

CENTRO DE CAPACITACION TECNICA PARA
FUNCIONARIOS ESTADISTICOS

TEORIA Y PRACTICA DE LOS NUMEROS INDICES
(Programa sintético)

Profesor José Barral Souto

CENTRO DE CAPACITACION TECNICA PARA FUNCIONARIOS ESTADISTICOS

TEORIA Y PRACTICA DE LOS NUMEROS INDICES

(Programa sintético)

Profesor José Barral Souto

INTRODUCCION

Objeto y significado de los Números Indices

Precios

Concepto de dimensión y su aplicación a los precios

PRELIMINARES DE METODOLOGIA ESTADISTICA

Presentación y clasificación de las observaciones

Tabla de distribución de frecuencias

Representaciones gráficas

Valores medios, su cálculo y propiedades

Medidas de variabilidad

NUMEROS INDICES

El problema de medir la variación de los precios y de la producción

Diferentes clases de índices. Métodos de ponderación

Variabilidad y errores sistemáticos de los Números Indices

Diferentes pruebas para constatar los Números Indices

Criterios de preferencia o de selección de los Números Indices

Rectificación de fórmulas; intercambio de las ponderaciones

Número Índice óptimo

APLICACIONES DE LOS NUMEROS INDICES

Indices del costo de vida; precios minoristas y mayoristas; nivel general de precios

Encuestas sobre el presupuesto familiar de gastos, etc.

CENTRO DE CAPACITACION TECNICA PARA FUNCIONARIOS ESTADISTICOS

I.t.p.
la. Conf.
año 1955

TEORIA Y PRACTICA DE LOS NUMEROS INDICES

Introducción

1.1 Entre los procedimientos utilizados por la Metodología Estadística para medir y reflejar el sentido de las variaciones observadas en los precios, los salarios, la producción, etc., en diferentes épocas o lugares, figura el de los Números Indices o Números indicadores, traducción literal de la designación inglesa "Index Numbers".

Es a raíz de los trastornos experimentados por los precios particularmente después de las guerras, que el uso de los Números Indices se ha extendido notablemente entre quienes se interesan por las actividades económicas y por su lógica repercusión política y social.

Es cierto que las diferentes fórmulas propuestas para calcular los Números Indices arrojan diferentes resultados. Pero esa no es razón suficiente para desecharlas por inútiles ya que lo mismo ocurre con cualquier magnitud física si se repite su medida y quiere aumentarse su precisión; pero lo que más bien interesa es conocer el grado de discrepancia de las diferentes fórmulas; y cómo decidir cual de las fórmulas debe preferirse en base a pruebas convenientes juzgando por su comportamiento respecto de los mismos datos estadísticos.

Casi todo el mundo tiene una idea siquiera sea rudimentaria de frases tales como "un alto costo de la vida" o "un bajo nivel de precios", pero no sucede lo mismo con la medida del quantum de ese "alto" ni de ese "bajo" y es precisamente para resolver esa cuestión que se han ideado los Números Indices.

Si todos los precios variaran al unísono no habría necesidad de tales Números Indices; pero el hecho de que cada uno de ellos varía diferentemente exige algún artificio adecuado como para reflejar su variación media o de conjunto. Si como dice Irving Fisher (1) se consideran los precios correspondientes a un cierto momento y se les observa en un momento ulterior, parecieran dispersarse tal como pueden hacerlo los fragmentos de una bomba al estallar. Pero así como existe un determinado centro de gravedad de los diversos fragmentos, que conservan mientras se desplazan, también existe un determinado movimiento medio de los precios dispersos, que pretende expresarse con el Número Índice.

1.2 Un Número Índice de precios señala el tanto por ciento que representa el precio de un cierto momento, respecto del precio en otro momento.

(1) Irving Fisher: The Making of Index Numbers. 2nd. ed, New York 1923.

Ejemplo:

Años	Pan	Asado	Falda	Azúcar
PRECIOS OBSERVADOS EN PESOS M/N. POR KILO				
1952	1,05	6,50	3,50	2,37
1953	1,58	5,22	2,76	2,90
1954	1,56	4,80	2,50	2,99
NUMEROS INDICES				
1952	100	100	100	100
1953	150,5	80,4	78,8	122,5
1954	148,6	73,8	71,4	126,3

Dentro de la economía se define al precio como la relación de cambio entre dos bienes económicos. Por ejemplo, si se cambian 10 kilos de pan por 5 kilos de azúcar el precio de la unidad de pan expresado en unidades de azúcar $5/10 = 0,50$; y recíprocamente el precio de la unidad de azúcar expresado en unidades de pan es de $10/5 = 2$.

Pero toda relación entre dos magnitudes importa medir a una de ellas tomando como unidad de medida a la otra y es siempre conveniente agregar al número obtenido una frase que indique que es lo que se mide y con que se mide. En el ejemplo precedente puede escribirse, evidentemente, las siguientes equivalencias

$$\frac{5 \text{ unidades de azúcar}}{10 \text{ unidades de pan}} = \frac{0,5 \text{ unidades de azúcar}}{1 \text{ unidad de pan}} = 0,50 \frac{\text{azúcar}}{\text{pan}}$$

Con el símbolo $0,50 \frac{\text{azúcar}}{\text{pan}}$ quiere decirse pues, de manera abreviada: 0,50 unidades de azúcar se cambian por 1 unidad de pan; y recíprocamente,

$$\frac{10 \text{ unidades de pan}}{5 \text{ unidades de azúcar}} = \frac{2 \text{ unidades de pan}}{1 \text{ unidad de azúcar}} = 2 \frac{\text{pan}}{\text{azúcar}}$$

2 unidades de pan se cambian por 1 unidad de azúcar: se tiene en consecuencia:

precio del pan en azúcar = $0,50 \frac{\text{azúcar}}{\text{pan}}$: (o precios de 1 unidad de pan expresado en unidades de azúcar)

precio del azúcar en pan = $2 \frac{\text{pan}}{\text{azúcar}}$: (o precio de 1 unidad de azúcar en unidades de pan)

Vemos entonces que el enunciado de la relación consta de dos partes la primera es un número abstracto, llamado valor numérico que indica el número de unidades de un bien que se cambian por 1 unidad del otro bien; y la segunda por el nombre de los bienes cambiados.

1.3 A las relaciones numéricas de la física se les asigna una dimensión

I.t.p. I

diciendo por ejemplo, respecto de la velocidad, v

$$v = \frac{e}{t} = \frac{\text{número de unidades de distancia recorridas v.g en centímetro}}{\text{número de unidades de tiempo empleados en el recorrido v.g. en segundos}}$$

que tiene en este caso, la dimensión, 1, respecto de la unidad de longitud, el cm., y la dimensión, -1, respecto de la unidad de tiempo, el segundo. Ese concepto se resume en el símbolo siguiente:

$$[v] = \left[\frac{e}{t} \right] = \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = \text{cm}^1 \text{ seg}^{-1}$$

Análogamente respecto de la aceleración a , o sea del incremento de velocidad por unidad de tiempo. Supuesto que ese incremento sea constante a partir de la velocidad cero, en el momento **cero**.

$$a = \frac{v}{t} = \frac{\text{número de unidades de velocidad incrementadas (expresables en cm}^1 \text{ seg}^{-1})}{\text{número de unidades de tiempo necesarias para el incremento (expresables en seg}^1)}$$

expresando como dimensión de a ,

$$[a] = \left[\frac{v}{t} \right] = \left[\frac{v}{t} \right] = \frac{\text{cm}^1 \text{ seg}^{-1}}{\text{seg}^1} = \text{cm}^1 \text{ seg}^{-2},$$

es decir: la aceleración tiene la dimensión, 1, respecto de la unidad de longitud, el centímetro (cm); y la dimensión, -2, respecto de la unidad de tiempo, el segundo (seg). Se comprende, entonces, que las áreas y volúmenes, por expresarse en cm^2 y cm^3 , tienen las dimensiones 2 y 3 respecto de la unidad, el centímetro.

La dimensión juega el papel de una nueva unidad de medida, formada en base a unidades que se toman como fundamentales, como el centímetro el gramo y el segundo (o bien sus múltiplos; metro, kilo, minuto, kilómetro, tonelada, hora, etc.).

1.4 Los mismos conceptos precedentes son aplicables en el campo económico, pues los datos observados se expresan, por lo general, en términos de unidades diferentes, sean estas monetarias, de tiempo o volumen físico: pesos, centavos, kilos, litros, toneladas, salarios por día, por semana ó por mes, renta anual, etc.; y particularmente a la relación de nominada precio que expresa una cantidad de cierto bien tomando como unidad una cantidad de otro bien.

Designando genéricamente con las letras minúsculas a y b , respectivamente al número de unidades de los bienes que caracterizamos con las letras mayúsculas A y B , se tiene que

$$r_{BA} = \frac{b}{a} = \frac{\text{número de unidades del bien A}}{\text{número de unidades del bien B}}$$

es el valor numérico del precio del bien B expresado en A (o precio de una unidad del bien B en unidades del bien A); en tanto que la dimensión de ese precio.

$$[P_{AB}] = \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{A}{B} = A^1 B^{-1}$$

se expresa como cociente de las dimensiones de los números relacionados a y b

Inversamente

$$P_{BA} = \frac{b}{a} = \frac{\text{número de unidades del bien B}}{\text{número de unidades del bien A}}$$

es el valor numérico del precio del bien A expresado en B; en tanto que su dimensión es

$$[P_{BA}] = \left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{B}{A} = BA^{-1}$$

La importancia del concepto de dimensión reside en que permite reconocer las cantidades homogéneas que pueden, por lo tanto, sumarse numericamente conservando la misma dimensión para el número resultante.

1.5 El bien utilizado preferentemente como unidad común para expresar los precios de otros bienes, ha sido un metal precioso oro o plata, por las posibilidades de servir de intermediarios en los cambios de bienes y a causa de ser esos metales convenientemente fraccionables, sin desgaste sensible, universalmente demandados y su existencia mundial regulada en cierto modo naturalmente por las dificultades de su extracción. No obstante la evolución experimentada por el concepto precedente puede decirse que en un régimen general de cambios se reserva la denominación de precio a la relación existente en un momento dado entre un peso de metal fino y una determinada cantidad de cualquier otro bien. Teóricamente, la relación de cambio entre el metal fino y el bien considerado. Claro está que no siempre la palabra precio esta utilizada con ese sentido directo, si bien a través de sucesivos cambios puede llegarse a establecer la equivalencia antemencionada, entre metal fino y cualquier bien económico.

Forma parte de nuestros hábitos traducir en moneda ó por lo menos referir a un tercer bien económico ó mercancía lo que juzgamos que tiene un valor de cambio, y si bien la unidad monetaria es la medida común ó patrón de los valores de cambio, es fácil pasar de estos valores a los que corresponde cuando se reemplaza la moneda por un bien cualquiera.

En efecto, atendiendo al significado de P_{AB} (precio de B en A) y al de P_{BC} (precio C en B) decimos:

(I) P_{AB} , unidades de A se cambian por 1 unidad de B;

(II) P_{BC} , unidades de B se cambian por 1 unidad de C,

y por lo tanto

si 1 unidad de B se cambia por P_{AB} unidades de A

(III) P_{BC} unidades de B se tendrán que cambiar por $P_{BC} \cdot P_{AB}$ unidades de A.

Según (II) y (III) resulta, entonces que (con * indicamos equivalencia)

$$P_{BC} \text{ unidades de B} \doteq 1 \text{ unidad de C} \doteq P_{AB} P_{BC} \text{ unidades de A}$$

Pero esto significa que el número que resulta del producto $P_{AB} \cdot P_{BC}$ es el valor numérico del precio de C en B, es decir P_{BC} ,

Luego, como regla que pone de manifiesto el carácter transitivo de los precios, escribimos

$$P_{AB} \cdot P_{BC} = P_{AC},$$

o en palabras:

$$(\text{precio de B en A}) \times (\text{precio de C en B}) = (\text{precio de C en A})$$

De la propiedad precedente se desprende, despejando, P_{BC} ,

$$P_{BC} = \frac{P_{AC}}{P_{AB}}$$

es decir,

$$(\text{precio de C en B}) = \frac{(\text{precio de C en A})}{(\text{precio de B en A})}$$

relación que nos permite obtener la razón de cambio entre dos bienes cualesquiera mediante el simple cociente, de sus precios referidos a un mismo bien, y en particular mediante sus precios en moneda.

1.6 En lo que respecta a las dimensiones tiene que verificarse correlativamente, para el producto de precios,

$$[P_{AB} P_{BC}] = [P_{AB}] [P_{BC}] = [P_{AC}]$$

es decir, reemplazando por los símbolos pertinentes,

$$AB^{-1} \cdot BC^{-1} = AC^{-1}$$

Análogamente, para el cociente de precios

$$[P_{BC}] = \left[\frac{P_{AC}}{P_{AB}} \right] = \frac{P_{AC}}{P_{AB}} = \frac{AC^{-1}}{AB^{-1}} = BC^{-1}$$

Se observa, en ambos casos, que con los símbolos que representan dimensiones se procede respecto del producto y cociente, de acuerdo con la regla de los exponentes al considerar factores de igual base, debiendo considerar que la dimensión del producto (respectivamente, cociente) de dos magnitudes es el producto (respectivamente cociente) de las respectivas dimensiones.

