valor de la función en el máximo relativo. En consecuencia las coordenadas del máximo son

$$M \begin{cases} \bar{x} = -2,155 \\ y = 6,0792 \end{cases}$$

113 - Punto de inflexión

Para determinar analíticamente el punto de inflexión se iguala a cero la segunda derivada

$$y'' = 6x + 6 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{6}{6} = -1$$

y reemplazando en la función primitiva resulta

$$y = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3$$

En consecuencia las coordenadas del punto de inflexión son:

$$I \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

En el gráfico adjunto donde se ha representado la función analizada puede apreciarse gráficamente la posición del máximo y mínimo relativos y del punto de inflexión - (gráfico 19)

Ejercicios

Como aplicación de los conceptos expresados puede ~~efectuarse~~ se el análisis, o sea la determinación del máximo, mínimo y puntos de inflexión de las siguientes funciones

$$y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 8$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 8x$$

114. Derivadas sucesivas de diversas funciones elementales

Se ha visto que la derivada enésima de $y = x^n$ es $n!$ y las siguientes derivadas son nulas.

En cambio en otros tipos de funciones como ser

$$y = e^x$$

todas las derivadas son iguales a la función primitiva, es decir es

$$y' = e^x \quad y'' = e^x \quad \dots \quad y^n = e^x$$

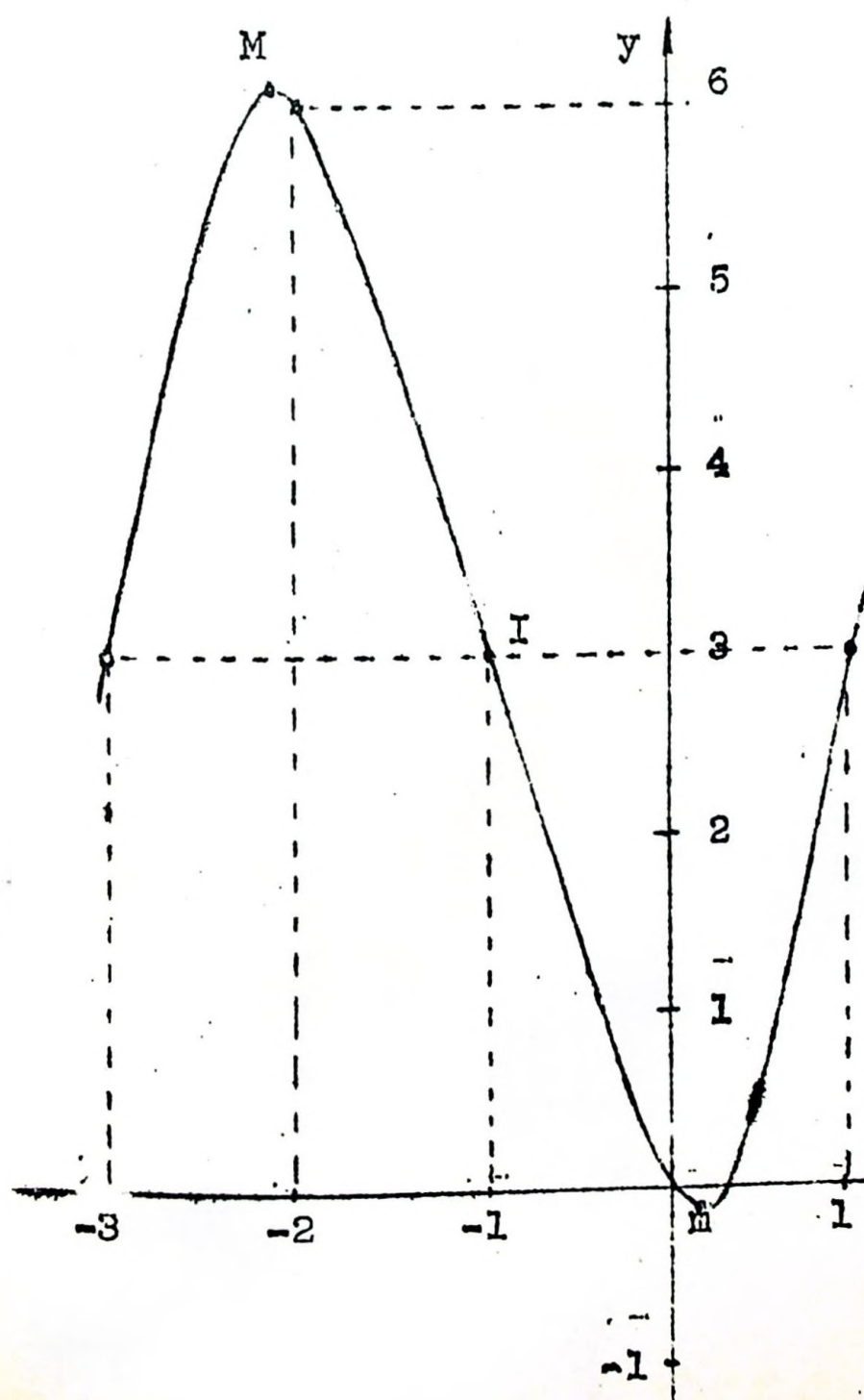
En otras funciones las derivadas sucesivas son cada vez -
mas complejas como ser

$$y = a^x \quad y' = a^x \log_e a \quad \dots \quad y^n = a^x (\log_e a)^n$$

Cuando la función considerada es compleja, como ser producto de dos funciones, o cociente de funciones, el cálculo de las derivadas sucesivas puede ser sumamente complicado.- En estos casos - para efectuar un análisis es preferible utilizar el procedimiento de determinar el signo de la primer derivada antes y después del - valor donde se anula, conforme se indicó anteriormente, para establecer así si se trata de un máximo, mínimo o punto de inflexión, - en lugar de calcular la segunda derivada de la función que puede ser de cálculo muy difícil.

GR A F I C O 19

$$y = x^3 + 3x^2 - x$$



x	y
- 3	3
- 2,155	6,0792
- 2	6
- 1	3
0	0
0,155	- 0,079
1	3
2	18
3	51

$$\begin{cases} x = - 2,155 \\ y = 6,0792 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,155 \\ y = - 0,079 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = - 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

NOCIONES DE CALCULO INTEGRAL

115.- Derivadas y funciones primitivas

En las clases anteriores hemos visto como dada una determinada función

$$y = f(x)$$

como ser $y = x^n$; $y = e^x$; $y = a^x$; $y = \log_e x$, etc. podemos calcular la derivada de dicha función, o sea la función derivada.

$$y' = \frac{d}{dx} y = f'(x)$$

y que en los casos indicados resulta

$$y' = n x^{n-1}; \quad y' = e^x; \quad y' = a^x \log_e a; \quad y' = \frac{1}{x} \text{ respectivamente.}$$

Hemos visto también que en general la derivada de la función es otra función que depende también de la misma variable independiente, y que a su vez es susceptible de una nueva derivación, originando así las llamadas derivadas sucesivas.

Es así por ejemplo:

$y = x^n$	$y = e^x$	$y = a^x$
$y' = n x^{n-1}$	$y' = e^x$	$y' = a^x \log_e a$
$y'' = n(n-1) x^{n-2}$	$y'' = e^x$	$y'' = a^x (\log_e a)^2$
...	...	...
$y^n = n!$	$y^n = e^x$	$y^n = a^x (\log_e a)^n$

Considerando sólo tres funciones elementales ya analizadas.

Esto nos lleva a plantearnos el siguiente problema inverso: Es posible conociendo la derivada de una función determinar cual es la función primitiva de la cual procede?

Es indudable que la respuesta a ésto depende del conocimiento que tengamos de las distintas funciones y de sus respectivas derivadas. Para poder determinar la función primitiva de la cual procede una determinada derivada necesitamos conocer la familia o clase de función a que pertenece.

Así se nos da por ejemplo:

$$y' = n x^{n-1}$$

sabemos que la función primitiva correspondiente es

$$y = x^n$$

ya que efectivamente la derivada de la segunda nos da la primera.

Así, por ejemplo, sabemos que la función primitiva de

$$y' = 3x^2$$

es $y = x^3$ y la de $y' = e^x$ es $y = e^x$

En forma análoga la primitiva de

$a^x \log_e a$ será a^x pues la derivada de esta última nos da la primera.

Análogamente si nos d'n la diferencial

$$dg = 4 x^3 dx$$

sabemos que la función primitiva de la cual procede es

$$y = x^4$$

ya que diferenciando esta expresión obtenemos la anterior.

Esta operación contraria a la derivación o diferenciación, o sea dada una diferencial o derivada determinada hallar la correspondiente función primitiva se denomina integral, y el cálculo de las correspondientes funciones primitivas constituye el denominado Cálculo Integral que conjuntamente con el Cálculo diferencial constituye el Cálculo infinitesimal, importante rama del Análisis Matemático.

116.- Notación:

Para indicar el cálculo de una función primitiva se utiliza el signo $\int$ que constituye una s alargada y se antepone a una diferencial determinada. Es así entonces.

$$\int 4 x^3 dx = x^4$$

Corresponde señalar especialmente que la integración es la operación contraria a la diferenciación y por consiguiente los signos $\int d$ o también $d \int$ antepuestos a cualquier función se reducen y pueden suprimirse.

$$\cancel{\int} dx = x$$

$$\int df(x) = f(x) \quad d \int 25 x^3 dx = 25 x^3 dx$$

Asimismo debe destacarse que el signo integral $\int$ solo debe anteponerse a una determinada diferencial y no a una función o derivada.

117.- Constante de integración:

Hemos visto que la derivada o diferencial de una constante es cero.

Así siendo $y = x^4$; $y = x^4 + 5$; $y = x^4 - 8$
la diferencial de estas tres funciones es la misma

$$dy = 4 x^3 dx$$

ya que la diferencial de 5 o de -8 es siempre 0.

Al realizar la operación contraria o sea al integrar, debemos tener en cuenta este hecho y agregar a la función primitiva que se obtenga una constante indeterminada que se denomina "constante de integración" y se designe con la letra C.

Es entonces

$$\int 4 x^3 dx = x^4 + C$$

$$\int dx = x + C$$

Expresiones como las anteriores se denominan integrales indefinidas y en todas ellas debe agregarse siempre la constante C de integración.

118.- Integral de una potencia:

Siendo $y = x^n$

resulta $dy = n x^{n-1} dx$

y es en consecuencia

$\int dy = \int n x^{n-1} dx \therefore y = x^n + C$ la correspondiente función primitiva.

Aplicando igual procedimiento tendremos

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = C$$

La integral de una potencia se forma aumentando en una unidad el exponente y dividiendo por el nuevo exponente.

Podemos comprobar esta regla hallando la diferencial de

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

que nos da efectivamente $x^n dx$

Como aplicación de los conceptos precedentemente expuestos podemos realizar los siguientes ejercicios.

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

$$\int x^{-4} dx = -\frac{x^{-3}}{3} + C$$

$$\int x^{2,53} dx = \frac{x^{3,53}}{3,53} + C$$

$$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{x^{1,5}}{1,5} + C$$

$$\int x^{-4,25} \, dx = - \frac{x^{-3,25}}{3,25} + C$$

Es decir la regla de integración de una potencia se aplica tanto a exponentes enteros como fraccionarios, positivos o negativos.

La única excepción es cuando $n = -1$ y a que en este caso resulta

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{dx}{x} = \log_e x + C$$

pues como se ha demostrado la derivada de $\log_e x$ es $\frac{1}{x}$ y en consecuencia la función primitiva de $\frac{1}{x} = x^{-1}$ es el logaritmo natural de x .-

119.- Integrales Directas

Conforme se ha visto en la clase pasada el cálculo de funciones primitivas o cálculo de integrales se reduce a conocer las derivadas o diferenciales de las funciones, agregando a la correspondiente función primitiva la constante de integración C.-

En consecuencia disponiendo de una tabla de funciones, derivadas y diferenciales tenemos de inmediato y de manera directa el valor de las correspondientes integrales.

Estas integrales que se resuelven en forma directa con solo recordar el valor de las correspondientes derivadas o diferenciales, se denominan integrales directas y a continuación damos una pequeña tabla de las funciones elementales que hemos estudiado en nuestro curso.