Simbólicamente si x e y son dos magnitudes, para las dimensiones del producto y cociente valen las relaciones siguientes.

$$[x \cdot y] = [x] \cdot [y]$$

$$\frac{x}{y} = \frac{[x]}{[y]}$$

En cambio debe tenerse presente que la suma ó diferencia de dos mag

nitudes, $x + y$ o $x - y$, carecen de sentido excepto en el caso de que ambas magnitudes sean de la misma dimensión, pues entonces el mismo resulta de la suma o de la diferencia tiene, también, la misma dimensión:

$$(x + y) = (x - y) = (x) = (y)$$

1.7 Utilizando el signo $\equiv$ para indicar equivalencia, podemos ilustrar numericamente las nociones precedentes de la siguiente manera:

$$\text{El precio de 1 kilo de pan, es de } \$ 1,05 \equiv \frac{1,05 \text{ unidades de 1 peso m/h}}{1 \text{ unidad de 1 kilo de pan}}$$

$$\text{El precio de 1 kilo de azúcar, es de } \$ 2,26 \equiv \frac{2,26 \text{ unidades de 1 peso m/h}}{1 \text{ unidad de 1 kilo de azúcar}}$$

Abreviando algo la notación, podemos escribir entonces, para el precio del pan en azúcar

$$\frac{1,05 \text{ pesos}}{1 \text{ pan}} \cdot \frac{2,26 \text{ pesos}}{1 \text{ azúcar}} = \frac{1,05 \text{ azúcar}}{2,26 \text{ pan}};$$

y para el precio del azúcar en pan:

$$\frac{2,26 \text{ pesos}}{1 \text{ azúcar}} \cdot \frac{1,05 \text{ pesos}}{1 \text{ pan}} = \frac{2,26 \text{ pan}}{1,05 \text{ azúcar}}$$

Representando con A la unidad monetaria, 1 peso m/n.; con B la unidad de pan, 1 kilo de pan; con C la unidad de azúcar, 1 kilo de azúcar; y consecuentemente con P_{AB} , el precio monetario del pan; con P_{AC} el precio monetario del azúcar, escribimos

$$P_{AB} = 1,05 \quad (P_{AB}) = AB^{-1}$$

$$P_{AC} = 2,26 \quad (P_{AC}) = AC^{-1}$$

De aquí para el precio del azúcar en pan:

$$P_{BC} = \frac{P_{AB}}{P_{AC}} = \frac{1,05}{2,26} \therefore \left(\frac{P_{AB}}{P_{AC}} \right) = \left(\frac{P_{AB}}{P_{AC}} \right) = \frac{AB^{-1}}{AC^{-1}} = CB^{-1} = (P_{CB})$$

También, para el precio del pan en azúcar

$$P_{CB} = \frac{P_{AC}}{P_{AB}} = \frac{2,26}{1,05} \therefore \left(\frac{P_{AC}}{P_{AB}} \right) = \left(\frac{P_{AC}}{P_{AB}} \right) = \frac{AC^{-1}}{AB^{-1}} = BC^{-1} = (P_{BC})$$

Ejemplos: considerando los precios monetarios del kilo de pan y del kilo de azúcar durante tres años

PRECIOS MONETARIOS: EN PESOS M/N.

	pesos m/n	pesos m/n	pan	azúcar
	pan	azúcar	azúcar	pan
	P _{AB}	P _{AC}	P _{AC}	P _{CB}
1952	1,05	2,37	.444	2.260
1953	1,58	2,90	.545	1.835
1954	1,56	2,99	.522	1.915

1.8 Cuando el cociente tiene lugar entre precios monetarios de un mismo bien, pero correspondientes a épocas diferentes, distinguiendo con un ápice los precios de una y otra época, se tiene

$$\left[\frac{P'_{AB}}{P_{AB}} \right] \cdot \frac{P_{AB}}{P_{AB}} \cdot \frac{AB'}{AB} \cdot A \cdot B' = 1$$

que el número resultante carece de dimensión: es un número abstracto. Evidentemente, lo mismo ocurre, si los precios en vez de ser monetarios están expresados en unidades de otro bien. Lo esencial es que los precios relacionados tengan la misma dimensión.

Ese número abstracto cociente o razón entre dos precios de un mismo bien expresados en un tanto por uno, por ciento, ó por mil, es decir multiplicado por uno, por cien o por mil se denomina precio relativo (en inglés: price relative) de ese bien de una época particular respecto de otra.

Ejemplos, con las cifras correspondientes a los precios del pan y azúcar del párrafo precedente (expresados en un tanto por uno).

	<u>PRECIOS RELATIVOS</u>	
	pan	azúcar
<u>precios de 1953</u>		
	1.505	1.225
<u>precios de 1952</u>		
<u>precio de 1954</u>		
	1.486	1.263
<u>precio de 1952</u>		

Un Número Índice de precios de un cierto conjunto de bienes es, precisamente, un promedio de los respectivos precios relativos, pero esta definición que hemos concretado para los precios, vale también para otras observaciones como salario, monto de la producción, importaciones, etc. y en general para cualquier observación de tipo estadístico. Asimismo puede aplicarse el concepto de Número Índice para comparar ci

fras pertenecientes a distintos lugares pero la aplicación más general se refiere al movimiento de los precios en el tiempo.

1.9 El procedimiento de los N.I. cuando se trata de un rubro particular como la producción anual de trigo, no presenta mayores dificultades. Basta reducir las observaciones numéricas tomando v.g. como unidad la producción del primer año considerado. Ejemplos:

Años	Miles de hs.cultiv.	Miles de hs.cosecha	Miles de ts. prod.	. Números índices		
				cultivado	cosechado	producido
1951/52	4.791	2.740	2.100	100	100	100
1952/53	6.065	5.579	7.634	126,7	203,5	364
1953/54	6.354	4.996	6.200	132,7	182,3	296
1954/55	5.937	5.462	7.690	124,0	199,0	367

Pero no todas las observaciones permiten su traducción fácil en un Índice. El problema se complica si lo que nos interesa, por ejemplo, es reflejar en un solo índice las variaciones de precios, o salarios con el fin de resaltar su evolución o tendencia. En tales casos resulta necesario una elaboración previa de las observaciones ajustada a principios de metodología estadística.

I.t.p. I

PRELIMINARES DE METODOLOGIA ESTADISTICA

2.1.- Las observaciones mas sencillas y a la vez fundamentales de la Estadística consisten en enumerar los individuos o elementos pertenecientes a una cierta población. La palabra individuo designa indistintamente seres vivos, cosas inanimadas ó abstractas, fenomenos, etc.

Respecto de los individuos se distinguen dos formas de clasificación: la clasificación homógrada que tiene lugar cuando los individuos se distribuyen en solamente dos clases excluyentes (Por ejemplo, varón ó mujer; argentino o extranjero; y en general; que poseen ó no poseen el atributo considerado) y la clasificación heterógrada que tiene lugar cuando los individuos se distribuyen en mas de dos clases (por ejemplo: argentino, español, italiano, francés y otra nacionalidad).-

En vez de emplear las denominaciones homógrada y heterógrada - pueden emplearse acaso con mas propiedad, las de clasificación dicotómica (ó clasificación binaria, doble ó alternativa); y de clasificación policotómica (ó clasificación múltiple). Así mismo podrían considerarse separadamente las clasificaciones: tricotómica o triple; tetracotómica ó cuádruple, etc. (según se prefiera utilizar palabras - con raíces griegas ó latinas).

Los atributos observados pueden ser cualitativos como el sexo, la nacionalidad, el color del cabello ó de los ojos, que no se expresan numéricamente; y cuantitativos, si se expresan numericamente, como ocurre con la talla, el peso, el salario, el precio, etc.

Las dos formas de clasificación pueden aplicarse a unos y otros atributos y así se hace particularmente en el estudio de la independencia ó grado de asociación entre atributos diferentes; pero cuando se trata de atributos cuantitativos pueden emplearse otros métodos y determinar constante o coeficientes estadísticos que dan una representación mas clara y amplia del conjunto de las observaciones.

En los atributos cuantitativos se distinguen dos tipos de variable, que también recibe el nombre de argumento. La variable es discreta ó discontinua cuando el atributo es expresable solamente mediante - números aislados; como el número de hijos por familia; el número de departamentos por edificio; el número de pétalos en ciertas flores, etc. La variable es continua cuando puede tomar (al menos teóricamente) todos los valores comprendidos entre ciertos límites, como la talla, el peso; la edad, etc.-

2.2. Simbolicemos con la letra mayúscula X, a la variable ó argumento. Si la variable X es discreta es decir, que toma unicamente valores aislados se hace necesario enumerarlos todos. Ejemplo:

Distribución de familias francesas censadas según el número de hijos vivos:

hijos vivos: X	familias en 1911. %	familias en 1926: %
0	15.6	16.1
1	27.9	31.4
2	23.7	24.0
3	14.1	13.0
4	8.2	7.0
5	4.7	3.8
6	2.7	2.2
7	1.6	1.2
8 +	1.5	1.3
	100.	100.

2.3. Pero si se considera excesivo el número de valores que - puede tomar la variable discreta X, puede acortarse el cuadro de clasificación y hacerlo mas sugestivo formando clases que comprendan los valores de X que caigan dentro de cierto intervalo que recibe el nombre de clase-intervalo ó simplemente clase. Ejemplos:

CUADRO N° 2

Ventas de inmuebles en propiedad horizontal en la Capital Federal en 1954, según el número de departamentos de cada edificio.

(clase) número de de- partamen- tos	(frecuencias de clase)			(frecuencias de clase %)		
	número de edificios nuevos	número de edificios existentes	número total de edifi- cios.	nuevos	existentes	total
1 á 5	73	362	435	42.7	35.6	36.6
6 á 10	43	270	313	25.2	26.5	26.4
11 á 15	19	169	188	11.1	16.6	15.8
16 á 20	6	54	60	3.5	5.3	5.0
21 á 25	14	71	85	8.2	7.0	7.1
26 á 30	4	27	31	2.3	2.6	2.6
31 y mas	12	65	77	7.0	6.4	6.5
	171	1018	1189	100.	100.	100.

Respecto de las clases extremas es oportuno señalar que, en - tanto sea posible deben evitarse intervalos infinitos como ocurre en el cuadro N° 1, al decir 8 - y en el cuadro N° 2, al decir 31 y mas, pues impide la determinación de promedios.

Conviene también, siempre que se pueda, dar a todos los intervalos de clase la misma amplitud subdividiendo al efecto la diferencia entre el mayor y el menor valor del atributo en 15 ó 20 intervalos.

Por otra parte debe tenerse en cuenta que cuanto mas amplio el intervalo de clase, mas simples y reducidos parecen los cuadros numéricos de las distribuciones pero en cambio menos uniforme será la distribución de las frecuencias dentro de cada intervalo, factor que contribuirá a acentuar el error derivado del agrupamiento de las observaciones. I.t.p. II.

ciones, en el cálculo de valores medios; y si el intervalo se elige de demasiado pequeño se tiende a poner de relieve irregularidades en la distribución de las frecuencias de clase.

2.4. Ejemplos de distribución de frecuencias de atributos cuantitativos de variable continua:

Cuadro Nº 3

Distribución de 272 personas
según su peso en kilos

Clase (peso en k)	frecuencias	
	absolutas	%
49.5 - 54.5	2	7
54.5 -	12	4.4
59.5 -	20	7.4
64.5 -	43	15.8
69.5 -	54	19.8
74.5 -	51	18.8
79.5 -	39	14.3
84.5 -	26	9.6
89.5 -	16	5.9
94.5 -	6	2.2
99.5 -	3	1.1
	<u>272</u>	<u>100.</u>

Cuadro Nº 4

Distribución de 210 obreros
según su salario en \$

Clase salarios	frecuencias	
	absolutas	%
22-24	8	3.8
24-	48	22.9
26-	96	45.7
28-	47	22.4
30-	10	4.7
32-	1	5
	<u>210</u>	<u>100</u>

Como en la elaboración estadística está siempre implícita la comparabilidad de las observaciones, ésta se ve facilitada si las frecuencias de clase se expresan en un tanto por ciento, un tanto por mil o tanto por uno, del total. Cuando se expresan en un tanto por uno del total reciben el nombre de frecuencias relativas de clase en contraposición de las otras las directamente observadas llamadas frecuencias absolutas.

Los cuadros numéricos presentados como ejemplo se denominan distribuciones de frecuencia y desempeñan un importante papel en estadística por que resume los datos en forma compacta y adecuada para nuevas elaboraciones.-

I.t.p. II.

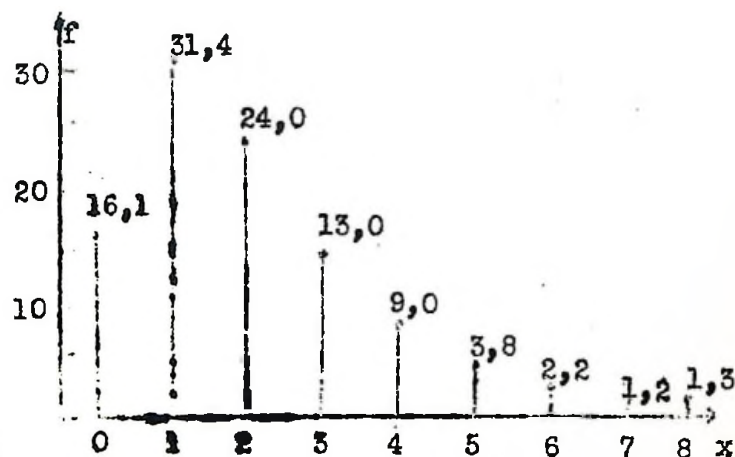
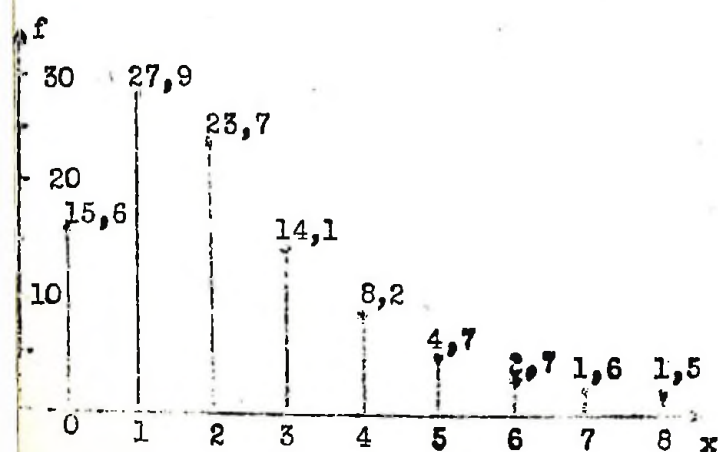
REPRESENTACIONES GRAFICAS.

3.1. Además de presentar las observaciones resumidas en cuadros numéricos, es conveniente representarlás graficamente. Hay dos tipos principales; la representación por ordenadas (segmentos), y por áreas rectangulares.

La representación por ordenadas consiste en marcar sobre un eje horizontal, que designamos con letra X, distancias proporcionales a la variable atributo y a partir de los extremos de esas distancias, y sobre las perpendiculares en ellos levantadas, marcar segmentos proporcionales a las respectivas frecuencias. Ejemplos: con las cifras del cuadro Nº 1.

Gráfico 1

Gráfico 2.



X : número de hijos vivos

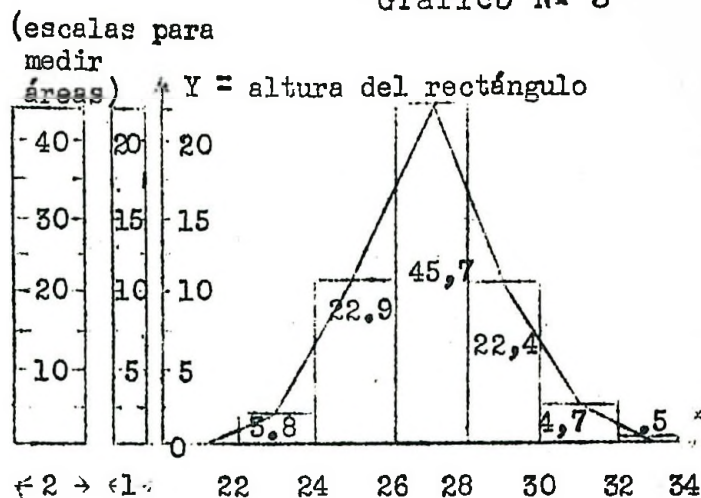
Y_x : número (frecuencia) de familia con X hijos vivos en 1911

Y_x : número de familias con X hijos vivos en 1926.

3.2. La representación por áreas rectangulares consiste en marcar sobre un eje horizontal a partir de un cierto origen de medida, los valores del atributo y tomando como base la amplitud de la clase se construye un rectángulo de área tal que sea numericamente igual al número de individuos comprendidos en esa clase o en otras palabras que el área del rectángulo sea igual a la frecuencia de la clase. La figura resultante se denomina Histograma. Ejemplo; con las cifras del cuadro Nº 4.

Gráfico Nº 3

Sala- rios Clase	Frecuen- cia. % (área del rectán- gulo)	Ampli- tud de clase (base)	(Altu- ra del rectán- gulo)
22-24	3.8	2	1.9
24-26	22.9	2	11.45
26-28	45.7	2	22.85
28-30	22.4	2	11.2
30-32	4.7	2	2.35
32-34	.5	2	.2
	100		



x = salarios en \$

3.3 La representación por ordenadas es naturalmente indicada cuando la variable atributo es discreta; en tanto que la representación por áreas lo es cuando la variable es continua. No obstante, también suele utilizarse el histograma aún cuando se trate de variables discretas (particularmente si el número de valores posibles del atributo es grande) formando para ello clases amplias.

Ejemplo con las cifras del cuadro Nº 2

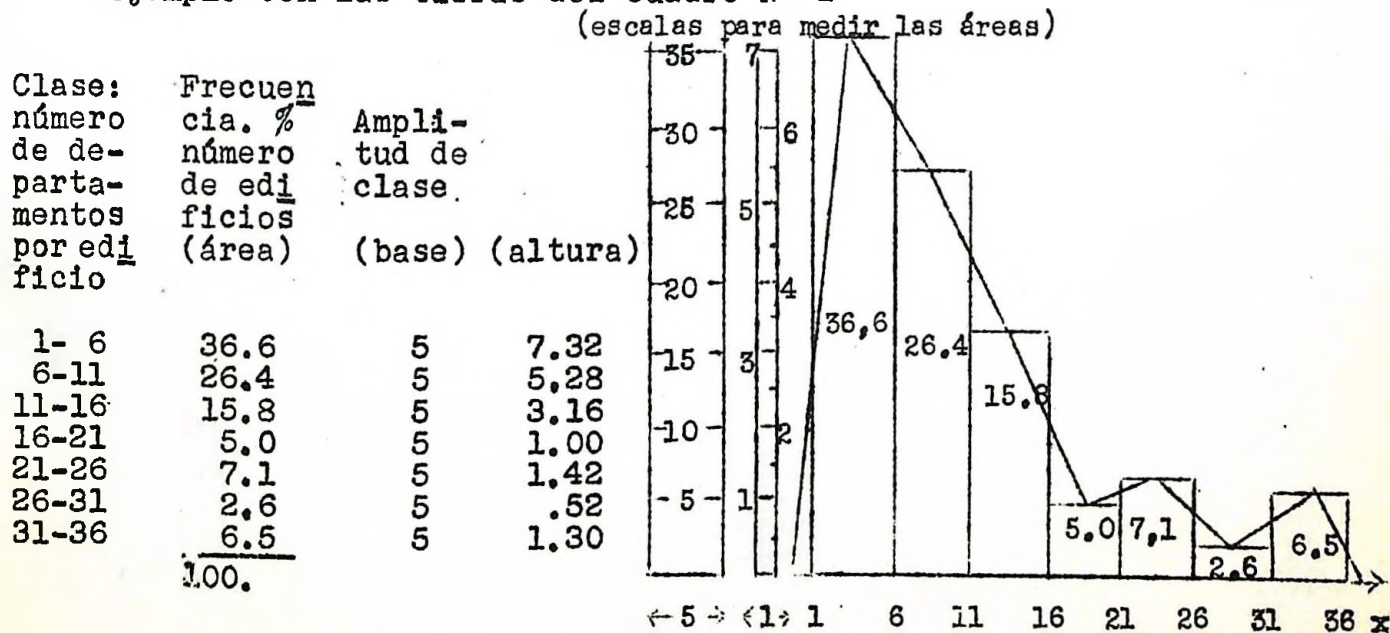


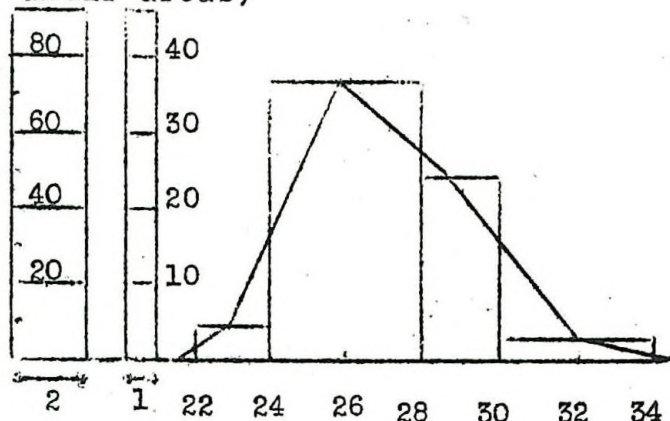
Gráfico Nº 4

Las clases debieron considerarse contiguas, de modo que la clase 1.6 representa en realidad desde 1 departamento a menos de 6, y analogamente respecto de las demás clases; se considera incluido el límite inferior de la clase, y excluido el límite superior.

3.4. Facilmente se comprende que si las amplitudes de clase difieren las bases de los rectángulos también serán diferentes. Como ejemplo tomemos el siguiente:

clase	frecuencia	amplitud de clase	(área)	(base)	(altura)
22-24	8	2	4		
24-28	144	4	36		
28-30	47	2	23,5		
30-34	11	4	2,75		
	210				

(escala para medir áreas)



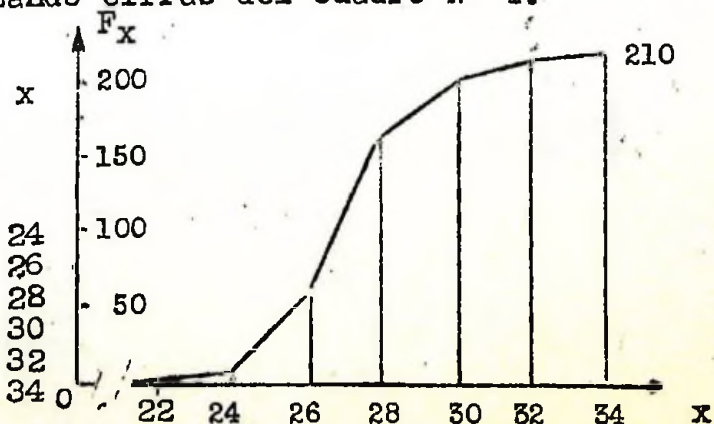
3.5. La representación en forma de histograma es siempre más conveniente en Estadística, pero si en vez del área del rectángulo se considera su altura en un punto medio ó central de la clase, se obtiene un diagrama similar al del gráfico 1 ó 2.

De manera pues que ambos métodos, por áreas ó ordenadas son prácticamente equivalentes, particularmente si los intervalos de clase son iguales, pero a fin de evitar inconvenientes de orden matemático prefiere utilizarse el histograma.

En el histograma suelen unirse mediante trazos rectos los extremos de las alturas medias de los rectángulos, para formar lo que se conoce como polígono de frecuencia.

3.6. Otro método de representación es el que se hace con las llamadas frecuencias acumuladas ó totales. Sobre el eje x se mide el atributo y sobre el eje de las ordenadas se mide la frecuencia F_x de las observaciones que superan (ó no superan) el correspondiente valor x del atributo. Ejemplo, utilizando cifras del cuadro Nº 4.

clase (salarios)	frecuencias simples	F_x frecuencias acumuladas
22-24	8	8
24-26	48	56
26-28	96	152
28-30	47	199
30-32	10	209
32-34	1	210
	210	



x. = salarios
 F_x = frecuencia de los salarios inferiores a x

El polígono resultante de unir los extremos de las ordenadas recibe el nombre de ojiva.

Tanto las tablas ó distribuciones de frecuencia, como los diagramas ó gráficos pertinentes son formas sintéticas para representar los datos observados y es conveniente construirlas en todos los casos, sean cuales fueren las constantes deducidas de las distribuciones pues dan practicamente toda la información contenida en las observaciones originales.

Para efectuar comparaciones debe trabajarse con frecuencias de clases expresadas en porcentajes de la suma total de frecuencias.

I.t.p. III

Promedios

4.1. Entre las constantes que sirven para caracterizar las observaciones numéricas, la más común y útil es el promedio aritmético o media aritmética. Se calcula fácilmente sumando todas las observaciones y dividiendo dicha suma por el número total de observaciones.

Por ejemplo, si las observaciones son los números: 1,5; 1,7; 1,9; 1,3 se tiene

$$1,5 + 1,7 + 1,9 + 1,3 = 6,4 = \text{suma de las observaciones}$$

y siendo 4 el número de observaciones es:

$$\text{media aritmética} = \frac{\text{suma de las observaciones}}{\text{número de observaciones}} = \frac{6,4}{4} = 1,6$$

Este procedimiento se indica genéricamente así: Si X es la variable que toma los valores $X_1, X_2, \dots, X_n$ (pudiendo repetirse los valores); entonces la media aritmética de esos N valores es la suma de los varios valores de X , que se simboliza con $\sum X$, dividido por N . La fórmula se escribe entonces

$$M(X) = \bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

donde $M(X)$ y $\bar{X}$ (llamada X barra) son diferentes modos de simbolizar la media de X .

4.2. Puede ocurrir que haya muchos valores X repetidos y en ese caso, sobre todo si N es algo grande es preferible construir el cuadro o tabla de distribución de frecuencias, para calcular el promedio X . Ejemplo:

Valores de Frecuencias

X	f	Xf
0	15	0
1	28	28
2	24	48
3	14	42
4	8	32
5	5	25
6	3	18
7	2	14
8	1	8
	100	216

$$\therefore \sum Xf = 216$$

$$N = \sum f = 100$$

$$\bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f} = \frac{216}{100} = 2.16$$

En efecto si aplicamos el concepto de media dado en (4,1) debié

ramos para tener la suma de las observaciones, sumar 15 veces el 0, más 28 veces el 1, más 24 veces el 2, más 14 veces el 3, etc., resultados parcialmente registrados en la columna que se encabeza con Xf ; y por lo tanto la fórmula general para calcular la media es

$$M(X) = \bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f}$$

Es evidente, por otra parte, que si cada valor de X estuviera presente una sola vez, el valor de la frecuencia, f , es 1, y la fórmula general tomaría la forma mencionada en (4.1).