120.- Tabla de integrales directas

Función	Derivada	Diferencial	Integral
$y = f(x)$	$f'(x)$	$f'(x) dx$	$\int f'(x) dx = f(x) + C$
$y = x$	1	$1 \cdot dx$	$\int dx = x + C$
$y = x^n$	$n x^{n-1}$	$n x^{n-1} dx$	$\int n x^{n-1} dx = x^n + C$
$y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n	$x^n dx$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$y = e^x$	e^x	$e^x dx$	$\int e^x dx = e^x + C$
$y = a^x$	$a^x \log_e a$	$a^x \log_e a dx$	$\int a^x \log_e a dx = a^x + C$
$y = \log_e x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \log_e x + C$
$y = \log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_e a$	$\frac{dx}{x} \log_e a$	$\int \frac{dx}{x} \log_e a = \log_a x + C$
$y = f(x)^n$	$n f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$	$n f(x)^{n-1} f'(x) dx$	$\int n f(x)^{n-1} f'(x) dx = f(x)^n + C$
$y = e^{f(x)}$	$f'(x) e^{f(x)}$	$f'(x) e^{f(x)} dx$	$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$

Función	Derivada	Diferencial	Integral
$y = a^{f(x)}$	$f'(x) a^{f(x)} \log_e a$	$f'(x) a^{f(x)} \log_e a \, dx$	$\int f'(x) a^{f(x)} \log_e a \, dx = a^{f(x)}$
$y = \log_e f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{f'(x) \, dx}{f(x)}$	$\int \frac{f'(x) \, dx}{f(x)} = \log_e f(x) + C$

En consecuencia, dada una determinada integral, se trata de reducir la a uno de los tipos precedentemente expuestos a fin de solucionarla en forma directa e inmediata. Para ello es conveniente expresar algunas propiedades de las integrales, que a continuación se indican:

121.- Integral de una Constante por una diferencial

La integral de una constante por una diferencial, es igual a la constante multiplicada por la integral de la diferencial dada. Es así:

$$\boxed{\int K \cdot f'(x) \, dx = K \int f'(x) \, dx}$$

Por consiguiente toda constante que multiplique o divida a una integral puede sacarse o introducirse dentro del signo de la integral según convenga.

Ejemplos:

1) Sea $\int a^x \, dx$

multiplicando y dividiendo por $\log_e a$, resulta una integral directa.

$$\frac{1}{\log_e a} \int a^x \log_e a \, dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C$$

2) $\int \frac{8 \, dx}{x} = 8 \int \frac{dx}{x} = 8 \log_e x + C = \log_e x^8 + C$

3) $\int 32 a x^3 \, dx = 32 a \int x^3 \, dx = 32 a \cdot \frac{x^4}{4} + C = 8 a x^4 + C$

4) $\int \frac{n}{6} a^2 e^{ax} \, dx = \frac{n a^2}{6} \int e^{ax} \, dx = \frac{n a^2}{6} e^{ax} + C$

122.- Integral de una suma o resta de diferenciales

La integral de una suma o resta de diferenciales dependientes de igual variable independiente es igual a la suma o resta de las integrales de cada una de dichas diferenciales

$$\text{Sea } y = \int (f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)) dx$$

resulta así:

$$y = \int f'(x) dx \pm \int g'(x) dx \pm \int h'(x) dx = f(x) \pm g(x) \pm h(x) + C$$

En efecto sean: $f(x)$; $g(x)$ y $h(x)$ las funciones primitivas correspondientes a $f'(x)$; $g'(x)$; y $h'(x)$ respectivamente.
Entonces la diferencial de

$$y = f(x) \pm g(x) \pm h(x) \text{ es, como ya se ha demostrado}$$

$$dy = (f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)) dx$$

o integrando ambos miembros

$$y = \int (f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)) dx = f(x) \pm g(x) \pm h(x)$$

pero

$$\int f'(x) dx = f(x) \quad \int g'(x) dx = g(x) \quad \int h'(x) dx = h(x)$$

En consecuencia

$$\int (f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)) dx = \int f'(x) dx \pm \int g'(x) dx \pm \int h'(x) dx$$

Ejemplos:

$$1) \int (3^x + 4e^x - 5x^{-8}) dx = \int 3^x dx + \int 4e^x dx - \int 5x^{-8} dx$$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\log_e 3} \quad \int 4e^x dx = 4e^x \quad \int 5x^{-8} dx = \frac{5}{-7} x^{-7}$$

$$\therefore \int (3^x + 4e^x - 5x^{-8}) dx = \frac{3^x}{\log_e 3} + 4e^x + \frac{5}{7x^7} + C$$

$$2) \int (a + b)^x dx = \frac{(a + b)^x}{\log_e (a + b)} + C$$

$$3) \int (3x^5 - 8 + \frac{6}{x}) dx = \int 3x^5 dx - \int 8 dx + \int \frac{6 dx}{x} =$$

$$= \frac{3x^6}{6} - 8x + 6 \log_e(x) + C$$

M.i.XXXI

123- METODOS DE INTEGRACION

La aplicación de los teoremas precedentemente expuestos permite solucionar o resolver numerosas integrales, ya sea multiplicando o dividiendo por constantes apropiadas a objeto de transformar la integral dada en una integral directa o bien separando la integral dada en la suma o resta de dos o más integrales mas simples.

Existen además procedimientos o métodos de integración - que facilitan la resolución de integrales, mediante la transformación de la integral dada en otra.- Dada la índole del curso nos referiremos exclusivamente a los métodos más elementales y de más corriente y usual aplicación.

124.- Integración por sustitución de variable.

El método de integración por sustitución de variable, consiste en, dada una determinada integral

$$\int f(x) dx$$

expresar en forma conveniente la variable x en función de otra variable cualquiera z etc.- Tal sustitución debe realizarse no solo para la función $f(x)$ sino tambien para la respectiva diferencial: dx

Resulta en consecuencia, luego de realizada la respectiva sustitución, que la integral anterior es equivalente a otra del tipo de

$$\int f(z) dz$$

que debe ser lógicamente o directa o de resolución más simple que la primera.- Resuelta esta integral, la función primitiva que se obtiene $F(z) + C$ es una función que depende de la variable z

En consecuencia para hallar el resultado final es necesario volver a expresar en función de la variable x el resultado obtenido.

Ejemplos

$$1) \int (3x + 4)^3 dx$$

hacemos $3x + 4 = z \quad \therefore dz = d(3x + 4) = 3 dx \quad \therefore dx = \frac{dz}{3}$

$$\therefore \int (3x + 4)^3 dx = \int \frac{z^3 dz}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{z^4}{4} \right) + C = \frac{z^4}{12} + C$$

y expresando z en función de la variable x resulta

$$2) \int e^{7x+4} dx = \frac{(3x+4)^3}{12} + C$$

haciendo $7x+4=u$

$$\therefore du = d(7x+4) = 7 dx \quad \therefore dx = \frac{du}{7}$$

$$\int e^u \frac{du}{7} = \frac{1}{7} e^u = \frac{1}{7} e^{7x+4} + C$$

$$3) \int e^{-x} dx$$

hacemos $-x = u \quad \therefore -dx = du$

$$\therefore \int e^{-x} dx = - \int e^u du = -e^u = -e^{-x} + C$$

125.- Integración por partes

Siendo $y = u \cdot v$ donde $u = f(x)$ $v = g(x)$

resulta

$$y' = u'v + v u'$$

y tambien

$$dg = u \cdot dv + v \cdot du$$

Integrando ambos miembros se obtiene

$$\int dg = \int u \cdot dv + \int v \cdot du = y = u \cdot v$$

$$\therefore \boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du}$$

Fórmula ésta denominada de la integración por partes, y que permite expresar una integral dada como producto de dos funciones menos una nueva integral.- Para que el procedimiento de la integración por partes sea eficaz la nueva integral debe ser lógicamente más simple que la primera,

En caso contrario no es adecuado el procedimiento y debe acudirse a otros métodos para su resolución.

Aplicaciones

$$1) \int \log_e x \cdot dx$$

hacemos $\log_e x = u \quad \therefore dv = dx$

resulta así $du = \frac{dx}{x}$ $v = \int dx = x$

reemplazando en la fórmula

$$\int u dv = u.v - \int v. du \quad \text{se obtiene}$$

$$\begin{aligned} \int \log_e x dx &= x \log_e x - \int x \frac{dx}{x} = x \log_e x - x = \\ &= x (\log_e x - 1) + C \end{aligned}$$

$$2) \int x e^x dx =$$

hacemos $x = u$, $\therefore dv = e^x dx$, $\therefore v = \int e^x dx = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x-1) + C$$

$$3) \int x^2 e^x dx =$$

$$x^2 = u \quad \therefore dv = e^x dx \quad \therefore v = e^x \quad du = 2x dx$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2 e^x x dx = x^2 e^x - 2 \int e^x x dx$$

En este caso la integral hallada no es directa, pero sí es más simple que la original ya que la variable x figura elevada a la primer potencia. Esta integral ya ha sido resuelta como ejercicio número 2.-

Resulta así

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

En resumen, la regla de la integración por partes puede expresarse en la siguiente forma: la integral del producto de una función por la diferencial de otra es el producto de ambas menos la integral de la ya integrada por la diferencial de la otra.-

Ejercicios

Resolver las siguientes integrales indefinidas

$$1) \int \frac{dx}{8-x}$$

$$2) \int (a^{3x} + e^{\frac{2x}{3}}) dx$$

$$3) \int \left((4x+3)^3 + \frac{8}{x-5} - 4e^{2x+3} \right) dx$$

126.- Integrales Definidas

Dada una determinada función continua

$$y = f(x)$$

en un determinado intervalo $(a;b)$ cuya representación gráfica se da adjunta, nos proponemos calcular el área o superficie comprendida entre la función $f(x)$, el eje de las x y dos ordenadas correspondientes a los valores de abscisas a y b respectivamente, - es decir $f(a)$ y $f(b)$, y denominar F al área buscada.-

Dividiremos para ello el intervalo (a,b) en n divisiones (FIGURA 20)

$$\frac{b - a}{n}$$

que simbolizamos por Δx y que constituyen la base de rectángulos inscriptos cuyas alturas simbolizamos por $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Análogamente trazamos rectángulos con igual base y con alturas $y_1, y_2, \dots, y_n$ respectivamente, - (Ver Figura 20)

Indicando por s el área de los rectángulos inscriptos y por S el área de los rectángulos de igual base pero de altura máxima exterior a la figura resulta evidentemente la siguiente desigualdad

$$s < F < S$$

Por su parte es

$$s = y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x$$

Y a su vez resulta

$$S = y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + y_3 \Delta x + \dots + y_n \Delta x = \sum_{i=1}^n y_i \Delta x$$

Es indudable que a medida que Δx disminuye, la diferencia $S - s$ entre el área por exceso y por defecto puede hacerse tan pequeña como se quiera, definiendo un área F , mayor que s y menor que S .

Resulta así en consecuencia cuando

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\text{es } \lim s = \lim S = F$$

y tomando como altura de cada rectángulo una ordenada cualquiera dentro de cada intervalo parcial, en el intervalo total (a,b) es

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S = F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

127.- Definición de integral definida

Resulta así la siguiente definición de una integral definida:

Integral de $f(x)$ entre a y b es el límite de la suma de los productos obtenidos multiplicando cada uno de los intervalos parciales en que el $(a;b)$ se divide, por uno cualquiera de los valores de la función en el mismo, al tender a 0 la amplitud de todos.

O sea, es

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

En consecuencia el área o cuadratura de una determinada función continua se determina mediante una integral definida

128.- Cálculo de integrales definidas

Consideremos la integral

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) + C$$

donde $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$

Si consideramos ahora la integral

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) + C = 0$$

desde el momento que el área comprendida entre a y a es lógicamente nula.

En consecuencia es

$F(a) + C = 0 \therefore C = -F(a)$ y por lo tanto reemplazando la constante de integración C por su valor hallado resulta

$$\boxed{\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)}$$

y en general es por lo tanto

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ desapareciendo así -}$$

en las integrales definidas la constante de integración C .

En consecuencia el área limitada por el eje de las x , la función $f(x)$ y las ordenadas correspondientes a las abscisas a y b es la diferencia de valores que toma en b y a la función primitiva de $f(x)$.

Esta diferencia puede expresarse simbólicamente así:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

129.- Cuadratura de una recta

Como aplicación práctica de estos conceptos consideremos la función $y = 2x$ es decir una recta que pasa por el origen.- Consideremos esta función para valores de x comprendidos en el intervalo 0 a 5.-

Para $x = 0$ $y = 0$ para $x = 5$ $y = 2 \times 5 = 10$

Como puede apreciarse el área o superficie comprendida entre las abscisas 0 y 5 la función y el eje de las x representa un triángulo rectángulo cuya base es 5 y su altura 10.- Ver figura Nº 21 adjunta.

Por geometría elemental sabemos que su superficie S es - igual:

$$S = \frac{b \times a}{2} = \frac{10 \times 5}{2} = 25$$

Aplicando integración definida resulta

$$S = \int_0^5 2x \cdot dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_0^5 = \left[x^2 \right]_0^5 = 5^2 - 0^2 = 25$$

resultado coincidente con el de la geometría elemental.-

En el mismo ejemplo anterior, si queremos hallar la superficie comprendida por la recta y las abscisas 2 y 5 (Ver Figura Nº 21) vemos que se trata de un trapecioide cuya base mayor es 10 su altura $5-2=3$ y su base menor $y=2x$ $x=2 \therefore y=2 \times 2=4$

resulta así geométricamente

$$S = \frac{B+b}{2} \times a = \frac{10+4}{2} \times 3 = 21$$

y por cálculo integral

$$S = \int_2^5 2x dx = \left[x^2 \right]_2^5 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

resultado lógicamente coincidente.-

130.- Cuadratura de la parábola

Sea la parábola $y = x^2$ nos proponemos hallar el área comprendida entre la función, las abscisas 1 y 4 y el eje de las x . - -
Ver Figura N°

En este caso solo podemos acudir al cálculo integral para hallar esta cuadratura

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

que es el valor del área buscada.-

131.- Propiedades de las integrales definidas

$$\text{Es } \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x) dx$$

resulta así:

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Toda integral definida de una función es igual a la integral de la misma función con los límites invertidos y con signos contrarios.

Siendo $a < b < c < d < e$ es

$$\int_a^e f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^e f(x) dx$$

ya que es:

$$F(e) - F(a) = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) + F(d) - F(c) + F(e) - F(d)$$

132.- Ejercicios con integrales definidas

Consideremos la cuadratura de la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$ cuya representación gráfica figura en el gráfico N°

$$\text{Sea } \int_1^4 \frac{dx}{x} = \left[\log_e x \right]_1^4 = \log_e 4 - \log_e 1 = \log_e 4 =$$

Y en general es

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\log_e x \right]_a^b = \log_e b - \log_e a = \log_e \frac{b}{a}$$

Si dentro de un determinado intervalo (a,b) la función es positiva - en un intervalo parcial y negativa en otra, la integral total entre (a,b) expresará la suma algebraica de las superficies parciales.- - Esta suma podrá ser positiva, nula, o negativa según los límites de la integral.-

Ejemplo: Sea la recta ya vista $y = 2x$

$$\int_{-5}^5 2x \, dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_{-5}^5 = 5^2 - (-5)^2 = 25 - 25 = 0$$

Sea la integral

$$\int_1^2 (x-3) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^2 = \left(\frac{4}{2} - 6 \right) - \left(\frac{1}{2} - 3 \right) = -4 - (-2,5) = -1,5$$

Sea la parábola $y = x^2 - 4$ cuya representación se dió en el - gráfico Nº 5 (pág. 74)

$$\int_0^3 (x^2 - 4) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_0^3 = \left[\frac{27}{3} - 4 \times 3 \right] = 9 - 12 = -3$$

$$\int_0^2 (x^2 - 4) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_0^2 = \left[\frac{8}{3} - 8 \right] = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$$

$$\int_{-2}^3 (x^2 - 4) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^3 = -3 + 5\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$$

y se advierte que es $\int_0^3 = \int_0^2 + \int_2^3$ o sea $-3 - 5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}$

1 Como aplicación de los conceptos analizados resolver las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^2 (x^2 + 4) \, dx$

2) $\int_1^4 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$3) \int_0^a (x-a)^3 dx =$$

$$4) \int_2^3 \frac{x dx}{1+x^2} =$$

FIGURA 20

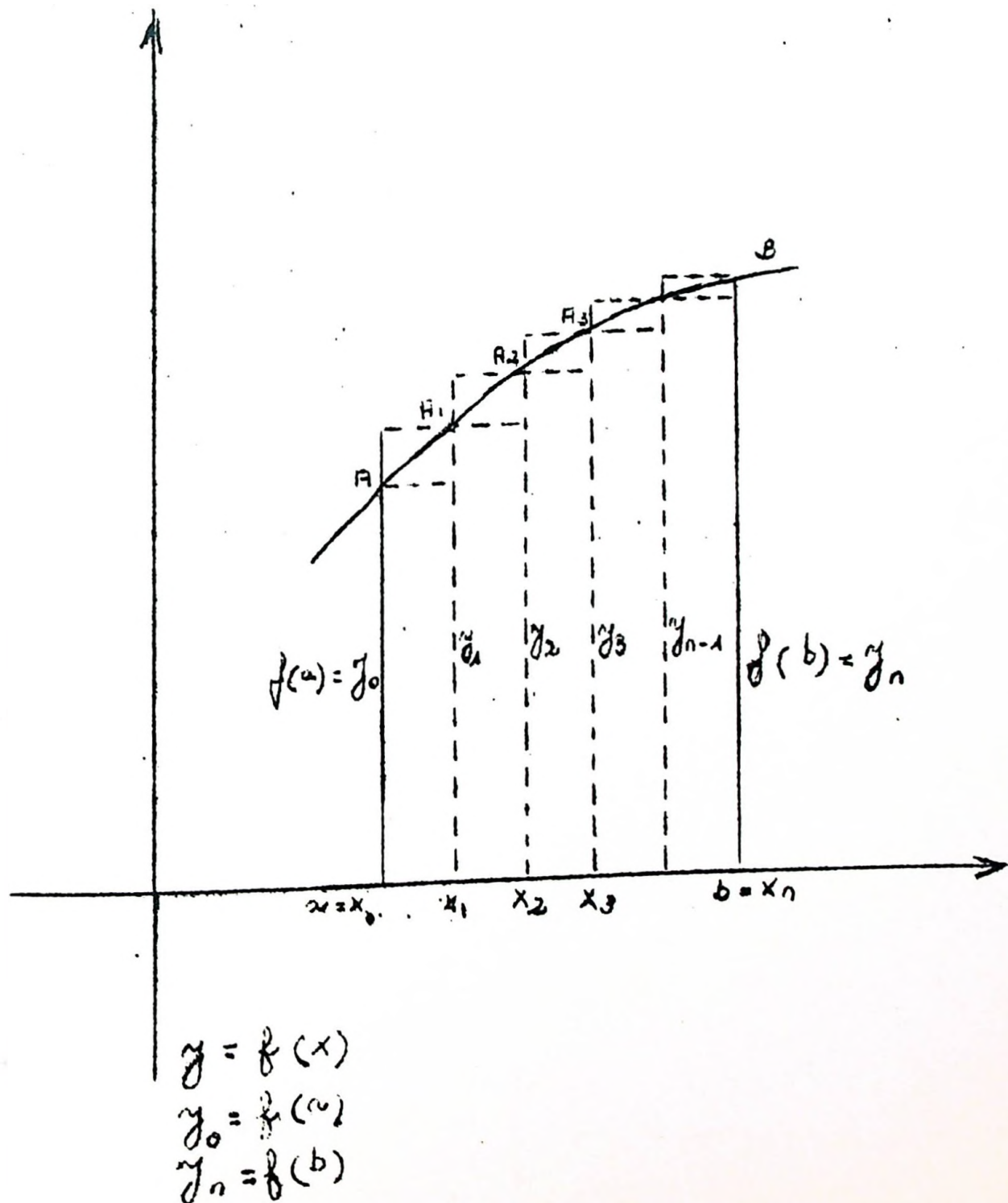
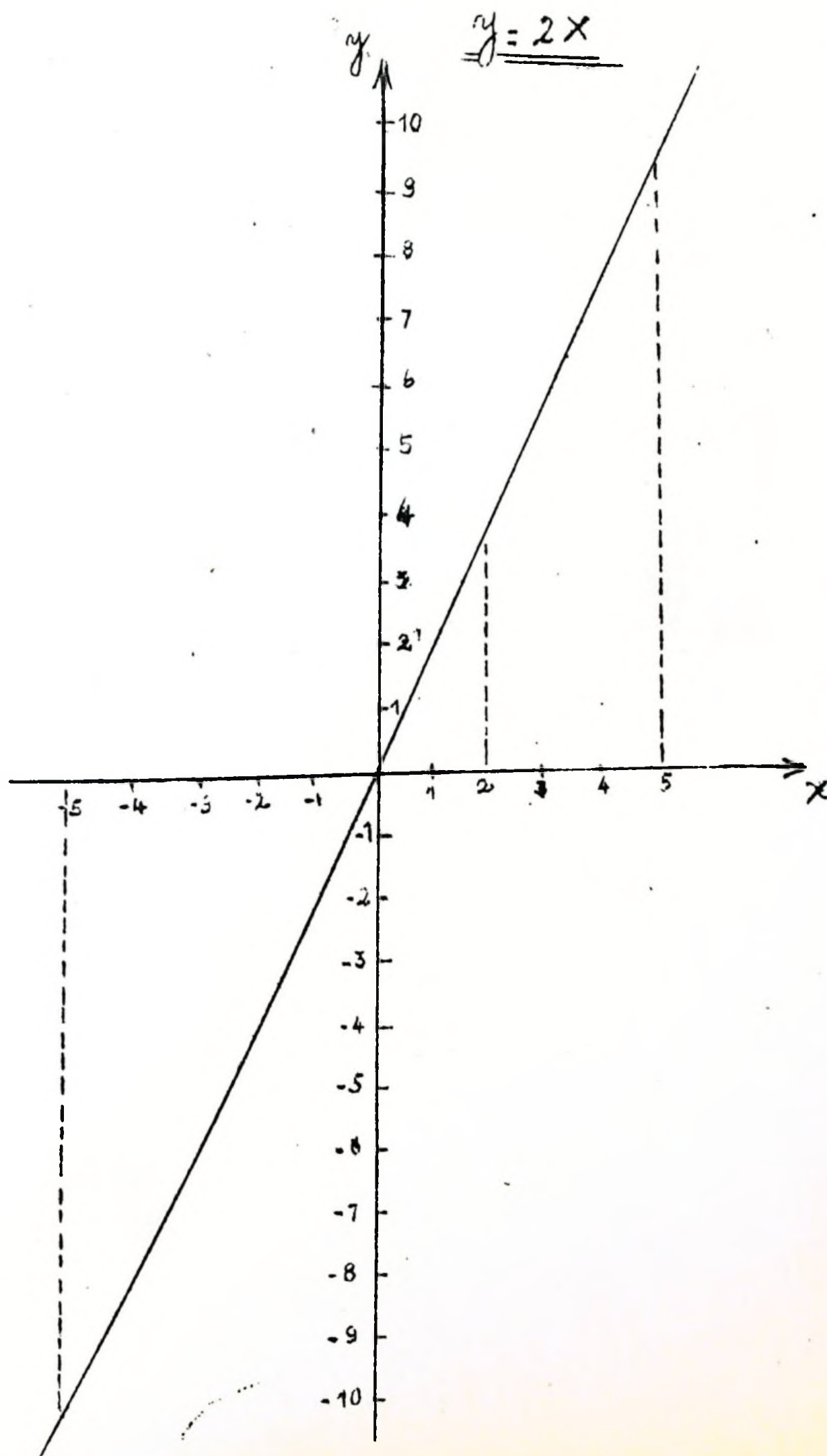


FIGURA 21



NOCIONES DE ESTADISTICA133.- Concepto y definición

El concepto y la definición de "estadística" ha experimentado una gran evolución a través del tiempo. La palabra "estadística" fué usada por primera vez en el año 1748 por un profesor de Política de la Universidad de Gotingia: Godofredo de Achenwall quien definió a la estadística como ciencia cuyo objeto es el conocimiento de las cosas públicas y el enseñar los medios para percibir las relaciones que hay entre ellas siempre que sean dignas de notarse.

La palabra "estadística" etimológicamente proviene de "Estado" del latín "Status" y en sus comienzos se refería exclusivamente a descripciones del carácter literario de las principales actividades del estado: su organización política, población, situación económica, etc. Posteriormente estos aspectos fueron complementados con datos numéricos a medida que se dispuso de los mismos y esto originó la creación de dos tendencias dentro de la flamante estadística universitaria alemana, las de aquellos que preferían el empleo en gran escala de cifras o datos numéricos y aquellos que se inclinaban por las descripciones puramente literarias sin uso de cifras.

Si bien los conceptos sobre la estadística universitaria o gubernativa, en Alemania, son importantes dentro del desarrollo histórico de la materia y fundamentalmente del punto de vista etimológico, revisten igual importancia, en lo que se refiere al contenido actual o moderno de la estadística, tres acontecimientos que ocurrieron casi simultáneamente, entre los siglos XVII y XVIII en el resto de Europa. Ellos son:

1º.- La creación del cálculo de probabilidades ocurrido en Francia, en razón de problemas y consultas formuladas a destacados matemáticos como Blas Pascal y Fermat por jugadores, especialmente jugadores de dados.

Estos problemas, vinculados a los juegos de azar, y algunos de los cuales son clásicos dieron origen al estudio e interés de grandes matemáticos y al solucionarlos crearon los fundamentos del cálculo de probabilidades, base científica sobre la cual se ha edificado la moderna estadística matemática.

2º.- La realización de censos y la compilación de datos numéricos, especialmente demográficos, realizados con carácter público y con fines de estudio y conocimiento general y científico, en Europa y en Estados Unidos. En Suecia en 1749 se levanta el primer censo y desde entonces dicho país es modelo de organización estadística.

Estados Unidos realiza su primer censo en el año 1790 y a partir de dicha fecha ha continuado realizando censos generales cada diez años, en todos los años calendarios terminados en cero. El último censo levantado por los Estados Unidos fué el Décimo Séptimo Censo Decenal llevado a cabo el 1º de abril de 1950. El próximo censo será el Décimo Octavo y se levantará en el año 1960.

En otros países europeos, empiezan también en esos años a recopilar datos estadísticos en forma oficial y regular y es indudable

que el conocimiento de series estadísticas fehacientes y datos numéricos correctos ha facilitado grandemente el desarrollo de la moderna estadística.

32.- La realización de las primeras investigaciones estadísticas, principalmente demográficas, en Inglaterra con Graunt (1620-1674) y en escuela de aritméticos políticos, que fueron los primeros en analizar datos estadísticos correspondientes a natalidad y mortalidad, poniendo de manifiesto y en evidencia ciertas regularidades y relaciones fundamentales con respecto a los mismos. Para ello aplicaron métodos estadísticos elementales, promedios, etc., dando así fundamento a la teoría estadística.

Estas distintas investigaciones, realizadas aproximadamente en los mismos años, en diferentes países y con distintos propósitos y finalidades han formado los cimientos sobre los cuales se ha construido posteriormente, y en épocas más recientes, la teoría estadística.