4.3. El método antedicho se aplica también a las variables continuas suprimiendo la ambigüedad de la amplitud de clase por un valor medio o valor central, de la clase, tal como se indica en el ejemplo siguiente

Intervalo de clase salarios \$	Frecuencias	Clases X	Xf
22-24	38	23	874
24-26	229	25	5.725
26-28	457	27	12.339
28-30	224	29	6.496
30-32	47	31	1.457
32-34	5	33	165
	1.000		27.056

$$\bar{x} = \frac{\sum x f}{\sum f} = \frac{27.056}{1.000} = 27.056$$

Según la columna de frecuencias f , hay 38 salarios que van desde 22 \$ y no llegan a 24 \$; 229 salarios que no bajan de 24 \$ y no llegan a 26 \$, etc. Como para calcular la media aritmética de los salarios es necesario asignarles un valor concreto, se resuelve la indeterminación adoptando como salario representativo de cada intervalo de clase (o clase-intervalo) al promedio simple de los dos límites de clase p.e. $\frac{1}{2}(22+24) = 23$; $\frac{1}{2}(24+26) = 25$, etc.; o si se quiere, el salario central del intervalo de clase.

El problema de calcular la media aritmética $\bar{X}$ se reduce así, al caso del párrafo precedente.

4.4. El mismo procedimiento puede seguirse cuando se trate de variables discretas si se presentan de manera semejante a las distribuciones de frecuencia de variable continua, es decir, formando clases amplias que comprenden a varios de los posibles valores del atributo.

Tomando como ejemplo las cifras utilizadas para la construcción de gráficos 4. en el § (3.3), tendremos

(clase-intervalo) de departamentos por edificio
(frecuencia) número de edificios
(clase) central

	f	X	Xf
1-6	36,6	3,5	128,10
6-11	26,4	8,5	224,40
11-16	15,8	13,5	213,30
16-21	5,0	18,5	92,50
21-26	7,1	23,5	166,85
26-31	2,6	28,5	74,10
31-36	6,5	33,5	217,75
	100		1.117,00

$$\bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f} = \frac{1117.0}{100} = 11,17$$

De acuerdo a la convención establecida para los intervalos de clase (o clase-intervalo) el valor de $X = 3,5$ representa los valores del atributo que pertenecen al intervalo, 1-6, desde 1 a menos de 6 (o sea 1; 2; 3; 4; 5); y ese valor de X se obtiene como simple promedio de los límites de intervalo: $3,5 = \frac{1}{2} (1+6)$. Análogamente se determinan los demás valores de X : $8,5 = \frac{1}{2} (6+11)$; $13,5 = \frac{1}{2} (11+16)$; etc.

4.5. En cuanto a la dimensión del número que se obtiene como valor medio $\bar{X}$ se desprende fácilmente de la aplicación de las propiedades que hemos señalado en el párrafo (1.6) respecto de la dimensión del producto, cociente, suma o resta de dos magnitudes.

En efecto para la dimensión de $\bar{X}$, se tiene

$$[\bar{X}] = \frac{[\sum Xf]}{[\sum f]} = \frac{[\sum Xf]}{[\sum f]}$$

y como cada término Xf tiene la misma dimensión $[Xf]$; y lo mismo ocurre con los términos del denominador, cada número f tiene como dimensión $[f]$; resulta

$$[\sum Xf] = [Xf] = [X] [f]$$

$$[\sum f] = [f] = [f]$$

Por lo tanto, la dimensión de la medida $\bar{X}$ resulta ser la misma que la de los valores X promediados pues:

$$[\bar{X}] = \frac{[X] [f]}{[f]} = [X]$$

Método abreviado para el cálculo de la Media aritmética

5.1 El cálculo de la media aritmética puede simplificarse notablemente en la tabla de distribución de frecuencias recurriendo al artificio de transformar la variable X , restándole un número a , convenientemente elegido, que lleve los nombres de media auxiliar o media provisoria; y dividiendo esas diferencias $X-a$, por otro número h , también convenientemente elegido. Ambos números: el a , y el h , pueden ser arbitrariamente elegidos pero para que la transformación de la variable permita simplificar los cálculos tendrán que ser convenientemente elegidos.

Generalmente conviene elegir como número a (como media provisoria) al valor de X correspondiente a la clase más frecuente o un número próximo a la clase central de toda la distribución; y como valor de h , conviene elegir a la amplitud de clase. Esta transformación de la variable tiene la virtud de substituir los números X por otros más pequeños, y por lo tanto también resultan más pequeños los números resultantes de los productos $x.f$.

Procediendo así, y llamando x (minúscula) a los nuevos números que representen la variable, será:

$$x = \frac{X-a}{h}$$

y por tanto

$$X = a + h x$$

$$\therefore Xf = af + hxf$$

Se deduce de aquí al extender la suma a todos los productos xf

$$\sum Xf = a \sum f + h \sum xf;$$

y dividiendo ambos miembros por la suma de frecuencias, $\sum f$

$$\frac{\sum Xf}{\sum f} = a + h \frac{\sum xf}{\sum f},$$

es decir, con la notación $\bar{X}$ y $\bar{x}$, adoptada para representar las medias aritméticas

$$\bar{X} = a + h \bar{x}.$$

Basta pues para obtener la verdadera media $\bar{X}$, calcular la media, $\bar{x}$, multiplicarla por, h , y agregar a ese resultado la media provisoria, a .

Es importante resaltar que la resta del número, a , equivale a una traslación del origen de medida de las X , de aquí que también se le da nombre a ese número a , como origen auxiliar o provisorio; y que la división por h , equivale a un cambio de la escala de medida de las X , por lo que puede denominarse, escala auxiliar o provisorio.

5.2 Para que se aprecie la diferencia entre el procedimiento directo y el indirecto o abreviado consideramos las mismas cifras utilizadas para el cálculo directo de la media aritmética del párrafo (4.3).

intervalo de clase Salarios	clase . x	frecuencia f	x	xf
22 - 24	23	38	-2	-76
24 - 26	25	229	-1	-229
26 - 28	27	457	0	0
28 - 30	29	224	1	224
30 - 32	31	47	2	94
32 - 34	33	5	3	15
		1000		-305 +333 + 28

$$x = \frac{X-27}{2} \quad \therefore X = 27 + 2x$$

$$\therefore \bar{X} = 27 + 2\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{28}{1000} = 0,028$$

$$\therefore \bar{X} = 27 + 2 \cdot (0,028) = 27 + 0,056 = 27,056$$

Se ha elegido como media auxiliar $a = 27$, lo cual equivale a tomar ese valor de X como origen; y como escala auxiliar, la amplitud de intervalo: $h = 2$

I.t.p.v

5.3 El Modo (la Moda o Valor modal) es otro valor medio del atributo interesante.

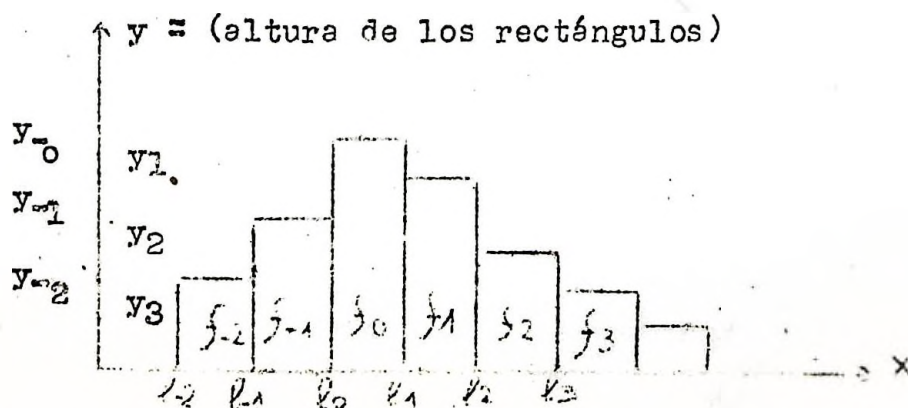
Se define como valor modal al valor del atributo más frecuente; coincide en ese sentido con la acepción usual del término "moda", lo que más se lleve o usa. Algunos lo denominan también, valor dominante.

Para determinarlo es casi indispensable construir la tabla de frecuencias y aún así solamente un artificio matemático puede darnos un valor más objetivo.

En el caso de la tabla de frecuencias de salarios del párrafo precedente, el valor modal parece estar ubicado en el intervalo de clase 26 - 28, pues le corresponde la máxima frecuencia 457. Para evitar la imprecisión en casos como este en que la variable atributo es, es continua debe recurrirse a una interpolación.

5.4 Para ello conviene considerar el gráfico en forma de histograma, correspondiente a la distribución de frecuencias en el entorno del intervalo de clase, $l_0 - l_1$, que tiene asignada la mayor frecuencia, f_0 .

clase-intervalo	frecuencia (área)	(altura)	(aumento de altura)
$l_{-2} - l_{-1}$	f_{-2}	y_{-2}	
$l_{-1} - l_0$	f_{-1}	y_{-1}	$y_{-1} - y_{-2} = \Delta y_{-2}$
$l_0 - l_1$	f_0	y_0	$y_0 - y_{-1} = \Delta y_{-1}$
$l_1 - l_2$	f_1	y_1	$y_1 - y_0 = \Delta y_0$
$l_2 - l_3$	f_2	y_2	$y_2 - y_1 = \Delta y_1$

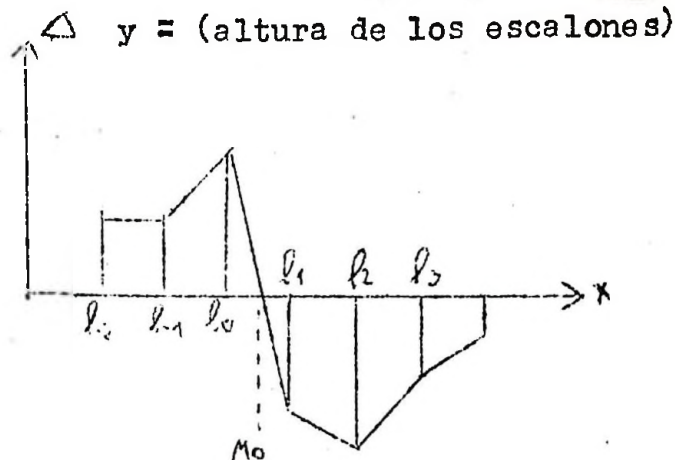


Considerando las gradas del polígono escalonado que bordea el histograma, podemos trasladar a otro gráfico, para los mismos valores de X , la diferencia de altura y el signo de esa diferencia.

I.t.p. v

El Modo, M_0 , correspondería teóricamente al valor de X en que el progreso de altura de las gradas fuera nulo o de otra manera: donde la altura de los escalones tuviera el valor cero.

Uniendo los extremos de las alturas y_0 y y_1 por trazos rectos se obtiene una poligonal que viene a representar el progreso continuo de altura para cada valor de X . Esa poligonal cruza el eje X en un cierto punto entre l_0 y l_1 que puede tomarse como valor aproximado o una estimación del modo, M_0 .

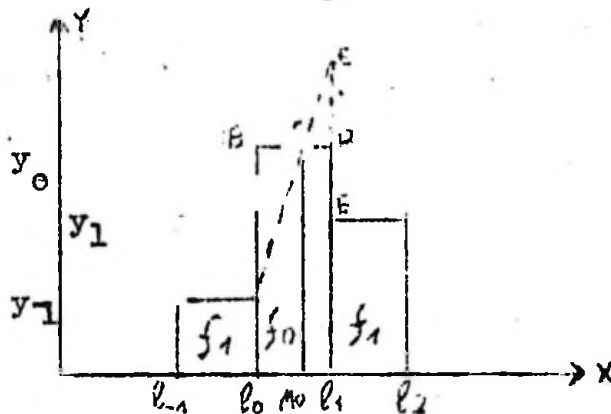


5.5 En lugar de considerar simplemente el trazo recto puede, como es natural, considerarse una curva continua que interpole varios de los valores entorno al modo. Pero si nos limitamos a la interpolación lineal entre l_0 y l_1 , como se señala en la figura, la determinación del modo puede hacerse directamente en el histograma. En efecto considerando únicamente los rectángulos que corresponden a frecuencia modal f_0 , a la anterior f_1 y a la posterior f_1 se procede así:

1º Se traza el segmento DE' , igual a DE prolongando la ordenada correspondiente a y_1 .

2º Se traza el segmento de recta AE' que corta a BD en C .

3º Se baja desde C , la perpendicular al eje X , que lo corta en el punto $x = M_0$, valor del modo buscado.