134.- Evolución de los censos

Los recuentos o censos, principalmente de población, son tan antiguos como la humanidad aún cuando los primitivos no tenían igual finalidad que los actuales censos ni se realizaban con la misma técnica.

En Babilonia se hacían recuentos de la población 3 a 4 mil años antes de Jesucristo -y en China se efectuaban censos parciales desde fechas similares. Igualmente los faraones en Egipto ordenaron recuentos en diversas ocasiones a partir del año 2.500 A.J.C.

En la Biblia existen numerosas referencias sobre censos de Israel, efectuados por Moisés, David y Salomón, generalmente con fines militares: determinar del número de varones en condiciones de tomar las armas.- En el libro de los Números (Pentateuco) hay referencias a un recuento que dio 800.000 censados y donde murieron 70.000 por la peste.

Con los romanos adquiere el censo su mayor importancia -ya en los primeros tiempos de Roma se contaban las familias por los hogares o fogones-. Posteriormente el censo llegó a ser una institución regular y permanente realizándose censos cada 5 años.

Servio Tulio estableció en el año 197 la obligación de todo jefe de familia de inscribirse en la circunscripción (tribu) donde tuviese su domicilio, debiendo declarar bajo juramento el nombre y la edad de su mujer y de sus hijos igual que su fortuna. Los que no hacían esta declaración (incensus) eran severamente castigados.

El responsable o encargado del censo era el censor, cargo de elevada jerarquía en Roma. Los propósitos del censo romano eran disponer de datos sobre servicio militar y pago de impuestos, lo que constituye la diferencia primordial con los censos modernos.

Los censos romanos permitían además clasificar a los ciudadanos en clases o categorías según su fortuna y constituían así la base del gobierno. También en Roma se registraban de modo bastante regular nacimientos y defunciones.

Durante la edad media no se realizan censos generales. Solo existen descripciones o inventarios de países como el Domesday Book

de Guillermo el Conquistador en Inglaterra, especie de catastro levantado el año 1.000 aproximadamente, libro este que más adelante Achenwall denominaría "estadística".

El primer censo moderno se levantó en la provincia de Quebec, en Canadá, en 1666. En Europa Suecia levantó su primer censo en 1749 y en Estados Unidos en 1790 se lleva a cabo el primer censo, siendo este el país que más se ha destacado por la continua regularidad y periodicidad de sus censos decenales.

En Inglaterra el primer censo se levantó en 1801 y desde entonces dicho país los realiza en los años terminados en 1.

Hasta antes de la última guerra mundial muchos países europeos como Italia, Francia y Alemania realizaban censos cada 5 años es decir en períodos quinquenales.

En nuestro país se han realizado 4 censos generales: el 1º en 1869; el 2º en 1895; el 3º en 1914 y el 4º en 1947. Además de estos censos generales se han realizado censos parciales como ser los censos agropecuarios, el censo industrial, los censos municipales y provinciales, etc.

Para ser eficaces, los censos deben ser periódicos, es decir con intervalos constantes y llevarse a cabo en lo posible en igual fecha para facilitar comparaciones. Además deben darse a publicidad en forma total y en breve lapso para que sus datos no pierdan actualidad.

135.- Definición de estadística

El profesor Dr. F.W. Willcot ha publicado en la Revue del Institut International de Statistique (vol. 3 año 1935) una lista con más de 100 distintas definiciones de "Estadística" desde la de Godofredo de Achenwall hasta las actuales.

A través de este trabajo puede advertirse la evolución que ha ido adquiriendo en el tiempo la palabra estadística y su definición y más que esto las modificaciones en el concepto de esta ciencia. En la actualidad el término "estadística" se aplica para expresar los dos siguientes conceptos:

1º.- Para designar un conjunto de datos numéricos relativos a un fenómeno dado. Por ejemplo: estadística de las defunciones por cáncer en la ciudad de Buenos Aires; estadística de las exportaciones argentinas de trigo, por países de destino, durante los últimos 10 años; estadística del producido del impuesto a los réditos por escala de réditos; estadística del importe de las ventas mensuales de una empresa, etc.

2º.- Para designar la rama del método científico relacionado con los datos obtenidos contando o midiendo las propiedades de problemas de fenómenos naturales. (1).

Se advierte así que de un conjunto de datos numéricos la palabra "estadística" ha pasado a significar simultáneamente, y sin perder la acepción anterior, al conjunto de métodos científicos y procedimientos de análisis utilizados para la correcta interpretación de dichos datos.

(1).- M.G. Kendall - The Advanced Theory of Statistics - Vol. I pág. 2.

Se puede apreciar también que en el método estadístico no interesan las características individuales sino los aspectos colectivos de la "población" considerada.

136.- Método estadístico

La teoría estadística consiste en la exposición de los métodos estadísticos. Por métodos estadísticos se entiende el conjunto de métodos y principios que regulan la recolección, análisis, comparación, presentación e interpretación de datos numéricos.

La teoría estadística ha tenido un desarrollo muy reciente y se basa principalmente en el cálculo de probabilidades y en el análisis matemático. En tal sentido puede considerarse a la estadística matemática como una importante rama de las matemáticas aplicadas.

Si bien la teoría estadística es reciente, su desarrollo ha sido tan intenso, especialmente durante el presente siglo que en la actualidad es prácticamente imposible abarcar todos los aspectos de la teoría y de sus numerosas aplicaciones.

137.- Las aplicaciones del método estadístico

Los métodos estadísticos se aplican en casi todas las formas de la investigación científica y en todas las etapas de la misma. La estadística metodológica da normas para la obtención de datos experimentales, para su compilación y exposición, para el cálculo de sus características, para su análisis científico y finalmente para la obtención de conclusiones o leyes con respecto a dichos datos.

Considerable aplicación del método estadístico se realiza en las "ciencias económicas" en general y para el análisis y tratamiento de las series económicas la estadística dispone de métodos especialmente adecuados, que dan origen a la denominada "econometría". Dentro de estos aspectos es muy importante la teoría de los números indicadores o números índices, que da las bases para la elaboración, construcción y uso de los números índices, y a cuyo estudio daremos particular importancia.

La aplicación de los métodos estadísticos a la población, origina la demografía, importante rama para los estudios sociales y económicos. Igualmente la aplicación de métodos estadísticos en el estudio de los fenómenos vinculados con la duración de la vida humana y en general la aplicación de dichos métodos a la Biología origina la Biometría.

También los métodos estadísticos y el cálculo de probabilidades tienen gran aplicación en las modernas teorías de física superior, en la mecánica nacional y en meteorología.

En las investigaciones agronómicas y biológicas la estadística y sus métodos constituye uno de los elementos básicos de las mismas.

Esta vinculación de la estadística con tan diversas ciencias ha sido mutuamente provechosa, pues gracias a ella y a la generalidad de aplicación de sus métodos, la estadística metodológica ha recibido aportes de distintas ciencias e investigadores.

El considerable incremento y desarrollo de la teoría estadística durante los últimos 50 años se debe a la acción de investiga-

dores de distintas ciencias: Matemáticos, especialmente en cálculo de probabilidades; astrónomos como Laplace y Charlier; investigadores en biología y especialmente sobre la teoría de la evolución y las leyes de herencia como Sir Francis Galton y su continuador el profesor Karl Pearson uno de los creadores de la estadística metodológica; actuarios como King y Gempertz; economistas como Jevons Lexis de la escuela de Harvard; demógrafos, investigadores en el campo de la agronomía como el profesor Ronald A. Fisher, etc.

Gracias al esfuerzo personal de estos sabios e investigadores la estadística y sus métodos se han desarrollado y continúan desarrollándose prodigiosamente.

138.- División de la Estadística:

La división más corriente de la estadística es en: 1) Estadística teórica, metodológica o matemática y 2) Estadística aplicada. Otra división de acuerdo al grado de conocimientos que se requiere, es la siguiente, aplicable a la estadística teórica: 1) Estadística elemental, 2) Estadística superior o avanzada.

En la actualidad todas las distinciones de escuelas como ser: oficial o gubernativa, matemática, descriptiva, administrativa, etc. han sido dejadas de lado. Como dice el profesor Conrado Gini en un tratado de Estadística solo existen la escuela de los que se detienen a medio camino o lo recorren todo, aún cuando, agreguemos nosotros, el camino no tenga fin.

Esto origina la especialización de los estadísticos o estadígrafos en distintas ramas o ciencias ya enumeradas: Econometría, Biometría, Demografía, Estadística Censal, Estadísticas vitales, cálculo de probabilidades, Números Índices, etc.

M.i.
35ª Conferencia
25/10/55

139.- Teoría de la Clasificación

La clasificación estadística se ha basado en la teoría de la clasificación de la lógica y especialmente en la denominada "álgebra de la lógica".

Dentro de la clasificación estadística puede distinguirse, siguiendo al profesor C.V.L. Charlier, la clasificación homógrada de la clasificación heterógrada.

En la clasificación homógrada se divide a los elementos - de un conjunto particular que constituye el denominado Universo estadístico, y cuyo total de elementos se indica con la letra N , en - dos clases distintas: Aquellos que poseen un determinado atributo - (A) y aquellos que no lo poseen (α)

Resulta así

$$N = (A) + (\alpha)$$

y la clasificación resultante se denomina "clasificación dicotómica."

En la clasificación heterógrada se considera y mide la diversa intensidad (variable) con que se posee un atributo o las distintas cualidades del mismo.

140.- Atributos

Los atributos por su parte se clasifican en cualitativos - y cuantitativos. Los atributos cualitativos especifican cualidades de un sujeto y se caracterizan por no ser susceptibles de medida. - Ejemplo: el sexo - varón o mujer, el lugar de nacimiento: Argentina, Uruguay, Chile, etc. - El estado civil: solteros, casados, viudos, etc. -

El aspecto numérico en los atributos solo surge al efectuar un recuento en el universo considerado: tantos varones, 70 argentinos 15 solteros etc.

Son atributos cuantitativos aquellos susceptibles de medida y comparación en forma directa e inmediata y por su propia naturaleza: Ejemplos: la edad, la altura, el peso, el sueldo, etc.

Los atributos anteriores son cuantitativos continuos, pues dados dos valores cualesquiera admiten siempre un valor intermedio. - Existen tambien atributos cuantitativos discontinuos que solo admiten determinados valores particulares, por lo general valores enteros. Ejemplos: el número de hijos tenidos por una mujer; el número de miembros de la familia; el número de pisos de un edificio; el número de cuartos de una casa, etc.

Además de ser susceptibles de medidas los atributos cuantitativos se caracterizan por la propiedad de ser comparables dentro de cada uno de ellos.- Así un peso de 80 kilos es igual a dos de 40, o a 8 de 10 kilos cada uno.- Una mujer que tiene 4 hijos tiene el doble de hijos de otra que tiene dos, y la mitad de otra que tenga 8 hijos, etc.

Se advierte de inmediato que los atributos cualitativos no gozan de la propiedad de comparación: Se posee o no el atributo. No puede decirse que una persona es 3 veces mas soltero que otro, o que 1 japonés equivale a 3 chinos, etc.-

Tanto los atributos cualitativos como los cuantitativos pueden ser objeto de una clasificación homógrada o heterógrada.- Así sea la nacionalidad el atributo cualitativo considerado.

Clasificación homógrada = Argentinos y no argentinos

Clasificación heterógrada: Argentinos, Uruguayos, Chilenos, etc.

Esta última clasificación en varias "clases" de un atributo cualitativo se denomina en Estadística Clasificación Múltiple.

En un atributo cuantitativo también pueden aplicarse ambas clasificaciones.

Clasificación homógrada: menores de edad y mayores de edad; altos y bajos, etc.

Clasificación heterógrada: de 0, de 1, de 2, de 3 años etc. = o clasificación por grupos de edades: de 0 a 5 años; de 5 a 10 años, etc.

Se advierte que en general una clasificación dicotónica de un atributo cuantitativo es pobre y no refleja las distintas variedades o clases.

Toda clasificación múltiple puede transformarse siempre en clasificación dicotómica, bastando para ello considerar la presencia de una cualidad determinada y su ausencia, o atributo contrario.- Ejemplo: A: solteros y B: no solteros; C: católicos y D: no católicos; etc.

Las clasificaciones múltiples son en general largas y difíciles, y deben incluirse en las mismas todas las "clases" posibles.- Esto es especialmente cierto en las clasificaciones por profesiones u ocupaciones, por rama de industria o actividad, por lugar de nacimiento, por religión, etc.

141.- Límites en la clasificación

Uno de los aspectos que debe considerarse especialmente en toda clasificación es la fijación de límites precisos para las distintas clases en que se subdivide el Universo.- Dentro de las diversas

Es necesario en cada caso determinar en forma precisa los límites y el contenido de cada clasificación, de modo que en cada caso se sepa, sin dejar duda alguna, donde se incluye cada uno de los elementos que constituyen el llamado Universo.-

Para los atributos cuantitativos existen ciertas normas, que veremos al estudiar el intervalo de clase, y que provienen algunas de ellas de convenciones establecidas en Congresos de Estadística, por las cuales se soluciona en forma exacta y matemática este problema, pero desde luego esto no se aplica a los atributos cualitativos donde los problemas son difíciles y requieren la aplicación de un criterio particular para resolver cada caso.-

Así, y como simple ejemplo, en una clasificación dicotómica por origen y alfabetismo se puede clasificar a la población en argentinos y extranjeros y en alfabetos y analfabetos.- Pero de inmediato surgen las dudas o aclaraciones. Donde figuran los naturalizados? Como se consideran a los semialfabetos, es decir los que saben leer y no escribir? - Donde se han clasificado las personas de origen desconocido o de alfabetismo no declarado? etc.

Se puede apreciar que en una clasificación compleja por otros atributos cualitativos como ser profesores, manualidades, religión, rama de actividad, etc. los problemas de esta índole que se pueden plantear son mucho mas numerosos, y difíciles y requieren en general declaraciones previas y precisas del criterio que se ha seguido en la elaboración de la clasificación.

En la elaboración de Números índices la aplicación de estos conceptos requieren el conocimiento de los artículos que se incluyen en el índice, de los precios elegidos: mayoristas al detalle, etc. y la fuente de las cotizaciones y ponderaciones, así como de los procedimientos de cálculo empleados.-

142.- Distribuciones de Frecuencias

Dadas las características de nuestro curso no entraremos a considerar el estudio de los atributos cualitativos que da origen a la teoría de la Asociación y a la Contingencia, y nos referiremos exclusivamente a los atributos cuantitativos que son los que mas interesan en Números Índices.

Un atributo cuantitativo cualquiera, por ejemplo edad, puede tomar infinito número de valores desde 0 en adelante hasta 100 ó más años.

Es indispensable para la exposición de la respectiva distribución de frecuencia o serie de frecuencia, efectuar un agrupamiento previo del atributo, eligiendo el efecto un determinado intervalo de clase, por ejemplo el año como unidad.

143.- Intervalo de clase

El intervalo de clase es la amplitud con que se toma el atributo

buto en una serie de frecuencia - En general para una correcta comparación entre las frecuencias correspondientes a diversas clases es conveniente que el intervalo de clase sea constante - Se simboliza usualmente por la letra h y en una distribución por edades puede ser igual a 1 año, 5 años, 10 años etc. según se lo elija de acuerdo a las conveniencias de la compilación.

En una distribución por alturas $h = 1$ cm. $h = 5$ cm, etc.

144.- Centralización del intervalo

Para la realización de cálculos en estadística es necesario realizar la centralización del intervalo de clase, es decir asignar un valor único de atributo a las frecuencias correspondientes a una determinada clase.-

Ejemplo:

$$0 - 10 \approx 5$$

$$10 - 20 \approx 15$$

$$20 - 30 \approx 25$$

Es decir se asigna el valor central del intervalo, lo cual es correcto siempre que la distribución no sea irregular o que por lo menos no existan razones para suponer una distribución irregular en cada clase.

Tal puede ocurrir por ejemplo con una distribución de fallecidos por grupos de edad. En tal caso sería erróneo atribuir al grupo de edades:

$$0 - 10$$

un valor central de 5 años ya que debido a la mortalidad infantil - el valor representativo de dicho grupo es muy inferior a 5 - Esto significa que la centralización del intervalo debe realizarse con un previo análisis de las circunstancias en cada caso.-

Otro de los aspectos que deben tenerse en cuenta es la fijación de límites precisos en el intervalo de clase, Así es, por convención:

$$0 - 10 = 0 \leq x < 10$$

$$10 - 20 = 10 \leq x < 20 \text{ etc.}$$

es decir una frecuencia cuyo valor de atributo sea exactamente 10 se incluye en la segunda clase y no en la primera.

145.- Notación en series de frecuencias

Se indica en general por X , los distintos valores que toma una variable constituida por un atributo cuantitativo cualquiera, por f las respectivas frecuencias por N el número considerado y por p_i

las respectivas frecuencias relativas

Resulta así

$$X_i = x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots X_n$$

$$Y_i = y_1 ; y_2 ; y_3 ; \dots Y_n$$

$$P_i = p_1 ; p_2 ; p_3 ; \dots P_n$$

$$N = \sum_{i=1}^n y_i \quad P_i = \frac{y_i}{N} = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1 = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{N} = \frac{N}{N}$$

146.- Media aritmética

Una distribución de frecuencia, por sí sola, no permite apreciar en forma directa e inmediata las características de la misma.- Así por ejemplo, si nos dan dos cuadros estadísticos con la distribución por edades de la población de Buenos Aires y de París, según los últimos censos nos será sumamente difícil sacar conclusiones o efectuar comparaciones con el simple examen de las dos tablas.- Al respecto debemos tener en cuenta que los dos universos difieren en un total y en su comparación por sexo y edades.-

Si en cambio sabemos que la edad media o media aritmética de las edades de la población de la Capital Federal es de 25 años, mientras que la edad media de la población de París alcanza a 35 años, dispondremos ya de una característica o valor señalético que nos permite establecer cual es la población mas joven y en cuanto difieren las edades en las mismas.-

Entre los distintos promedios que van a estudiarse, corresponde destacar a la media aritmética que se define como la suma de los productos de los distintos valores de la variable multiplicados por sus respectivas frecuencias y dividido por la suma total de frecuencias, es decir el Universo N.-

Tiene en consecuencia una definición rigurosa, se basa en todas las observaciones efectuadas, se presta al cálculo algebraico, es un promedio claro y sencillo y se puede calcular con facilidad y rapidez.

La expresión analítica de la media aritmética es:

$$M(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n} = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$p_i = \frac{y_i}{N} \quad \sum_{i=1}^n y_i = N$$

147.- Propiedades de la media aritmética

Para el estudio y análisis de la media aritmética y sus propiedades utilizaremos la expresión

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

148.- Media aritmética de una constante

$$M(k) = \sum_{i=1}^n k p_i = k \sum_{i=1}^n p_i = k$$

La media aritmética de una constante k es igual a dicha constante.

149.- Media aritmética de una constante por una variable

$$M(kx_i) = \sum_{i=1}^n (k x_i) p_i = k \sum_{i=1}^n x_i p_i = k M(x)$$

La media aritmética de una constante por una variable es igual al producto de la constante por la media aritmética de la variable.-

150.- Media aritmética de la suma o resta de varias variables

$$\text{Sea } M(x_i \pm z_i \pm w_i) = \sum_{i=1}^n (x_i \pm z_i \pm w_i) p_i =$$

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i \pm \sum_{i=1}^n z_i p_i \pm \sum_{i=1}^n w_i p_i = M(x) \pm M(z) \pm M(w)$$

La media aritmética de la suma o resta de varias variables es igual a la suma o resta de las medias aritméticas de cada variable.

151.- Media aritmética de los desvíos de una variable con respecto a su media

Sea

$M(x_i - M(x))$ donde $X_i - M(x) = X$ representa los desvíos o deferencias entre los valores de una variable y su media aritmética.-

$$\text{Es } M(X_i - M(x)) = M(X) - M(M(x)) = M(x) - M(x) = 0$$

$$\therefore M(x_i - M(x)) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x)) P_i = \sum_{i=1}^n X_i P_i = 0$$

La media aritmética de la diferencia o desvío de una variable con respecto a su media aritmética es igual a cero.-

152.- Media aritmética de los desvíos de una variable con respecto a un origen arbitrario cualquiera.-

Sea m un valor arbitrario cualquiera de la variable X - y

$$m = M(x)$$

$$M(x - m) = M(x) - M(m) = M(x) - m = d$$

Resulta así

$$M(x - m) = \sum_{i=1}^n (x_i - m) P_i = M(x) - m = d$$

Por lo tanto la media aritmética de los desvíos de una variable.

Con respecto a un valor arbitrario es igual a la diferencia entre la media aritmética y dicho origen arbitrario.

De la expresión anterior resulta

$$M(x) = m + d = \sum_{i=1}^n (x_i - m) P_i + m$$

fórmula ésta que indica el valor de la media aritmética desde un origen arbitrario.-

153/- FORMULA DE LOS PROMEDIOS

La denominada general de los promedios, considerada en clases anteriores, tiene como expresión analítica la siguiente

$$M_h = \left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i^h}{P_i} \right]^{\frac{1}{h}}$$

y da, para distintos valores de la variable h los distintos promedios. Así para $h = 1$ es

$$M_1 = \sum_{i=1}^n x_i P_i = M(x) \text{ es decir resulta la media aritmética}$$

que se ha analizado en la clase pasada

Para $h = 2$ se obtiene

$$M_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 P_i} \text{ expresión esta que contribuye}$$

la media cuadrática y que tiene gran aplicación en el caso de variables que toman valores negativos, pues al elevar la variable al cuadrado todos los valores son positivos evitándose la compensación entre valores positivos y negativos que se produce con la media aritmética.

Por tal propiedad se la utiliza cuando se trata de promediar desvíos. Siendo justamente la media cuadrática de los desvíos o desvío medio cuadrático una de las más importantes características dentro de los valores signaléticos que estudia la Estadística Metodológica.

Para $h = -1$ resulta

$$M_{-1} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{x_i} \right]^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{x_i}}$$

que es la expresión analítica de la Media Armónica. Utilizando fre-
cuencias absolutas la expresión anterior es

149

$$M_{-1} = \frac{N}{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}}$$

Para $h=0$, resulta conforme se demostró ya anteriormente
(punto 108 página 107 a 109)

$$M_0 = \prod_{i=1}^n x_i^{p_i}$$

expresión ésta que corresponde a la Media Geométrica Si utilizamos
frecuencias absolutas, se obtiene

$$M_0 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i y_i}$$

Siendo la función M_h función monótona creciente con re-
lación a la variable h , por ser un derivada siempre positiva, resulta

$$M_{-1} < M_0 < M_1 < M_2$$

Desigualdad que nos indica que la media armónica es me-
nor que la media geométrica, esta a su vez menor que la media aritmé-
tica, y la media aritmética, por su parte, inferior a la media cuadrá-
tica.

Por su importancia dentro de la teoría de los números in-
dices analizaremos en detalle la media armónica y la media geométrica.

154.- MEDIA ARMONICA

La expresión analítica es

$$M_{-1} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}} \quad \text{que se conoce como media armónica pondera-
da}$$

dad

Si consideramos que las frecuencias son iguales a la uni

$$y_i = 1 \text{ es}$$

$$M_{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad \text{que corresponde a la denominada media armónica simple.}$$

Puede definirse así a la Media Armónica como la recíprosa de la Media Aritmética de las recíprocas de los valores de la varia ble.

155.- MEDIA GEOMETRICA

La fórmula de la media geométrica ponderada es:

$$M_o = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i^{y_i}}$$

Si consideramos $y_i = 1$ es

$$M_o = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

que es la expresión analítica de la media geométrica simple.

El cálculo práctico de la media geométrica debe reali- zarse mediante la utilización de logaritmos. Resulta así

$$\log M_o = \frac{y_1 \log x_1 + y_2 \log x_2 + y_3 \log x_3 + \dots + y_n \log x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \log x_i}{N}$$

$$\log M_o = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \dots + \log x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n}$$

como expresión del logaritmo de la media geométrica ponderada y simple respectivamente

Puede definirse así a la media geométrica como el anti-logaritmo de la media aritmética de los logaritmos de la variable.

156.- PROPIEDADES DE LA MEDIA GEOMETRICA

La Media Geométrica goza de diversas propiedades que la hacen especialmente adecuada para su aplicación en las fórmulas de Números Índices.

Sea

$I_i = \frac{P_{i,s}}{P_{i,o}}$ es decir una variable igual al cociente de dos variables.

Resulta así como expresión de la media geométrica de números índices I_i .

$$M_o(I_i) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n I_i} = \sqrt[n]{I_1 I_2 I_3 \dots I_n}$$

$$M_o(I_i) = \sqrt[n]{\frac{P_{1,s}}{P_{1,o}} \cdot \frac{P_{2,s}}{P_{2,o}} \dots \frac{P_{n,s}}{P_{n,o}}} = \frac{\sqrt[n]{P_{1,s} P_{2,s} \dots P_{n,s}}}{\sqrt[n]{P_{1,o} P_{2,o} \dots P_{n,o}}} = \frac{M_o(P_{i,s})}{M_o(P_{i,o})}$$

o sea la media geométrica del cociente de dos variables es igual al cociente de las medias geométricas de cada variable

análogamente si es:

$$X_i = Z_i \cdot W_i \cdot Y_i$$

una variable igual al producto de tres variables, resuelta

$$M_o(X_i) = M_o(Z_i) \cdot M_o(W_i) \cdot M_o(Y_i)$$

o sea la media geométrica del producto de varias variables es igual al producto de las medias geométricas de cada variable.

Estas propiedades dan origen a diversas aplicaciones en Números Índices.