5.6 Puede traducirse analíticamente la construcción gráfica que antecede considerando los triángulos rectángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle CDE'$ que permiten plantear las proporciones siguientes:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{DE'} = \frac{CD}{DE}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BC + CD}{AB + DE}$$

expresando los diferentes segmentos en función de las coordenadas X e y , se tiene:

$$\overline{BC} = M_0 - l_0$$

$$\overline{CD} = l_1 - M_0 \quad \therefore \overline{BC} + \overline{CD} = l_1 - l_0 = \Delta l_0$$

$$\overline{AB} = Y_0 - Y_{-1} = \Delta Y_{-1}$$

$$\overline{DE} = Y_0 - Y_1 = -\Delta Y_0 \quad \therefore \overline{AB} + \overline{DE} = \Delta Y_{-1} - \Delta Y_0 = -\Delta^2 Y_{-1}$$

la última de las proporciones se escribe

$$\frac{M_0 - l_0}{\Delta Y_{-1}} = \frac{\Delta l_0}{-\Delta Y_{-1}}$$

$$\therefore M_0 = l_0 - \Delta l_0 \frac{\Delta Y_{-1}}{\Delta^2 Y_{-1}}$$

5.7 Como ejemplo utilizaremos la parte pertinente de la distribución de frecuencias siguiente:

clase	f	Δl	$v = f/\Delta l$	Δv	$\Delta^2 v$
24-26	229	2	114.5	114.0	
26-28	457	2	228.5	-116.5	-230.5
28-30	224	2	112.0		

Identificamos los elementos que intervienen en la fórmula del modo, M_0 :

$$l_0 = 26 \quad ; \quad \Delta l_0 = l_1 - l_0 = 2 \quad ; \quad \Delta Y_{-1} = 114.0 \quad ; \quad \Delta^2 Y_{-1} = -230.5$$

Luego:

$$Mo = 26 - 2 \frac{114,0}{-230,5} = 26 + \frac{228,0}{230,5} = 26 + 0,989 = 26,989$$

5.8 La fórmula del modo que hemos dado se aplica aun cuando los intervalos de clase sean diferentes. Así, considerando la distribución de frecuencias siguiente, se tiene:

	f	Δl	$y = f/\Delta l$	Δy	$\Delta^2 y$
22 - 26	267	4	66,75	161,75	-344,25
26 - 28	457	2	228,50	-182,50	
28 - 34	276	6	46,00		

Luego:

$$l_0 = 26 ; \Delta l_0 = 2 ; \Delta Y_{-1} = 161,75 ; \Delta^2 Y_{-1} = -344,25$$

$$\therefore Mo = 26 - 2 \frac{161,75}{-344,25} = 26 + \frac{323,5}{344,25} = 26 + 0,938 = 26,938$$

En general conviene realizar el agrupamiento de la distribución de frecuencia de manera que resalte la frecuencia modal y con iguales intervalos de clase, sea ampliéndolos o reduciéndolos.

5.9 Una regla empírica para la determinación del modo, cuando se trata de distribuciones de frecuencia moderadamente asimétricas la establece la relación siguiente

$$\text{Modo} = \text{Media} - 3 (\text{Media} - \text{Mediana})$$

o con los símbolos adoptados para los valores medios

$$Mo = \bar{X} - 3 (\bar{X} - Me) = 3 Me - 2 \bar{X}$$

En el ejemplo anteriormente tratado se tiene según ya vimos en párrafos precedentes:

$$\bar{X} = 27,056$$

$$m_2 = 27,020 \quad \therefore \bar{X} - m_e = 0,036 \quad \therefore 3(\bar{X} - m_e) = 0,108$$

Luego:

$$M_0 = 27,056 - 0,108 = 26,948$$

Como puede observarse este resultado no difiere prácticamente de los obtenidos con el procedimiento de interpolación en (5,8) y (5,9)

I.t.p, V

MEDIDAS DE VARIABILIDAD O DISPERSION

6.1.- Después de calcular la media de un conjunto de observaciones es importante determinar en cuanto se apartan esas observaciones de ese promedio. Si se miden esos apartamientos y quiere sintetizarse su magnitud por medio de un solo valor numérico que caracterice la dispersión o diseminación de las observaciones parece natural calcular un promedio de las diferencias ó desvíos entre cada observación y la media de todas ellas.-

La medida mas simple de la dispersión de las observaciones lo constituye la máxima amplitud del atributo medido esto es, la diferencia entre el menor valor y el mayor valor de las observaciones. A esa medida la denominan los ingleses "range", palabra que podríamos traducir por "campo" (de variabilidad) de las observaciones.

En el ejemplo de los salarios el campo de los salarios observados es: $34 - 22 = 12$.-

El campo, como medida de variabilidad es fácil de calcular pero depende unicamente de los valores extremos, de ahí que su uso esté limitado a casos muy particulares, como las observaciones de temperatura, presión barométrica, cotizaciones de bolsa etc.-

El desvío medio, D.M. requiere mas elaboración, es el promedio aritmético de las diferencias numéricas (sin tener en cuenta el signo otomándolas con signo positivo) entre las observaciones y su valor central (en general la media $\bar{X}$, mediana Me o modo Mo).-

Ejemplo: con las cifras de la distribución de salarios ya uti-

lizada para el cálculo de la mediana, $Me = 27.020$ y la media $\bar{X} = 27.056$

X	f	Xf	$ X - \bar{X} $	$ X - \bar{X} f$	$ X - Me $	$ X - Me f$
23	38	0874	4.056	154.128	4.020	152.760
25	229	5725	2.056	470.824	2.020	462.580
27	457	12339	1.056	25.592	.020	9.140
29	224	6496	1.944	435.456	1.980	443.520
31	47	1457	3.944	185.368	3.980	187.060
33	5	165	5.944	29.720	5.980	29.900
	1000	27056		1301.088		1284.960

$$\bar{X} = \frac{27056}{1000} = 27,056$$

$$\text{Desvío Medio de la media aritmética } \bar{X} = DM_{\bar{X}} = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} = \frac{1301,088}{1000} = 1,301$$

$$\text{Desvío Mediano } = DM_{Me} = \frac{\sum |x - Me| f}{\sum f} = \frac{1294,960}{1000} = 1,285$$

Es interesante destacar que el desvío medio es mínimo cuando se mide respecto a la mediana: Me .

6.2.- El desvío medio cuadrático (desvío tipo o desvío standard) es la más útil en general de las medidas de dispersión. Es igual a la raíz cuadrada positiva, del valor medio del cuadrado de los desvíos de las observaciones medidos respecto de la media aritmética.-

Simbólicamente, llamando σ (sigma) al desvío medio cuadrático

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}}$$

Al cuadrado del desvío tipo se lo denomina varianza (palabra del

idioma castellano antiguo, utilizado como correspondiente del neologismo inglés: variance) o momento segundo (de los desvíos) μ_2

$$\mu_2 = \sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}$$

Los cálculos para obtener la media $\bar{X}$ y la varianza, σ^2 , aplicando directamente las fórmulas que definen esos valores medios se disponen ampliando el número de columnas, requerido para la media $\bar{X}$, que volvemos a reproducir aquí para mayor claridad, en la forma que se indica en el ejemplo siguiente:

Clases	f	X	Xf	X- $\bar{X}$	(X- $\bar{X}$) ²	(X- $\bar{X}$) ² f
22-24	38	23	874	4.056	16,451136	625,143168
24-26	229	25	5725	2.056	4,227136	968,014144
26-28	457	27	12339	0.056	0,003136	1,433152
28-30	224	29	6496	1.944	3,779136	846,526464
30-32	47	31	1457	3.944	15,555136	731,091392
32-34	5	33	165	5.944	35,331136	176,655680
	<u>1000</u>		<u>27056</u>			<u>3348,864000</u>

$$\bar{X} = \frac{27056}{1000} = 27,056 \quad \mu_2 = \sigma^2 = \frac{3348,864}{1000} = 3,348864$$

$$\sigma = 1,829990$$

6.3. Para obtener una constante que pueda servir para comparación de la dispersion de diferentes atributos cuantitativos, conviene expresarla de modo que no depende de la magnitud de las variables. Karl Pearson sugirió para ello, dividir el desvío tipo, σ , por media aritmética $\bar{X}$ y denominar a ese cociente $v = \sigma/\bar{X}$ coeficiente de variabilidad o de variación.

$$v = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{1,82999}{27,056} = 0,0676$$

o bien en %
$$V = 100 \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100 = 6,76 \%$$

Para las distribuciones de frecuencia que se conforman a la distribución teórica de los errores accidentales se prevé que un 99,9% de las observaciones difieren numéricamente de su valor medio $\bar{X}$ en menos de 3 veces el desvío medio cuadrático, σ , un 97,7%, en menos de 2 veces σ y un 24,2% en menos de 1 vez σ .-

Pero aún no conformándose a esa distribución teórica, cualquiera sea la distribución de frecuencia observada la proporción de las observaciones que difieren de su promedio $\bar{X}$ en menos de 2σ , es necesariamente superior al 75 % la proporción de los que difieren en menos de 3σ , superior al 88,9% a 4σ superior al 93,7% y en general superior a, $1 - \lambda^{-2}$ (teorema de Techebycheff).-

En consecuencia al tomar como unidad para expresar el desvío tipo σ , a la media aritmética se independiza en cierto modo la medida de dispersión de las observaciones de su orden de magnitud haciendo comparables los coeficientes de variación de una distribución dada con el de otra.-

El ejemplo considerado nos dice que su coeficiente de variación $V = 100\sigma/\bar{X}$ es del 6.76%. Este índice numérico viene a ilustrarnos sobre la distribución de las observaciones en torno al valor medio $\bar{X} = 27.056$ diciéndonos p.e. que más del 75% difieren de $\bar{X}$ en menos de 13.52 % de $\bar{X}$.-

En general son raras las distribuciones que arrojan un coeficiente de variación V superior al 30%.-

6.4.- Suele asimismo utilizarse como medida de dispersión de las observaciones, al cociente del llamado distancia intercuartil, $Q_3 - Q_1$, a la mediana Me denominándolo desvío cuartílico reducido D.Q.

$$D.Q. = \frac{Q_3 - Q_1}{Me}$$

Utilizando los resultados obtenidos para la distribución del ejemplo considerado en los párrafos precedentes se tiene :

$$Q_1 = 25,9 \quad ; \quad Q_3 = 28,2 \quad ; \quad Me = 27,02$$

lo que da

$$D.Q. = \frac{28,2 - 25,9}{27,02} = \frac{2,3}{27,02} = 0,085$$

Este resultado, puesto que el número de observaciones comprendidas entre el 1er cuartil Q_1 , y el 3er cuartil Q_3 es del 50% del total vendría a decirnos que la mitad de las observaciones está comprendida en un intervalo cuya magnitud es del 8,5% del valor de la mediana $Me = 27,02$ (aproximadamente un 4,25% a cada lado, de Me).-

METODO ABREVIADO PARA EL CALCULO DEL DESVIO MEDIO CUADRATICO Y EL DESVIO MEDIO

7.1.- El cálculo directo del desvío medio cuadrático resulta penoso al tener que realizar productos con números de muchas cifras. Se evita ese trabajo si, como en el caso de la media aritmética, se recurre a una variable auxiliar X , obtenida al restarle a la variable X un número conveniente a , (media ú origen auxiliar); y dividiendo esa diferencia por otro número conveniente h , (escala auxiliar).

Es decir

$$X = \frac{X - a}{h} \quad X = a + h X$$

Recordando que para la media $\bar{X}$, según obtuvimos en (5.1), vale la relación:

$$\bar{X} = a + h \bar{X} ;$$

puede escribirse para los desvíos, evidentemente.

$$X - \bar{X} = h (X - \bar{X})$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando el binomio del segundo miembro

$$(X - \bar{X})^2 = h^2 (X - \bar{X})^2 = h^2 (X^2 - 2\bar{X} X + \bar{X}^2)$$

$$\therefore (X - \bar{X})^2 = h^2 X^2 - 2h^2 \bar{X} X + h^2 \bar{X}^2 ;$$

multiplicando ambos miembros por la frecuencia f .

$$(X - \bar{X})^2 f = h^2 X^2 f - 2h^2 \bar{X} xf + h^2 \bar{X}^2 f$$

teniendo presente que tanto h , como la media $\bar{X}$ tienen ya un valor numérico al sumar ambos miembros respecto a la variable X , es decir; al calcular primeramente todas las igualdades que corresponden a los diversos valores de X con los pertinentes de X y f - y sumando luego esas igualdades miembro a cada miembro, se escribe:

$$\sum (x - \bar{x})^2 f = h^2 \sum x^2 f - 2h^2 \bar{x} \sum x f + h^2 \bar{x}^2 \sum f,$$

y dividiendo por $\sum f$

$$\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = h^2 \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - 2h^2 \bar{x} \frac{\sum x f}{\sum f} + h^2 \bar{x}^2$$

Expresando esta igualdad con los símbolos adoptados para representar las medias aritméticas y el primer miembro por σ^2

$$\sigma^2 = h^2 \bar{x}^2 - 2h^2 \bar{x} \bar{x} + h^2 \bar{x}^2 = h^2 \bar{x}^2 - h^2 \bar{x}^2$$

$$\therefore \sigma^2 = h^2 (\bar{x}^2 - \bar{x}^2)$$

El desvío medio cuadrático σ , puede obtenerse fácilmente entonces, mediante esa variable auxiliar X , con un cálculo indistinto de σ^2 que es una simple ampliación de los realizados para obtener la media aritmética.