Así es

$$I_{s,o} = \sqrt[n]{\frac{P_{1,s}}{P_{1,o}} \cdot \frac{P_{2,s}}{P_{2,o}} \dots \frac{P_{n,s}}{P_{n,o}}}$$

el índice geométrico simple

del año s en la base del año 0 .

$$I_{t,0} = \sqrt[n]{\frac{P_{1,t} \cdot P_{2,t} \cdots P_{n,t}}{P_{1,0} \cdot P_{2,0} \cdots P_{n,0}}}$$
 el índice geométrico simple
 del año t en base al año 0

Resulta en consecuencia, en virtud de la media geométrica,

$$\frac{I_{s,0}}{I_{t,0}} = \sqrt[n]{\frac{P_{1,s} \cdot P_{2,s} \cdots P_{n,s}}{P_{1,t} \cdot P_{2,t} \cdots P_{n,t}}} = I_{s,t}$$
 el número índice geométrico simple correspondiente al año s, sobre la base del año t. Es decir

$$I_{s,t} = \frac{I_{s,0}}{I_{t,0}}$$

propiedad esta que no tiene ni el índice aritmético ni el armónico, razón por la cual se prefiere el Índice Geométrico a los otros en la teoría de los números índices.

157.- MEDIDAS DE POSICION

Además de los promedios ya analizados, existen las denominadas medidas de posición, que son valores del atributo determinados de acuerdo a la "posición", de las frecuencias en una distribución dada. Entre ellas corresponde destacar al "modo" que es el valor de atributo al cual corresponde la frecuencia máxima y la "mediana" valor de atributo que divide al universo N en dos partes iguales.

A P E N D I C E

CALCULO PRACTICO DE NUMEROS INDICES

En la primera clase nos hemos referido a la construcción de Números Índices y hemos visto en general las fórmulas comunmente utilizadas para su elaboración. Volviendo a retomar dicho tema consideraremos ahora los diversos aspectos teóricos y prácticos correspondientes a Números Índices.

158.- Índices simples.

Consideremos por ejemplo los precios medios anuales registrados para los novillos en el Mercado Nacional de Haciendas de Linares, durante los años 1945 a 1954. Dichos precios expresados en m.n. por kilo vivo de novillos son los siguientes:

Año	1945	0,3781 = P ₄₅
"	1946	0,4096 = P ₄₆
"	1947	0,4973 = P ₄₇
"	1948	0,5268 = P ₄₈
"	1949	0,6266 = P ₄₉
"	1950	0,7530 = P ₅₀
"	1951	1,1966 = P ₅₁
"	1952	1,6845 = P ₅₂
"	1953	1,9707 = P ₅₃
"	1954	2,0457 = P ₅₄

Una expresión como la anterior se conoce en Estadística como serie cronológica y se representa gráficamente sin dificultad utilizando los principios básicos de la Geometría Analítica. Sobre el eje de las abscisas o x se señalan los diferentes años y sobre el eje de las y u ordenadas se marca la escala de los precios en m.n.

Los precios correspondientes a los distintos años se marcan en el gráfico mediante puntos de acuerdo al valor de las coordenadas respectivas y se unen por trazos rectos

Precios m\$n. por k.v.

Nº Indice

154

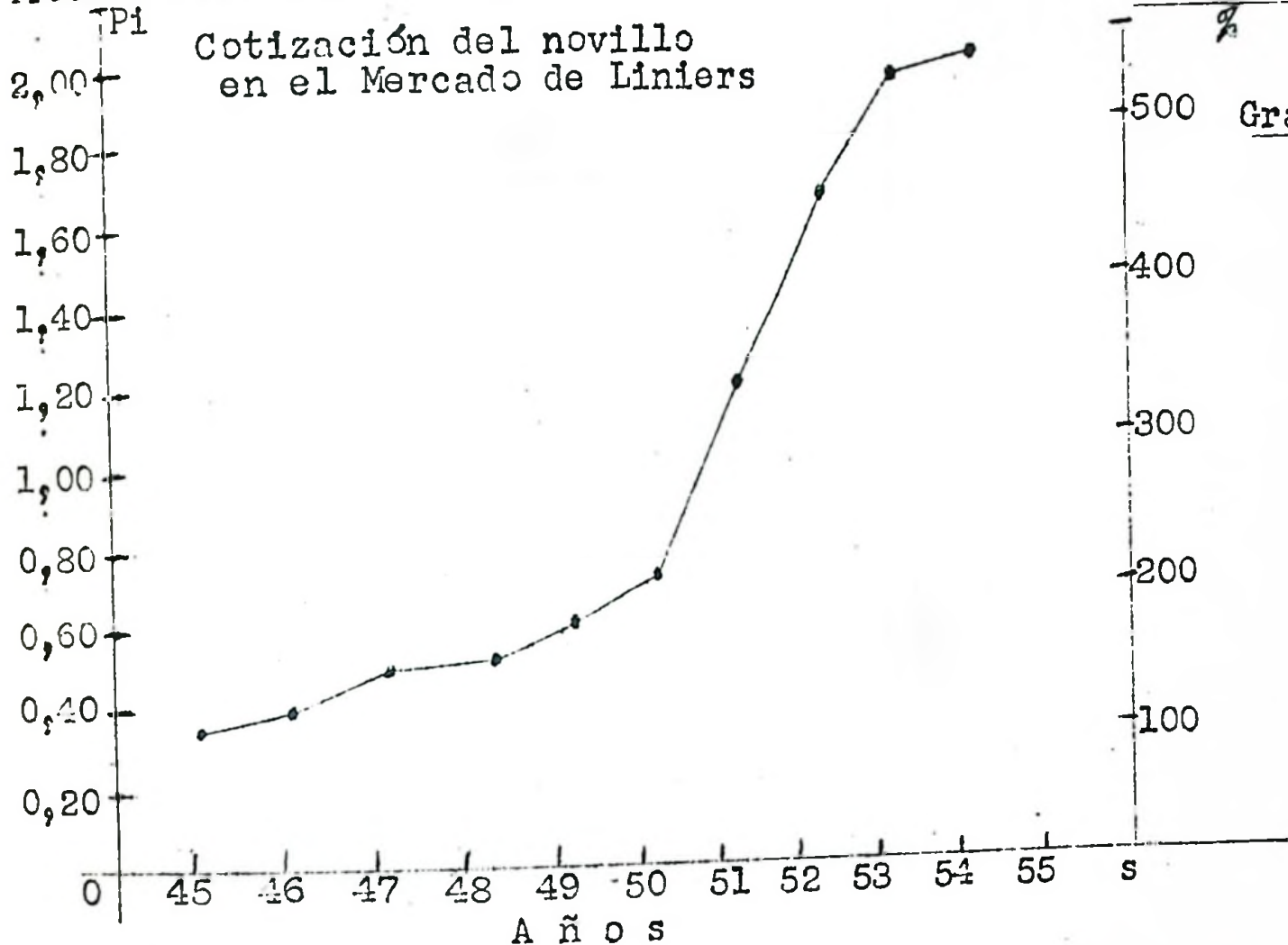


Gráfico Nº 1

La serie de precios anteriores puede expresarse también en forma de un número índice simple tomando como base un año determinado, por ejemplo base: año 1945 = 100.

En tal caso el número índice correspondiente al año 1946 será por ejemplo:

$$I_{46} = \frac{P_{46}}{P_{45}} \times 100 = \frac{0,4096}{0,3781} \times 100 = 108,33$$

y en general para un año s cualquiera, considerando como base el año 1945 = es decir $I_{45} = 100$ será

$$I_s = \frac{P_s}{P_o} \cdot 100$$

Aplicando la fórmula precedente a cada uno de los años considerados se obtienen los siguientes números índices simples o porcentajes correspondientes al precio del novillo en el Mercado sobre la base 1945 = 100.

Año	Indices porcentuales del precio del novillo	Año	Indices porcentuales del precio del novillo
1945	100	1950	199,15
1946	108,33	1951	316,47
1947	131,53	1952	445,52
1948	139,33	1953	521,21
1949	165,72	1954	541,05

La representación gráfica de estos Números Índices o simples porcentos figura en el gráfico N° 1, y es idéntica a la de los precios absolutos con solo considerar la escala porcentual que figura a la derecha del gráfico.

Al pasar de las cifras absolutas a las cifras porcentuales se consiguen las siguientes ventajas: 1ª) Una inmediata y rápida comparación de la evolución de la serie a través del tiempo. Así un índice de 400 nos indica que la serie se ha cuadruplicado con relación al año base, resultado éste que no se puede apreciar tan rápidamente con las cifras absolutas y 2ª) una perfecta comparación con cualquier otra serie porcentual calculada sobre igual base, aún cuando pertenezca a una serie que se exprese en otra magnitud. Así reducidos a índices porcentuales, podemos comparar precios con cantidades o volúmenes, con personas, con importes totales, etc. es decir diferentes magnitudes expresadas todas ellas en forma de Números Índices.

159.- Índice Complejo.

Un índice complejo es aquel en el que se incluyen varios productos en forma simultánea y se consideran las fluctuaciones o variaciones de todos ellos. Los índices complejos pueden ser ponderados o sin ponderar, según se considere o no la distinta importancia relativa de cada uno de los productos incluidos en el índice.

Consideremos por ejemplo los precios de las diferentes clases de Hacienda bovina registradas en el Mercado de Liniers durante los años 1945 a 1954 inclusive. Esta información figura en el adjunto cuadro N° 1. Para cada clasificación: vacas, novillitos, vaquillonas y terneros, se ha calculado al igual que para los novillos los respectivos índices porcentuales anuales sobre la base 1945 = 100, aplicando la fórmula indicada en el punto 158.

Los valores numéricos respectivos figuran en el adjunto cuadro N° 2.

Para disponer de un índice general que refleje los movimientos de precios de la hacienda bovina en general debemos combinar los precitados índices de conformidad a las diversas fórmulas que se utilizan prácticamente conforme se señaló en la primera clase del curso. Veremos ahora prácticamente la aplicación de las siguientes fórmulas:

Cuadro N° 1

PRECIO POR KILO VIVO

Año	Novillos	Novillitos	Vacas	Vaquillonas	Terne-ros
1945	0,3781	0,3985	0,2925	0,3927	0,4342
1946	0,4096	0,4010	0,3054	0,3952	0,4176
1947	0,4973	0,4976	0,3857	0,4938	0,5444
1948	0,5268	0,5643	0,3992	0,5540	0,6041
1949	0,6266	0,6555	0,4471	0,6534	0,6975
1950	0,7530	0,7576	0,5288	0,7521	0,7908
1951	1,1966	1,2255	0,9462	1,2014	1,2738
1952	1,6845	1,7344	1,3360	1,7402	1,7141
1953	1,9707	2,0702	1,6023	2,0244	2,0725
1954	2,0457	2,0561	1,3953	2,0023	2,0293

... Cuadro N° 2

INDICES PORCENTUALES DEL CUADRO N° 1. BASE : 1945 = 100

Año	Novillos	Novillitos	Vacas	Vaquillonas	Terne-ros
1945	100	100	100	100	100
1946	108,33	100,63	104,41	100,64	96,18
1947	131,53	124,87	131,86	125,74	125,38
1948	139,33	141,61	136,48	141,07	139,13
1949	165,72	164,49	152,85	166,39	160,64
1950	199,15	190,11	180,79	191,52	182,13
1951	316,47	307,53	323,49	305,93	293,37
1952	445,52	435,23	456,75	443,14	394,77
1953	521,21	519,50	547,79	515,51	477,31
1954	541,05	515,96	477,03	509,88	467,37

A P E N D I C E(continuación)Número Índice Aritmético Simple

La fórmula que se utiliza para su cálculo es la denominada media aritmética simple:

$$I_{s,0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{2,s}}{P_{2,0}} \right)$$

En nuestro ejemplo es $n = 5$ el número de productos que se incluyen en el Índice, en consecuencia es:

$$I_{s,0} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{P_{2,s}}{P_{2,0}} \right)$$

El primer miembro de esta igualdad representa el Índice General de Precios de la Hacienda Bovina en el año s , sobre la base del año 0 (año 1945 en nuestro caso). Así para calcular el índice correspondiente a 1946 tendremos

$$I_{46,45} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{P_{2,46}}{P_{2,45}} \right) = \frac{1}{5} (108,33 + 100,63 + 104,41 + 100,64 + 96,18) = 102,04$$

y siguiendo igual procedimiento para los diversos años tenemos los siguientes valores:

I_{45}	$= 100$
I_{46}	$= 102,04$
I_{47}	$= 127,88$
I_{48}	$= 129,52$
I_{49}	$= 162,62$
I_{50}	$= 188,74$
I_{51}	$= 309,36$
I_{52}	$= 435,08$
I_{53}	$= 516,26$
I_{54}	$= 502,26$

que refleja las variaciones de precios en el tiempo de toda la hacienda bovina en un conjunto y no solo de los novillos como en el punto anterior. Así por ejemplo vemos como en el índice de novillos el valor de 1954 supera al del 1953, mientras que en este índice general el valor de 1954 es inferior al del 1953, es decir que el aumento reflejado en el precio de los novillos queda compensado en exceso por la baja experimentada en 1954 en los precios de las otras clasificaciones bovinas.

16.1.- Indice Aritmético Ponderado:

En los índices calculados en el punto anterior se ha asignado igual importancia a los precios de los novillos como a los de los terneros ya que se han sumado los respectivos índices y se han dividido por 5.

Es indudable no obstante que dentro de la economía ganadera el novillo constituye el producto terminado de las explotaciones y su importancia económica supera en mucho al de los terneros.

Este concepto puede comprobarse prácticamente utilizando diversos criterios como ser a) El volumen de ventas de las distintas clasificaciones de haciendas en el Mercado Nacional b) El volumen de hacienda en las distintas clasificaciones, faenada en Mataderos y Frigoríficos c) El volumen de la exportación por tipos d) El volumen del consumo interno por clasificación de la hacienda bovina.

Cada uno de los conceptos mencionados precedentemente, y muchos otros más de características similares, constituyen los denominados criterios de ponderación que a juicio del técnico que construye el índice pueden tomarse como base para fijar las ponderaciones de cada uno de los productos incluidos en el mismo. El concepto de ponderación es siempre básico, en cualquier tipo de Índice.

Así por ejemplo en un Número Índice del Costo de la Vida es indudable que la importancia que tienen ciertos productos supera en mucho al de otros. La importancia del pan o de la carne dentro de la economía y presupuesto familiar es indudablemente muy superior a la que pueda tener la sal fina o la sal gruesa por ejemplo. Es decir que un alza de \$ 1 por ejemplo, en el precio del pan, de la carne o de la leche repercute más que un aumento de \$ 1 en el precio de la sal.

En este caso del costo de la vida, es difícil fijar la exacta ponderación de cada uno de los productos, servicios o gastos incluidos y ello sólo puede realizarse en base a una cuidadosa confrontación de los gastos reales realizados por un grupo de familias representativas o significativas, en el sentido que se asigna a estos términos en la teoría de las muestras, y durante un período de tiempo también significativo.

Sobre este último aspecto es necesario considerar como mínimo los gastos reales efectuados durante todo un año. Si en cambio se considera solo una muestra de un mes, por ejemplo, los datos respectivos estarán afectados e influenciados por la denominada "variación estacional". El consumo de gas, luz, kerosene, y combustibles en general es mucho mayor en los meses de invierno que en verano. Por otra parte muchas frutas y verduras solo se adquieren por los consumidores en determinados meses del año, que corresponden a su producción, y en general casi todos los productos que integran el Índice del Costo de la Vida se encuentran afectados en su incidencia en el presupuesto familiar, por factores estacionales.

En consecuencia además de ser representativa la muestra de familias que se tome como base de la ponderación, los datos deben referirse siempre a un período suficientemente extenso como para eliminar dichas variaciones estacionales. Justamente esta obtención de datos básicos para la ponderación del Número Índice constituye una de las labores prácticas que cumplirán los asistentes a este curso.

Volviendo al índice de precios de la Hacienda, podemos elegir como base de la ponderación, teniendo en cuenta el propósito o fin de este Índice que es reflejar las alteraciones de precios de la Hacienda bovina en el Mercado de Liniers, el criterio a) o sea en función del volumen real de ventas en el Mercado de Liniers de cada clasificación.

Elegido el criterio de la ponderación falta aún establecer el período en base al cual se fijarán las cifras respectivas. Podemos elegir por ejemplo, las cifras reales de ventas registradas en el año base 1945, o en el año último: 1954; o en un promedio de los 10 años considerados, o en cualquier otra combinación de datos que nos parezca oportuna para reflejar la importancia relativa de cada producto.

Teniendo en cuenta que una vez elegida la ponderación, la misma debe aplicarse para todos los años en forma constante y sin cambios o alteraciones, tanto para los años pasados, como para los años futuros, parece razonable elegir la ponderación sobre una base cercana y no muy antigua de modo tal que refleje más acertadamente la importancia relativa de cada producto. En este orden de ideas corresponde señalar que con el transcurso del tiempo muchos productos o servicios pierden importancia o son sustituidos por otros. Ejemplos: tranvías por trolebús, géneros y vestidos o medias de seda por géneros, vestidos o medias de nylon, Bilz por Coca-Cola, teatros por cinematógrafos, cinematógrafos por televisión, etc.etc., heladera a hielo por heladera eléctrica, etc.

Si tomamos en consecuencia los kilos vivos negociados en el Mercado de Liniers, en el año 1954 se obtiene el siguiente resultado:

i	Clasificación	Kilos vivos	%	Ponderación q_i
1	Novillos . . .	284.093.310	48,90	50 %
2	Novillitos . . .	120.607.700	20,76	20 %
3	Vacas . . .	91.666.390	15,78	15 %
4	Vaquillonas . . .	58.792.150	10,13	10 %
5	Terneros . . .	25.768.480	4,43	5 %
	Total . . .	580.928.030	100,00	100 %

Para simplificar cálculos exclusivamente, elegimos como ponderación del índice general los siguientes porcentajes: Novillos, 50%; Novillitos, 20 %; Vacas, 15 %; Vaquillonas, 10 % y terneros 5 %.

La fórmula del Índice Aritmético, ponderado basada en el promedio denominado media aritmética ponderada es

$$I_{s,0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n q_i} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{2,s}}{P_{2,0}} \right) q_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^5 q_i} \sum_{i=1}^5 I_{i,s} q_i$$

Donde $I_{s,0}$ es el índice general correspondiente al año s sobre la base del año 0 (1945 en nuestro caso), $P_{i,s}$ es el precio del producto i en el año s ; $P_{i,0}$ el precio del producto i en el año base 1945; $I_{i,s} = \frac{P_{i,s}}{P_{i,0}} \cdot 100$ es el número índice del producto i en el año s y q_i la ponderación correspondiente al producto i .

Es también $\sum_{i=1}^5 q_i = 100\%$ la suma de las ponderaciones

de todos los productos que se incluyen en el índice.

Ejemplo: Para un año cualquiera $s = 1946$ tendremos entonces desarrollando:

$$I_{46} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{P_{i,s}}{P_{i,0}} \right) q_i = \frac{1}{100} \left[(108,33 \times 50) + (100,63 \times 20) + (104,41 \times 15) + (100,64 \times 10) + (96,18 \times 5) \right] = \frac{10.483}{100} = 104,83$$

Aplicando igual procedimiento para los diversos años tenemos los Números Índices respectivos calculados con la fórmula del Índice Aritmético Ponderado.

I_{45}	$= 100$
I_{46}	$= 104,83$
I_{47}	$= 129,36$
I_{48}	$= 139,52$
I_{49}	$= 163,36$
I_{50}	$= 192,97$
I_{51}	$= 313,53$
I_{52}	$= 442,37$
I_{53}	$= 522,09$
I_{54}	$= 519,63$

Comparando los resultados obtenidos con ambos tipos de números índices, podemos observar que para 1954, si bien se observa una baja con respecto a 1953: De 522 a 519 no lo es tan considerable como la del índice aritmético simple: de 516 a 502 respectivamente, debido al hecho de asignar al novillo una ponderación que alcanza al 50% en el Índice Aritmético Ponderado.

16.2.- Índice Geométrico Simple

La fórmula del índice geométrico simple se basa en el promedio denominado Media Geométrica y es

$$I_{s,0} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,s}}{P_{i,0}} \right)}$$

expresión que solo puede calcularse mediante la aplicación de logaritmos.

$$\log I_{s,0} = \frac{\sum_{i=1}^n \log \left(\frac{P_{i,s}}{P_{i,0}} \right)}{n} \text{ resulta así en nuestro caso}$$

$$\log I_s = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \log I_s = \frac{1}{5} (\log I_1 + \log I_2 + \log I_3 + \log I_4 + \log I_5)$$

Para el año 1946 por ejemplo es;

$$\log I_{46} = \frac{1}{5} (\log 108,33 + \log 100,63 + \log 104,41 + \log 100,64 + \log 96,18)$$

$$\log I_{46} = \frac{1}{5} (2,034740 + 2,002727 + 2,018742 + 2,002771 + 1,98308)$$

$$\log I_{46} = \frac{1}{5} (10,042069) = 2,0084138$$

$$\therefore I_{46} = \text{Antilog } 2,0084138 = 101,96$$

Es decir un Número Índice para 1946 igual a 101,96 inferior al índice aritmético simple para dicho año que fué de 102,04; comprobándose así que el promedio geométrico es siempre inferior a la media aritmética.

Realizando operaciones similares para los otros años 1947, 1948, etc. Obtenemos los siguientes Números Índices Geométricos Simples:

I_{45}	= 100
I_{46}	= 101,96
I_{47}	= 127,8
I_{48}	= 139,5
I_{49}	= 161,9
I_{50}	= 188,6
I_{51}	= 309,1
I_{52}	= 434,5
I_{53}	= 515,7
I_{54}	= 501,4

16.3.- Índice Geométrico Ponderado

La fórmula del índice geométrico ponderado se basa en el

promedio denominado media geométrica ponderada, y es

$$I_{s,0} = \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,s}}{P_{i,0}} \right)^{q_i}}} = \sqrt[n]{I_1^{q_1} \cdot I_2^{q_2} \cdot I_3^{q_3} \dots I_n^{q_n}}$$

$$\text{En nuestro caso es } n = 5, \sum_{i=1}^5 q_i = 100$$

Y q_1, q_2, q_3, q_4 y q_5 las ponderaciones porcentuales correspondientes a los productos 1, 2, 3, 4, y 5 ya establecidas al calcular el Índice Aritmético Ponderado.

La expresión anterior se puede calcular prácticamente utilizando logaritmos. Es entonces

$$\log I_{s,0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i \cdot \log \left(\frac{P_{i,s}}{P_{i,0}} \right)}{\sum_{i=1}^n q_i} = \frac{\sum_{i=1}^5 q_i \cdot \log I_{i,s}}{\sum_{i=1}^5 q_i}$$

Para un año s cualquiera, p.e. año 1946, resulta así

$$\log I_{46} = \frac{1}{100} (50 \log 108,33 + 20 \log 100,63 + 15 \log 104,41 + 10 \log 100,64 + 5 \log 96,18)$$

$$\log I_{46} = \frac{1}{100} \left[(50 \times 2,034741) + (20 \times 2,002727) + (15 \times 2,018742) + (10 \times 2,002771) + (5 \times 1,98308) \right]$$

$$\log I_{46} = \frac{1}{100} \left[101,73745 + 40,05454 + 30,28113 + 20,02771 + 9,9154 \right]$$

$$\log I_{46} = \frac{202,01623}{100} = 2,0201623 \therefore I_{46} = 104,75$$

valor inferior al obtenido con el índice aritmético ponderado para dicho año.

Efectuando cálculos similares para los restantes años se obtienen los siguientes índices geométricos ponderados.

I_{45}	=	100	
I_{46}	=	104,75	
I_{47}	=	129,3	
I_{48}	=	139,5	I_{53} = 521,9
I_{49}	=	163,3	I_{54} = 518,9
I_{50}	=	192,8	
I_{51}	=	313,4	
I_{52}	=	442,2	

16.4.- Indice Agregativo Simple

El número índice agregativo simple se forma comparando simplemente la suma de precios de los distintos artículos que lo forman en un año dado, con la suma de precios de esos mismos artículos en el año base.

No corresponde en consecuencia, a diferencia de los números índices ya analizados a fórmulas determinadas de promedios, como la media aritmética, la media geométrica, armónica u a otras medidas de posición como la mediana y el modo, sino simplemente a la división simple de dos sumas de precios.

La fórmula es en consecuencia

$$I_{s,0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,s}}{\sum_{i=1}^n p_{i,0}}$$

donde el numerador representa la suma de precios en el año s y el denominador la suma de los precios en el año base.

En nuestro caso y para el año 1946 por ejemplo, el valor del índice es el siguiente;

$$\sum_{i=1}^5 p_{i,46} = 0,4096 + 0,4010 + 0,3054 + 0,3952 + 0,4176 = 1,9288$$

$$\sum_{i=1}^5 p_{i,45} = 0,3781 + 0,3985 + 0,2925 + 0,3927 + 0,4342 = 1,8960$$

Resulta así en consecuencia

$$I_{46,45} = \frac{\sum_{i=1}^5 p_{i,46}}{\sum_{i=1}^5 p_{i,45}} = \frac{1,9288}{1,8960} = 101,73$$

que es el índice agregativo simple correspondiente al año 1946 sobre la base del año 1945.

Aplicando igual procedimiento para los diversos años se obtienen los siguientes números índices agregativos simples.

Año 1945 : 100
 " 1946 : 101,73
 " 1947 : 127,57
 " 1948 : 139,68
 " 1949 : 162,45

Año 1950 : 188,94
 " 1951 : 308,20
 " 1952 : 432,97
 " 1953 : 513,72
 " 1954 : 502,57

Cuyos resultados lógicamente son algo diferentes a los obtenidos por la aplicación de las otras fórmulas de cálculo.

16.5.- Indice Agregativo Ponderado

El número índice agregativo ponderado se calcula en forma similar al simple, pero multiplicando el precio de cada producto por su respectiva ponderación.