Ejemplo:

	X	f	X	Xf	X ²	X ² f	
22-24	23	38	-2	-76	4	152	a = 27; h = 2; x = $\frac{X-27}{2}$
24-26	25	229	-1	-229	1	229	$\therefore X = 27 + 2x$
26-28	27	457	0	0	0	0	$\therefore \bar{X} = 27 + 2\bar{x}$
28-30	29	224	1	224	1	224	
30-32	31	47	2	94	4	188	$\sigma^2 = h^2 (\bar{x}^2 - \bar{x}^2);$
32-34	33	5	3	15	9	45	
		1000		-305		838	
				+333			
				28			

$$\bar{x} = \frac{\sum Xf}{\sum f} = \frac{28}{1000} = 0.028 \therefore \bar{x}^2 = \frac{\sum X^2 f}{\sum f} = \frac{838}{1000} = 0.838$$

$$\bar{x}^2 = 0.000784 \therefore \sigma^2 = 2^2 (0.838 - 0.000784) = 4.(837216)$$

$$\therefore \bar{X} = 27 + 2(0.028) \quad \sigma^2 = 3.348864 \therefore \sigma = \sqrt{3.348864}$$

$$\therefore \bar{X} = 27.056 \quad \therefore \sigma = 1.829990$$

$$V = 100 \frac{\sigma}{\bar{X}} = 100 \frac{1.829990}{27.056} = 6.76\%$$

La simplificación en los cálculos es evidente, pues el hecho de que la variable auxiliar X tome únicamente valores enteros que difícil-

mente pasan de 15, permite escribir directamente las cifras de los productos parciales.

7.3.- También puede aprovecharse el procedimiento de la variable auxiliar X_0 para simplificar el cálculo del desvío medio D.M. En efecto, la fórmula

$$D.M. = \frac{\sum |X - \bar{X}| f}{\sum f}$$

contiene en el numerador la suma de los desvíos o diferencias, $X - \bar{X}$, tomadas siempre con signo positivo, multiplicadas por la respectiva frecuencia f .- El cálculo puede hacerse entonces primeramente para los desvíos de signo negativo y luego para los de signo positivo; procediendo a continuación a sumar separadamente los dos grupos de términos, cambiando previamente el signo de los negativos que indicamos así:

$$\sum |X - \bar{X}| f = \sum_{+} (X - \bar{X}) f - \sum_{-} (X - \bar{X}) f$$

es decir, restando los términos negativos de los positivos. Efectuando los paréntesis del segundo miembro podemos escribir también esa relación en la forma:

$$\sum |X - \bar{X}| f = \sum_{+} X f - \sum_{-} X f + \bar{X} (\sum_{-} f - \sum_{+} f)$$

teniendo presente ahora la relación entre la variable X y la variable auxiliar X_0 ,

$$X = a + h X_0 \quad \therefore \quad \bar{X} = a + h \bar{X}_0 \quad \therefore \quad X - \bar{X} = h (X_0 - \bar{X}_0)$$

se tiene evidentemente, también

$$\sum |X - \bar{X}| f = h \sum |X_0 - \bar{X}_0| f = h \left(\sum_{+} (X_0 - \bar{X}_0) f + \sum_{-} (\bar{X}_0 - X_0) f \right)$$

El cálculo del desvío medio, D.M. exige pues así, separar la distribución en dos partes: la de los valores de X que no superan a la media $\bar{X}$ (campo de los desvíos negativos o nulos) y la de los valores que superan a $\bar{X}$ (campo de los desvíos positivos); y luego de obtener las sumas pertinentes de cada campo, operar como lo indica la fórmula precedente:

Ejemplo:

X	f	X	Xf	$\therefore \sum Xf = 333$	$\sum f = 724$	$\bar{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f} = 0.028$
23	38	-2	-76			
25	229	-1	-229			
27	457	0	0	$\sum Xf = -305$	$\sum f = 276$	$h = 2$
29	224	1	224			
31	47	2	94			
33	5	3	15			

1000	-305	$\sum X - \bar{X} f = 2 \{ 333 - (-305) + 0.028 (724 - 276) \} =$
	+ 333	$2 \{ 638 + 0.028 \cdot 448 \} = 2 \{ 638 + 12.544 \} = 2.650.544$
	+ 28	$= 1.301.088$

$$\therefore \text{D.M. } \frac{\sum |X - \bar{X}| f}{\sum f} = \frac{1301.088}{1000} = 1.301.088$$

La media $\bar{X} = 0.028$ separa, imaginándola ubicada en la línea punteada, los valores de X que no superan $\bar{X}$, (que dan desvíos negativos o nulos) de las que superan $\bar{X} = 0.028$ (que dán desvíos positivos) y es facil entonces, identificar los elementos que intervienen en la fórmula pertinente.-

El procedimiento es desde luego también aplicable, si los desvíos se miden respecto de la mediana M_a , u otro valor cualquiera.-

VALORES MEDIOS

8.1.- Cuando se habla de valores medios se piensa por lo general en la media aritmética y si bien puede considerarse a ésta como la Media estadística por excelencia está muy lejos de ser la única aplicable y posible.-

Desde los tiempos antiguos se distinguen tres tipos de media: la aritmética, la geométrica y armónica originadas en las proporciones que llevan respectivamente, los mismos nombres.-

Así, dados tres números, como 1,2,3; 1,3,5; 4,6,8; 8,12,16 etc., en que la diferencia entre el primero y el segundo es igual a la diferencia entre el segundo y el tercero se dice que los tres números están en proporción aritmética y el segundo es media aritmética de los otros dos.-

Dados en cambio, tres números como 1,2,4; 1,3,9; 4,6,9; 8,12,18; etc., en que el cociente del primero al segundo es igual al cociente del segundo al tercero, los tres números están en proporción geométrica, y el segundo número es media geométrica de los otros dos.-

Se observa pues que en la proporción aritmética se conserva constante la diferencia entre un término y el siguiente en tanto que en la proporción geométrica se conserva constante el cociente de un término al que le sigue.-

En la proporción armónica se combinan en parte los dos aspectos de la manera siguiente: el cociente del primer término al tercero es igual al cociente entre la diferencia del primero y el segundo y la diferencia del segundo y el tercero.-

El segundo número es la media armónica de los otros dos. Ejemplos: 2,3,6; 3,4,6; 4,6,12; 8,12,24 etc.-

Estos valores medios pueden denominarse Medias Pitagóricas por atribuirse a Pitágoras la primer noticia de ella.-

8.2.- Algebraicamente designando con las letras a,b,c los tres términos dados por orden de magnitud, escribimos las condiciones que caracterizan las diferentes proporciones y medias correlativas.-

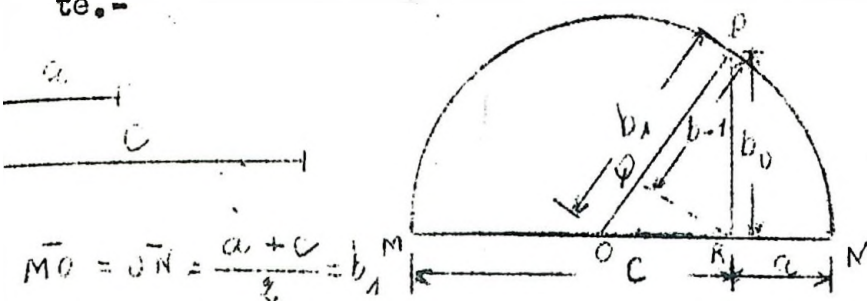
$a - b = b - c$, ó, $b - a = c - b$ proporción aritmética .°. $b = \frac{a+c}{2}$ media aritmética

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ó $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. proporción geométrica .°. $b = \sqrt{a \cdot c}$ media geométrica

$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ ó $\frac{c}{a} = \frac{c-b}{b-a}$. proporción armónica .°. $b = \frac{2ac}{a+c}$ media armónica

$$= \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$$

8.3.- Considerando los dos números positivos a y c y designando con b , b_0 , b_1 , respectivamente a las medias aritmética, geométrica y armónica, puede darse la construcción geométrica siguiente.-



Se toma sobre una recta el segmento $\overline{MN} = a + c$ como diámetro de la circunferencia, MPN; la perpendicular RP levantada sobre el extremo del segmento c , hasta encontrar el arco de circunferencia en P, determina el segmento $\overline{RP} = b_1$ (media geométrica); y la perpendicular trazada desde R sobre $\overline{OP} = b_0$ (media aritmética) determina el punto Q tal que $\overline{PQ} = b_2$ (media armónica).-

La construcción deriva del hecho de ser la media geométrica b_0 a su vez, una media geométrica de la media aritmética b_1 y de media armónica b_2 , es decir

$$b_0 = \sqrt{b_1 b_2} \quad \text{pues} \quad b_2 = \frac{2ac}{a+c} = \frac{b_0^2}{b_1}$$

Se desprende fácilmente de la observación del triángulo rectángulo PQR y del POR que siendo a y c números positivos diferentes es:

$$b_2 < b_0 < b_1 \quad \text{o} \quad \frac{2ac}{a+c} < \sqrt{ac} < \frac{a+c}{2}$$

Es decir: la media armónica es menor que la geométrica y ésta a su vez que la aritmética.-

8.4.- Del mismo origen son también las progresiones que llevan nombres correlativos al de las tres medias clásicas. Por ejemplo:

Progresión aritmética: 1, 2, 3, 4, 5

Progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16

Progresión armónica: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

En estas progresiones indefinidas se verifica para cada tres términos consecutivos las respectivas propiedades de las medias o de las proporciones algebraicamente pueden darse como funciones generatrices de esas progresiones, las siguientes:

$$y = a x \quad (\text{para progresiones aritméticas})$$

$$y = a^x \quad (\text{para progresiones geométricas})$$

$$y = \frac{a}{x} \quad (\text{para progresiones armónicas})$$

donde a es una constante numérica y x la variable ó argumento que recibe p.e. los valores sucesivos 1, 2, 3,

8.5.- Las tres medias clásicas que anteceden se generalizan extendiéndolas a más de dos términos en la forma siguiente :-

de $\frac{x_1 + x_2}{2}$ se pasa a $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$ para la media aritmética

de $\sqrt{x_1 x_2}$ " $\sqrt[N]{x_1 x_2 \dots x_N}$ para la media geométrica

de $\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$ " $\frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_N}}$ para la media armónica

Donde se considera que los números x son positivos

8.6.- En el supuesto de que se agrupen los valores de x que tengan el mismo valor numérico de modo que a los diferentes valores de x :

$$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$$

corresponden respectivamente las repeticiones o frecuencias

$$f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n ; \text{ siendo } f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$$

las fórmulas de las medias en cuestión se escriben entonces en la forma

$$\frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum x f}{\sum f} \quad (\text{media aritmética})$$

$$\sqrt[N]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \dots x_n^{f_n}} = \sqrt[N]{\prod x^f} \quad (\text{media geométrica})$$

$$\frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_n}{x_n}} = \frac{\sum f}{\sum x^{-1} f} \quad (\text{media armónica})$$

8.7 Suele ser conveniente utilizar en vez de las frecuencias absolutas f_i , las frecuencias relativas p_i (o tanto por uno del total) definidas por la relación.

$$p_i = \frac{f_i}{\sum f_i} = \frac{f_i}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

verificándose en este caso que la suma de las frecuencias relativas vale, evidentemente uno,

$$\sum p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

Los promedios antes mencionados se expresan entonces en la forma siguiente:

$$\sum X_i p_i \equiv \text{media aritmética}$$

$$\prod x_i^{1/n} \equiv \text{media geométrica}$$

$$\left(\sum x_i^{-1} p_i \right)^{-1} \equiv \text{media armónica}$$

8. 8.- El número de repeticiones de la observación x que se ha representado con la letra f inicial de la palabra frecuencia recibe también en el cálculo de valores medios el nombre de factor de ponderación de la observación x , o simplemente peso de la observación x . Las mismas denominaciones se emplean para las frecuencias relativas o pesos relativos, representados con la letra p inicial de peso.-

El concepto de peso de una observación - "pondus" es la palabra latina empleada por Gauss.- deriva de la determinación del centro de gravedad de un sistema de puntos materiales, mediante una fórmula semejante a la de la media aritmética.-

La representación más adecuada del promedio aritmético como centro de gravedad se hace con una palanca de primer género vulgarmente: una balanza cuyo punto de apoyo sea el promedio $\bar{x}$ y pesos f_i aplicados en puntos x_i tales que la suma de los productos de los pesos por las respectivas distancias de sus puntos de aplicación x_i al centro de gravedad $\bar{x}$, resulte nula. Propiedad ésta que caracteriza la media aritmética pues de

$$1. \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \quad \therefore \quad \bar{x} \sum f_i = \sum x_i f_i$$

se deduce

$$2. \quad \sum (\bar{x} - x_i) f_i = 0$$

Ejemplo

$x \quad f \quad x f$

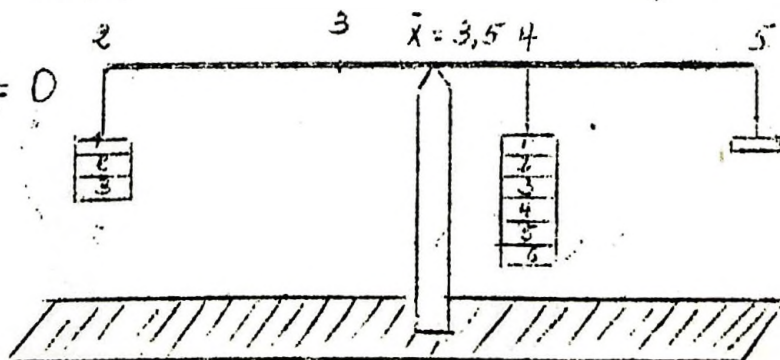
2 3 6

4 6 24

5 1 5
10 35

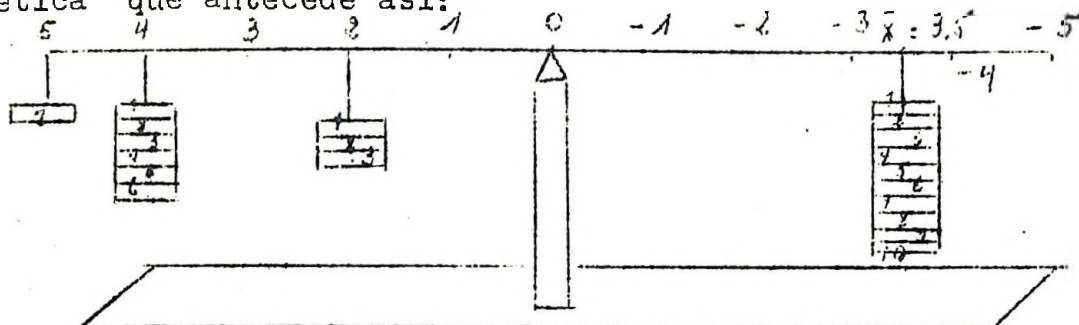
$$\bar{x} = \frac{35}{10} = 3,5$$

I.t.p. VIII



Sobre la barra(o brazo) de la balanza a partir del menor valor observado $x_{\min} = 2$, y con una cierta escala, se marcan los otros valores observados, $x = 4$, $x = 5$; y sobre cada una de esas marcas se aplica n pesos proporcionales a las respectivas frecuencias. El centro de gravedad, es decir el punto sobre el cual se apoya el brazo para que haya equilibrio, está sobre la marca $\bar{x} = 3.5$.