En consecuencia la fórmula que se utiliza para su cálculo es:

$$I_{s,0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,s} q_i}{\sum_{i=1}^n p_{i,0} q_i}$$

y por lo tanto considerando un año cualquiera, 1946 por ejemplo, resulta:

$$\sum_{i=1}^5 p_{i,46} q_i = (0,4096 \times 50) + (0,4010 \times 20) + (0,3054 \times 15) + (0,3952 \times 10) + (0,4176 \times 5) = 39,1210$$

y para el año base 1945 es

$$\sum_{i=1}^5 p_{i,45} q_i = (0,3781 \times 50) + (0,3985 \times 20) + (0,2925 \times 15) + (0,3927 \times 10) + (0,4342 \times 5) = 37,3605$$

Resulta así el siguiente índice agregativo ponderado para el año 1946

$$I_{46,45} = \frac{\sum_{i=1}^5 p_{i,46} q_i}{\sum_{i=1}^5 p_{i,45} q_i} = \frac{39,1210}{37,3605} = 104,71$$

Utilizando para los otros años el mismo procedimiento se obtienen los siguientes números índices agregativos ponderados:

$I_{45,45}$	=	100
$I_{46,45}$	=	104,71
$I_{47,45}$	=	129,18
$I_{48,45}$	=	139,65
$I_{49,45}$	=	163,72
$I_{50,45}$	=	193,28
$I_{51,45}$	=	312,94
$I_{52,45}$	=	441,44
$I_{53,45}$	=	520,82
$I_{54,45}$	=	520,62

16.6.- Indice Armónico Simple

El número índice armónico simple se basa en el promedio denominado medio armónico simple, cuya fórmula es:

$$M-1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

y siendo en nuestro caso la variable $x_i = \frac{p_{i,s}}{p_{i,0}}$ resulta

$\frac{1}{x_i} = \frac{p_{i,0}}{p_{i,s}}$ y en consecuencia la fórmula del índice armónico simple es

$$I_{s,0} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{i,0}}{p_{i,s}}}$$

Para un año cualquiera, por ejemplo para 1946, los cálculos respectivos, en su faz numérica son los siguientes:

$$\sum_{i=1}^5 \left(\frac{p_{i,45}}{p_{i,46}} \right) = \frac{0,3781}{0,4096} + \frac{0,3985}{0,4010} + \frac{0,2925}{0,3054} + \frac{0,3927}{0,3952} + \frac{0,4342}{0,4176} = 0,923095 +$$

+ 0,993765 + 0,957760 + 0,993674 + 1,039750 = 4,908044 y en consecuencia resulta:

$$I_{46,45} = \frac{5}{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{p_{i,45}}{p_{i,46}} \right)} = \frac{5}{4,908044} = 101,87$$

Efectuando un cálculo similar para los demás años, se obtienen los siguientes números índices armónicos simples.

$I_{45,45}$	=	100
$I_{46,45}$	=	101,87
$I_{47,45}$	=	127,80
$I_{48,45}$	=	139,50
$I_{49,45}$	=	161,86
$I_{50,45}$	=	188,50
$I_{51,45}$	=	309,02
$I_{52,45}$	=	433,98
$I_{53,45}$	=	515,26
$I_{54,45}$	=	500,82

Comparando estos números índices armónicos, con los números índices geométricos simples vemos que son menores en su valor, para cada uno de los años considerados. Resulta así en consecuencia, que prácticamente se verifica para cada año, comparando siempre entre sí números índices simples, con simples o números índices ponderados con ponderados, que es

$$M - 1 < M_0 < M_1 \text{ o sea su equivalente en } \underline{\text{Números Índices}}$$

$$\text{Índice Armónico} < \text{Índice Geométrico} < \text{Índice Aritmético}$$

16.7.- Índice Armónico Ponderado

La fórmula del índice armónico ponderado se basa en la fórmula de la media armónica ponderada,

$$M - 1 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i}} \text{ y siendo } X_i = \frac{P_{i,s}}{P_{i,0}} \quad Y_i = q_i$$

resulta en consecuencia

$$I_{s,0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,0}}{P_{i,s}} \right) q_i}$$

como expresión analítica del respectivo número índice.

En nuestro caso particular es

$$\sum_{i=1}^n q_i = 50 + 20 + 15 + 10 + 5 = 100$$

y considerando un año particular cualquiera, por ejemplo el año 1946, la aplicación de la fórmula anterior,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{i,0}}{P_{i,s}} \right) q_i &= \frac{0,3781}{0,4096} \times 50 + \frac{0,3985}{0,4010} \times 20 + \frac{0,2925}{0,3054} \times 15 + \frac{0,3927}{0,3952} \times 10 + \\ &+ \frac{0,4342}{0,4176} \times 5 = 95,53194 \end{aligned}$$

Por lo tanto es

$$I_{1946,15} = \frac{\sum_{i=1}^5 q_i}{\sum_{i=1}^5 \left(\frac{P_{i,0}}{P_{i,s}} \right) q_i} = \frac{100}{95,53194} = 104,67$$

Aplicando el criterio establecido por los diversos años se obtienen los siguientes números índices armónicos ponderados:

$I_{45,45}$	=	100
$I_{46,45}$	=	104,67
$I_{47,45}$	=	129,28
$I_{48,45}$	=	139,50
$I_{49,45}$	=	163,22
$I_{50,45}$	=	192,71
$I_{51,45}$	=	313,35
$I_{52,45}$	=	441,98
$I_{53,45}$	=	521,68
$I_{54,45}$	=	518,31

que lógicamente son inferiores a los respectivos índices geométricos ponderados para cada uno de los respectivos años.

16.8.- Índice Ideal de Fisher

La denominada fórmula ideal para números índices, que se atribuye al economista Irving Fisher, es un promedio geométrico de dos índices agregativos ponderados. Uno de ellos se determina utilizando las ponderaciones de cada artículo en el año base y el otro índice agregativo se calcula en base a las ponderaciones variables correspondientes a cada uno de los años considerados.

En consecuencia la expresión analítica de la fórmula ideal es:

$$I_{s,0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,s} q_{i,0}}{\sum_{i=1}^n p_{i,0} q_{i,0}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,s} q_{i,s}}{\sum_{i=1}^n p_{i,0} q_{i,s}}}$$

El inconveniente para la aplicación de la fórmula anterior reside en el hecho de que es necesario disponer de 4 series distintas de informaciones estadísticas, a saber:

- 1) Precios de cada artículo en el año base.
- 2) Precios de cada artículo en cada uno de los años considerados.
- 3) Ponderación de cada artículo, tomada como base.
- 4) Ponderación de cada artículo, en cada uno de los años considerados.

En nuestro ejemplo conocemos ya la información requerida en los puntos 1 y 2. Con respecto a las cifras para los puntos 3 y 4, o sea las ponderaciones a aplicar para cada uno de los diversos años, a los precios de la hacienda en el Mercado de Liniers, en el cua-

dro N° 3 adjunto, se indican las respectivas cifras absolutas y relativas, que están constituidas por el peso vivo en toneladas de las haciendas vendidas cada año en el citado Mercado, correspondientes a cada una de las respectivas clasificaciones de la hacienda.

16.9.- Aplicación de la Fórmula Ideal

Para la aplicación práctica de la fórmula de Fisher, debemos considerar separadamente los dos índices agregativos ponderados que en ella figuran.

a) Con respecto al primer índice, o sea con ponderaciones del año base, las respectivas cifras ya han sido calculadas en el punto 165 referente al índice agregativo ponderado.

Así por ejemplo, el número índice correspondiente al año 1946 era: 104,71 conforme se calculó oportunamente, y en forma análoga se realizó el cálculo para los otros años.

b) Con respecto al segundo índice agregativo ponderado, con ponderaciones de cada año, su cálculo, para el año 1946 por ejemplo se realiza en la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^5 p_{i,46} q_{i,46} = (0,4096 \times 33,29) + (0,4010 \times 21,17) + (0,3054 \times 18,85) + \\ + (0,3952 \times 11,89) + (0,4176 \times 14,80) = 13,6356 + 8,4892 + \\ + 5,7568 + 4,6989 + 6,1805 = 38,7610$$

En forma similar:

$$\sum_{i=1}^5 p_{i,0} q_{i,46} = (0,3781 \times 33,29) + (0,3985 \times 21,17) + (0,2925 \times 18,85) + \\ + (0,3927 \times 11,89) + (0,4342 \times 14,80) = 12,59 + 8,44 + 5,51 + 4,67 + \\ + 6,43 = 37,64$$

El valor del segundo índice agregativo ponderado, para el año 1946, es entonces:

$$\frac{\sum_{i=1}^5 p_{i,46} q_{i,46}}{\sum_{i=1}^5 p_{i,0} q_{i,46}} = \frac{38,7610}{37,64} = 102,98$$

Realizando un cálculo similar para los diferentes años resultan los siguientes índices:

PESO VIVO DE LAS HACIENDAS VENDIDAS EN EL MERCADO DE LINIERS

Años	Novillos	Novillitos	Vacas	Vaquillonas	Terneros	Total
(EN TONELADAS)						
1945	343.289	145.941	95.775	71.417	95.580	752.002
1946	284.389	180.836	161.008	101.620	126.506	854.359
1947	483.172	207.135	201.579	140.894	142.391	1.175.171
1948	449.552	245.274	156.875	159.399	169.785	1.180.885
1949	405.286	268.076	143.059	206.599	159.394	1.182.414
1950	393.290	241.615	171.447	200.216	169.676	1.176.244
1951	414.547	152.197	184.667	126.381	103.323	981.115
1952	302.418	201.182	190.496	139.156	76.984	910.236
1953	306.474	195.620	114.971	98.207	33.296	748.568
1954	284.093	120.608	91.666	58.792	25.768	580.927

CIFRAS RELATIVAS (porcentuales)

1945	45,65	19,41	12,74	9,50	12,70	100,00
1946	33,29	21,17	18,85	11,89	14,80	100,00
1947	41,12	17,63	17,15	11,99	12,11	100,00
1948	38,07	20,77	13,28	13,50	14,38	100,00
1949	34,28	22,67	12,10	17,47	13,48	100,00
1950	33,44	20,54	14,58	17,02	14,42	100,00
1951	42,35	15,51	18,82	12,88	10,53	100,00
1952	33,22	22,10	20,93	15,29	8,46	100,00
1953	40,94	26,13	15,36	13,12	4,45	100,00
1954	48,90	20,76	15,78	10,12	4,44	100,00

Año	1945	=	100
A"	1946	=	102,98
"	1947	=	128,68
"	1948	=	139,78
"	1949	=	163,26
"	1950	=	191,05
"	1951	=	311,88
"	1952	=	439,61
"	1953	=	521,01
"	1954	=	524,78

La etapa subsiguiente es calcular la Media Geométrica de los dos índices agregativos ponderados: el a) calculado en el punto N° 165 y el b) calculado precedentemente.

Para el año 1946, resulta como ejemplo:

$$I_{46,45} = \sqrt[2]{104,71 \times 102,98} = \sqrt[2]{10.783,04} = 103,84$$

como valor del respectivo Número Índice.

Un cálculo igual debe efectuarse para los demás años, trayendo las raíces cuadradas de los productos de los dos índices agregativos. Los resultados que dan los Números Índices de los precios de la hacienda bovina utilizando la fórmula Ideal de Fisher, son los siguientes:

$I_{45,45}$	=	100
$I_{46,45}$	=	103,84
$I_{47,45}$	=	128,9
$I_{48,45}$	=	139,7
$I_{49,45}$	=	163,4
$I_{50,45}$	=	192,1
$I_{51,45}$	=	312,4
$I_{52,45}$	=	440,5
$I_{53,45}$	=	520,9
$I_{54,45}$	=	522,6

Finalmente y como resumen se indican en el cuadro N° 4 los resultados obtenidos aplicando las diversas fórmulas empleadas para el cálculo.

COMPARACION DE LOS DISTINTOS NUMEROS INDICES OBTENIDOS APLICANDO DIVERSAS FORMULAS

a) Indices Simples

Año	Indice aritmético	Indice geométrico	Indice armónico	Indice agregativo
1945	100	100	100	100
1946	102,04	101,96	101,87	101,73
1947	127,88	127,8	127,80	127,57
1948	139,52	139,5	139,50	134,68
1949	162,06	161,9	161,86	162,45
1950	188,74	188,6	188,50	188,94
1951	309,36	309,1	309,02	308,20
1952	435,08	434,5	433,98	432,97
1953	516,26	515,7	515,26	513,72
1954	502,26	501,4	500,82	502,57

b) Indices Ponderados

Años	Ind. aritmético	Ind. geométrico	Ind. armónico	Ind. agregativo	Indice ideal
1945	100	100	100	100	100
1946	104,83	104,75	104,67	104,71	103,84
1947	129,36	129,3	129,28	129,18	128,9
1948	139,52	139,5	139,50	139,65	139,7
1949	163,36	163,3	163,22	163,72	163,4
1950	192,97	192,8	192,71	193,28	192,1
1951	313,53	313,4	313,35	312,94	312,4
1952	442,37	442,2	441,98	441,44	440,5
1953	522,09	521,9	521,68	520,82	520,9
1954	519,63	518,9	518,31	520,62	522,6

Como podrá apreciarse existe gran similitud entre los resultados obtenidos aplicando las diversas fórmulas empleadas para el cálculo, especialmente dentro de los índices simples y ponderados respectivamente.-

Se aprecia que para cada año se verifica la desigualdad:

$$I. \text{ Arit. } > I. \text{ Geom. } > I. \text{ Armónico}$$

tanto en los índices simples como ponderados. En algunos años como en 1948, las diferencias sólo son de décimas o centésimas, mientras que las máximas diferencias no sobrepasan a 2 unidades en ningún caso.-

En cuanto al índice agregativo y al índice ideal sus fluctuaciones son variadas con relación a otros índices, sin guardar una relación fija.-

M.i.