También puede darse la representación mecánica de la media aritmética que antecede así:



En ambas representaciones se cumple la propiedad que caracteriza la condición de equilibrio, expresada por la fórmula(2).-

media de orden α .-

Para $\alpha \rightarrow -\infty$ (es decir r tendiendo a $-\infty$) la media de orden menos infinito $m_{-\infty}$, coincide con X_1 el menor valor de X , en tanto que para la media de orden mas infinito, es $m_{\infty} = X_n$ (el mayor valor de X).-

Las demás medias tienen necesariamente valores comprendidos entre esos valores extremos.- Esto es $X_1 < m_\alpha < X_n$.-

En resumen, se tiene

$$\begin{aligned} m_{-\infty} &= X_1 \\ &\vdots \\ m_{-1} &= \left(\sum X_i^{-1} p_i \right)^{-1} \\ m_0 &= \prod X_i^{p_i} \\ m_1 &= \sum X_i p_i \\ m_2 &= \left(\sum X_i^2 p_i \right)^{1/2} \\ &\vdots \\ m_{\infty} &= X_n \end{aligned}$$

9.3.- Que la fórmula general de las medias conduce para $\alpha = 0$, a la media geométrica, resulta de los pasos siguientes:

Tomando logaritmos naturales (para facilitar la derivación)

$$\ln m_\alpha = \frac{\ln \left(\sum X^\alpha p \right)}{\alpha}$$

Como al hacer $\alpha = 0$ en el segundo miembro se obtiene una expresión indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$ puede aplicarse la regla de l'Hôpital de modo que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln m_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum X^\alpha p \right)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sum X^\alpha p \ln X}{\sum X^\alpha p}$$

$$\ln m_0 = \sum p \ln X = \sum \ln X^p = \ln \prod X^p$$

y pasando de los logaritmos a los números finalmente; la media geométrica:

$$m_0 = \prod X^p$$

9.4.- En cuanto a que es $m_{\infty} = X_n$ resulta facilmente de las transformaciones siguientes:

$$m_{\alpha} = (\sum X^{\alpha} p)^{1/\alpha} = (X_1^{\alpha} p_1 + \dots + X_n^{\alpha} p_n)^{1/\alpha} = X_n$$

$$\left(\left(\frac{X_1}{X_n} \right)^{\alpha} p_1 + \dots + \left(\frac{X_{n-1}}{X_n} \right)^{\alpha} p_{n-1} + p_n \right)^{1/\alpha}$$

Como

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{X_1}{X_n} \right)^{\alpha} = 0 \text{ por ser } \frac{X_1}{X_n} < 1; \text{ y } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_n^{1/\alpha} = p_n^0 = 1$$

se obtiene $m_{\alpha} = X_n$

Analogamente se procede para obtener que es $m_{-\infty} = X_1$; pues entonces

$$m_{\alpha} = (X_1^{\alpha} p_1 + X_2^{\alpha} p_2 + \dots + X_n^{\alpha} p_n)^{1/\alpha} = X_1 \left(p_1 + \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{\alpha} + \dots + \left(\frac{X_n}{X_1} \right)^{\alpha} \right)^{1/\alpha}$$

y como

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left(\frac{X_1}{X_1} \right)^{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left(\frac{X_1}{X_1} \right)^{\alpha} = 0; \text{ y } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} p_1^{1/\alpha} = p_1^0 = 1$$

resulta

$$m_{-\infty} = X_1$$

9.5.- El caracter monótono creciente de m_{α} , al variar α , se deduce recurriendo a la derivación. En efecto de

$$y = \ln m_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \ln \sum X^{\alpha} p$$

resulta:

$$y' = \frac{1}{\alpha} \frac{\sum X^{\alpha} p \cdot \ln X - \frac{1}{\alpha} \ln \sum X^{\alpha} p}{\sum X^{\alpha} p}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\sum p X^\alpha \ln X^\alpha - \sum p X^\alpha \ln \sum X^\alpha p}{\sum X^\alpha p} = \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\sum X^\alpha p (\ln X^\alpha - \ln \sum X^\alpha p)}{\sum X^\alpha p} = \frac{1}{\alpha^2} \sum p \frac{X^\alpha}{\sum X^\alpha p} \ln \frac{X^\alpha}{\sum X^\alpha p}$$

poniendo por comodidad

$$A = \frac{X^\alpha}{\sum X^\alpha p} \quad \therefore \quad \sum p A = \sum p \frac{X^\alpha}{\sum X^\alpha p} = 1$$

se tiene

$$y' = \frac{1}{\alpha^2} \sum p A \ln A$$

restando del segundo miembro la expresión nula

$$\sum p (A - 1) = 0$$

escribimos

$$y' = \frac{1}{\alpha^2} \sum p (A \ln A - A + 1)$$

designando con Z a la expresión entre paréntesis, será

$$Z = A \ln A - A + 1$$

$$\therefore Z' = \ln A$$

$$\therefore Z'' = \frac{1}{A}$$

Se observa que para $A = 1$ es $Z' = 0$ y $Z'' = 1$.- Por tanto se trata de un mínimo absoluto de Z que vale cero. Como no todas las A son iguales se desprende que es $y' > 0$ y en consecuencia monótona creciente y $= \ln m_\alpha$ lo cual implica a su vez también la monotonía creciente del antilogaritmo, m_α .-

I.t.p. IX

Desvíos medios y medidas de posición

10.1 Si en lugar de las observaciones X_i consideramos los valores absolutos de sus diferencias con un número fijo Z_0 (desvíos absolutos o desvíos numéricos, es decir, con abstracción del signo) en la expresión de la media de orden α

$$.1 \quad m_\alpha = (\sum p_i X_i^\alpha)^{1/\alpha}$$

tendremos

$$.2 \quad y_\alpha(z) = (\sum |z - X_i|^\alpha p_i)^{1/\alpha};$$

expresión ésta que, por ser del mismo tipo que la (1) tiene que ser monótona creciente con α , y comprendidos todos los valores $y_\alpha(z)$ entre el menor y el mayor valor de los desvíos absolutos $|z - X_i|$.

Si para cada valor de α , determinamos el valor Z_α de z que hace mínima la expresión $y_\alpha(z)$, los valores así definidos pueden considerarse medias representativas de las observaciones X_i .

Procediendo en la forma indicada habremos de deducir de la (2) los siguientes valores de Z_α , también llamados medidas de posición.

para $\alpha \rightarrow 0$ es $Z_0 =$ el modo, M_0 , el valor de z que hace mínimo a $y_0(z)$

$\alpha = 1$ " $Z_1 =$ la mediana, M_e , hace mínimo a $y_1(z)$

$\alpha = 2$ " $Z_2 =$ la media aritmética, $\bar{x}$, hace mínimo a $y_2(z)$

" $Z =$ la media de los extremos $\frac{1}{2}(X_1 + X_n)$, hace mínimo a $y_\infty(z)$

El valor de esos mínimos que no son otra cosa que desvíos medios

es

$Y_0(M_0) = 0$ = desvío medio geométrico

$Y_1(M_e) = \sum p_i |M_e - X_i|$ = desvío medio aritmético

$Y_2(\bar{x}) = \sqrt{\sum p_i (\bar{x} - X_i)^2}$ = desvío medio cuadrático

$Y(Z) = \frac{1}{2}(X_n - X_1)$ = desvío medio de los extremos,

los cuales cumplen la notable relación:

I. t. p. x

$$0 = Y_0(M_0) < Y_1(M_0) < Y_2(\bar{X}) < Y(z_\infty) = \frac{X_n - X_1}{2}$$

10.2 Se observa que, prefijando el valor de α , el mínimo de $Y_\alpha(X)$ depende de que lo sea también la expresión subradical

$$s_\alpha(z) = \sum p_i |z - X_i|^\alpha$$

Basta entonces para $\alpha > 0$, proceder a la determinación de la z_α de z que hace mínimo a $s_\alpha(z)$, puesto que también hará mínimo a $Y_\alpha(z)$, procedimiento que haremos extensivo al caso $\alpha \rightarrow 0$. Para el caso límite, $\alpha \rightarrow \infty$, se obvia toda dificultad recurriendo directamente a la expresión $Y_\alpha(z)$

10.3 Comenzando por el caso más sencillo y conocido, si hacemos $\alpha = 2$ se tiene

$$s_2(z) = \sum p (z - x)^2$$

Considerando la media aritmética $\bar{X}$, puede transformarse esta expresión escribiendo

$$\begin{aligned} \sum (z - \bar{X} + \bar{X} - x)^2 p &= \sum (z - \bar{X})^2 p + 2(z - \bar{X}) \sum (\bar{X} - x)p \\ &\quad + \sum (\bar{X} - x)^2 p \end{aligned}$$

y teniendo presente que es

$$\sum (\bar{X} - x)p = 0 \quad ; \quad \sum p = 1$$

se reduce

$$s_2(z) = (z - \bar{X})^2 + \sum (\bar{X} - x)^2 p$$

Evidentemente el valor mínimo de $s_2(z)$ se obtiene eligiendo z de modo que se anule el primer término del segundo miembro

$$(z - \bar{X})^2 = 0 \quad \therefore \quad z = \bar{X}$$

lo cual exige que z coincida con la media aritmética.

Luego

$$s_2(\bar{X}) = \sum (\bar{X} - x)^2 p = \sigma^2$$

I.t.p. x

$$y_2(\bar{X}) = \sigma \quad (\text{desvió medio cuadrático})$$

10.4.- Si se hace ahora $\alpha = 1$, se tiene

$$.1 \quad S, (Z) = \sum_{i=1}^n p_i |Z - X_i|$$

cuyo mínimo se produce para $Z = Me$, la mediana vale

$$.2 \quad S, (Me) = \sum p_i |Me - X_i|$$

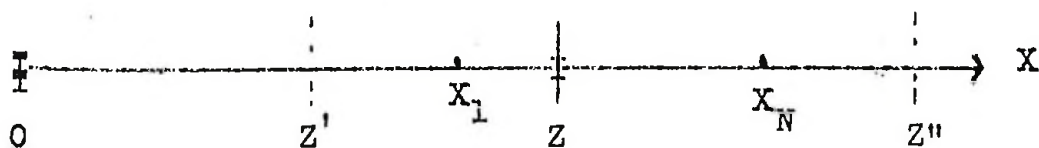
Para demostrar que $S, (Me)$ es mínimo nos conviene dar la expresión de la (.1) sin que figuren agrupados los desvíos del mismo valores decir

$$.3 \quad S, (Z) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N |Z - X_i|$$

donde, por comodidad suponemos ordenados los valores X_i de modo que sea

$$X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots \leq X_{N-1} \leq X_N$$

Es evidente que si se trata únicamente de dos observaciones v, q, X_1 y X_N , que consideramos como los extremos de un segmento sobre el eje de las X .



eligiendo como nuevo origen para medir distancias un punto Z , interior al segmento, la suma numérica de las distancias al punto X_1 y al punto X_N es igual a

$$Z - X_1 + X_N - Z = X_N - X_1$$

cualquiera sea el lugar de Z , con tal de no ser exterior al segmento $\overline{X_1 X_N}$. En cambio se se elige un punto Z^1 o Z'' , exterior al segmento $\overline{X_1 X_N}$ se tendrá evidentemente:

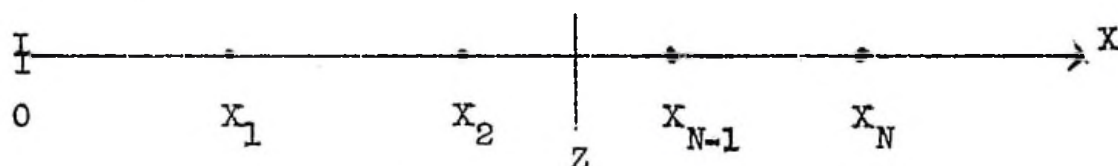
$$X_1 - Z' + X_N - Z' = X_N - X_1 + 2(X - Z') > X_N - X_1$$

$$\text{o bien } Z'' - X_1 + Z'' - X_N = X_N - X_1 + 2(Z'' - X_N) > X_N - X_1$$

en ambos casos una suma de distancia superior.

Por lo tanto para que la suma de las distancias sea mínima el punto Z deberá ser interior al segmento $\overline{X_1 X_N}$,

Se desprende de ahí que dado otro segmento $\overline{X_2 X_{N-1}}$ cuyos extremos no son exteriores al primer $\overline{X_1 X_N}$, el punto Z elegido sobre el nuevo segmento $\overline{X_2 X_{N-1}}$ tendrá la virtud de hacer mínima la suma de las distancias a los extremos X_2 y X_{N-1} , a la vez que también lo será respecto de los extremos X_1 y X_N , por no ser Z exterior a ninguno de los dos segmentos; por ejemplo:



Considerando pues una sucesión de segmentos $\overline{X_1 X_N}$, $\overline{X_2 X_{N-1}}$,

$\overline{X_3 X_{N-2}}$, etc tales que cada uno de ellos esté contenido en el precedente, el valor Z desde el cual han de medirse las distancias $|Z - X_i|$ deberá elegirse interior a todos los segmentos para que la suma de esas distancias sea mínima.-

Si el número de observaciones $N = 2m$ es par, existirá un segmento $X_m X_{m+1}$ en el cual puede elegirse el punto $Z = M$ (la mediana por definición) que separa a las observaciones en dos grupos igualmente numerosos; y si el número de observaciones es impar $N = 2m + 1$, quedará para la sucesión de los segmentos una observación X_m aislada contenida en el segmento $\overline{X_{m-1} X_{m+1}}$.-

I.t.p. x

El valor de Z deberá elegirse entonces coincidente con esa observación $Z = X_m \equiv M_e$ (la mediana también por definición), para que la suma de las distancias $|Z - N_i|$ sea mínima, lo cual es cierto respecto de los extremos de todos los segmentos por no ser Z exterior a ninguno de ellos y nula, además, al único punto aislado X_m .

Como es natural puede haber segmentos cuyos extremos-ambos o solamente uno de ellos-coincidan repetidas veces con los extremos de otros de los segmentos considerados, pues ello depende del número de veces que está repetida la observación X_i .

Queda pues demostrado que la expresión (.1) tiene un valor mínimo para $Z = M_e$, la mediana.

10.5.- Para obtener el valor Z_0 que comprende al caso $\alpha = 0$, escribamos:

$$1 \quad S_0(Z) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum p_i |Z - X_i|^\alpha ; (\alpha > 0)$$

Se deduce de aquí que si Z no coincide con ninguna X_i , es decir $Z \neq X_i$, se verifica

$$2 \quad S_0(Z = X_i) = \sum p_i |Z - X_i|^0 = \sum p_i = 1$$

En cambio, si Z coincide con alguna de las X_i , por ser

$$\alpha \lim_{\alpha \rightarrow 0} p_i |X_i - X_i|^\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} p_i |0|^\alpha = 0$$

se tendrá

$$3 \quad S_0(Z = X_i) = p_i + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n = 1 - p_i$$

Resumiendo los $n+1$, valores posibles de $S_0(Z)$ se tiene:

$$\begin{aligned} S_0(Z = X_1) &= 1 \\ S_0(X_1) &= 1 - p_1 \\ S_0(X_m) &= 1 - p_m \\ S_0(X_n) &= 1 - p_n \end{aligned}$$

El menor de entre todos estos valores posibles de $S_0(Z)$ es, evidentemente, el que corresponde al peso p_m , que sea mayor que cualquier otro, p_i .— El mínimo de $S_0(Z)$ se produce entonces para $Z = X_m = M.$ (el modo o valor mas frecuente). Como es natural si hubiera varios pesos máximos (varios modos igualmente frecuentes) correspondería un máximo para cada uno de ellos.—

El valor del mínimo se obtiene al reemplazar X_m en $y_\alpha(X)$ y hacer luego que α tienda a cero; es decir

$$y_0(X_m) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sum p_i |X_m - X_i|^\alpha)^{1/\alpha} = (1 - p_m)^\infty = 0$$

Resultado fácilmente comprensible, por otra parte, si se tiene en cuenta que según indicamos en (9.3) para $\alpha \rightarrow 0$ y (X) conduce a la media geométrica de los desvíos y que por anularse uno de los factores, resultará nulo el producto.—

10.6.— Volviendo a la expresión

$$y_\alpha(Z) = (\sum p_i |Z - X_i|^\alpha)^{1/\alpha}$$

sabemos que para $\alpha \rightarrow \infty$, $y_\infty(Z)$ es igual al mayor de los términos $|Z - X_i|$.

Sea cual fuere el valor de Z , el mayor de los desvíos es necesariamente uno de los dos siguientes valores

$$|Z - X_1| \quad \text{ó} \quad |Z - X_n|$$

pues cualquiera de los otros desvíos es menor que alguno de los dos. Puesto que para $\alpha \rightarrow \infty$ se tiene.

$$y_\infty(Z) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\sum p_i |Z - X_i|^\alpha)^{1/\alpha} = \begin{cases} |Z - X_1| \geq |Z - X_n| & \text{ó} \\ |Z - X_n| \geq |Z - X_1| \end{cases}$$

habrá que elegir la Z de manera que difiera de los extremos, X_1 , X_n , lo menos posible, lo cual conduce a establecer que el valor de

Z que hace mínimo $y_{\infty}(Z)$ es

$$Z = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

pues cualquier otro valor que se le diera a Z tendría por efecto aumentar

$$|Z - X_1| \quad \text{ó} \quad |Z - X_n|$$

y, correlativamente, el valor de $y_{\infty}(Z)$.

Por consiguiente, el valor mínimo es

$$\begin{aligned} y_{00}(Z_{00}) &= \left| \frac{X_1 + X_n}{2} - X_1 \right| = \frac{X_1 + X_n}{2} - X_1 \\ &= \frac{1}{2} (X_n - X_1) \end{aligned}$$

I.t.p. x

MEDIAS HOMOGENEAS, TRASLATIVAS Y ASOCIATIVAS.

II.I. Hemos señalado hasta ahora dos expresiones que generan valores medios. las medias de orden α , m_α ,

$$.1 \quad M_\alpha = M_\alpha (X) = \sum p X^\alpha;$$

y las medidas de posición Z_α que dan desvíos medios de orden α , mínimos.

$$.2 \quad Y_\alpha (Z_\alpha) = \left(\sum p \|Z_i - X\|^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

Como se ha demostrado las medias m_α , crecen con α , estando comprendidas entre el menor valor X_1 de las observaciones y el mayor, X_n . pero las medias usuales, media armónica m_{-1} ; media geométrica, m_0 y media aritmética, m_1 , tienen valores mas o menos centrales y próxima, pues para esos valores de α , la influencia del peso, p , de cada una de las observaciones tienen mayor importancia relativa respecto de las potencias X^α ; en tanto que esa influencia disminuye cuando α toma valores muy grandes, numericamente, sean negativos o positivos

Algo análogo ocurre con las medidas de posición: modo, mediana, media aritmética y media de los extremos que se deducen de la expresión $Y_\alpha (Z) = \text{mínimo}$, y corresponden respectivamente a los índices $\alpha = 0, 1, 2, \infty$.

Estas medidas de posición -también valores medios- sacrifican en grado creciente la influencia que, para su determinación, tienen los valores centrales por la de los valores extremos llegando, en el caso límite $\alpha \rightarrow \infty$, a independizarse totalmente de los valores interiores $X_2, X_3, \dots, X_{n-1}$ al atribuir a la característica pertinente Z_∞ , el valor

$$Z_\infty = \frac{1}{2} (X_1 + X_n),$$

es decir, el promedio aritmética simple de las observaciones extremas.

Este tipo de media se utiliza frecuentemente - aun cuando no lo menciona- para hallar la media aritmética, y el desvio medio cuadrado.

52
tico en las distribuciones de variables estadísticas continuas, al reemplazar el intervalo de clase de las observaciones por el promedio de los extremos de ese intervalo.

11.2. Las expresiones matemáticas precedentes gozan de ciertas propiedades que permiten caracterizar los valores medios que de ellas se derivan. E inversamente, indagando que clase de valores medios pueden satisfacer esas propiedades, se obtiene como conclusión que derivan necesariamente de esas expresiones. Nos limitaremos aquí a dejar constancias de esas propiedades y a ejemplificarlas con las fórmulas aludidas.-

En primer lugar consideraremos la propiedad homógenea.

Se define como media homogénea aquella en la cual, si se multiplican los valores observados X_i por un factor fijo K , la media resulta a su vez multiplicada por ese mismo factor K .

Ejemplo: siendo

$$m_{\alpha}(X) = (\sum p X^{\alpha})^{1/\alpha} ; \sum p = 1$$

se tiene

$$m_{\alpha}(KX) = (\sum p (kX)^{\alpha})^{1/\alpha} = (\sum p k^{\alpha} X^{\alpha})^{1/\alpha} = K (\sum p X^{\alpha})^{1/\alpha}$$

$$\therefore m_{\alpha}(kX) = K m_{\alpha}(X)$$

11.3. En segundo lugar consideramos la asociatividad.

Como media asociativa se define a la que no altera si se substituye los valores numéricos X_i , de un grupo parcial de las observaciones, por el valor numérico de la media del grupo parcial.

Ejemplo: Descomponiendo la suma de términos que definen la media en dos grupos cualesquiera, escribimos

$$m_{\alpha} = (\sum' X^{\alpha} p + \sum'' m_{\alpha}^{\alpha} p)^{1/\alpha}$$

Calculando la media parcial correspondiente al primer grupo de observaciones, se tiene

$$m'_\alpha = \left(\frac{\sum^1 X^\alpha p}{\sum^1 p} \right)^{1/\alpha} \quad \therefore (m'_\alpha)^\alpha = \frac{\sum^1 X^\alpha p}{\sum^1 p}$$

$$\therefore \sum^1 (m'_\alpha)^\alpha p = \sum^1 X^\alpha p$$

y por lo tanto puede escribirse la (.1) en la forma

$$.2 \quad m_\alpha = \left(\sum^1 (m'_\alpha)^\alpha p + \sum'' X^\alpha p \right)^{1/\alpha}$$

Evidentemente, procediendo de la misma manera con el segundo grupo de observaciones, puede expresarse la media general (.1) en función de las dos medias parciales, así

$$.3 \quad m_\alpha = \left(\sum^1 (m'_\alpha)^\alpha p + \sum'' (m''_\alpha)^\alpha p \right)^{1/\alpha}$$

viéndose claramente como se han substituido los valores X_i , por los de las respectivas medias del grupo. Como es natural, podría haberse dividido la suma de términos en mas de dos grupos y la propiedad asociativa -que podríamos acaso con mas propiedad denominar, substitutivo-, se conserva.

11.4. La fórmula (11.3.3) precedente es particularmente útil cuando se trata de calcular valores medios ampliando el grupo formado por cierto número de observaciones con el agregado de un nuevo grupo. Podemos presentarla así

$$.1 \quad m_\alpha = \left((m^1_\alpha)^\alpha \sum^1 p + (m''_\alpha)^\alpha \sum'' p \right)^{1/\alpha}$$

o también

$$m = \left(\frac{(m^1_\alpha)^\alpha \sum^1 p + (m''_\alpha)^\alpha \sum'' p}{\sum^1 p + \sum'' p} \right)^{1/\alpha}$$

puesto que el denominador vale necesariamente 1. por comprender a la suma de todos los pesos, o frecuencias relativas, p .

Pero si se utilizaran las frecuencias absolutas se escribe, simplemente cambiando la p , por la F

$$.5 \quad m_\alpha = \left(\frac{(m^1_\alpha)^\alpha \sum^1 f + (m''_\alpha)^\alpha \sum'' f}{\sum^1 f + \sum'' f} \right)^{1/\alpha}$$

XI.

Es interesante resaltar que las propiedades asociativa y homogénea impuestas a los valores medios, conducen necesariamente al tipo de media potencial m_α considerado aquí para ejemplificar.

11.5. En tercer lugar consideramos la traslatividad.

Como media traslativa se define aquella tal que si se aumentan los valores observados X , en una cierta cantidad a , la media respectiva resulta aumentada en esa misma cantidad.

Esta propiedad la poseen todos los valores medios Z definidos por la condición de hacer mínimos el promedio de los desvíos; es decir

$$.1 \quad Y_\alpha(Z) = \left(\sum |Z - X|^\alpha p \right)^{1/\alpha} = \text{mínimo}$$

Pero así mismo también gozan estos valores medios de la propiedad homogénea, es decir que si se multiplican las observaciones por un número fijo (ó se dividen por un número fijo) la media pertinente resulta multiplicada (o dividida en su caso).

Ambas propiedades se comprueban observando que si se someten las observaciones a lo que se llama una transformación lineal, multiplicando las observaciones X por un número a , y agregándole a ese resultado otro número b , así

$$aX + b \quad ; \quad a \neq 0$$

le corresponde una media Z , sujeta a la misma transformación lineal.

En efecto basta determinar el valor de T tal que

$$\left(\sum |T - aX - b|^\alpha p \right)^{1/\alpha} = a \left(\sum \left| \frac{T-b}{a} - X \right|^\alpha p \right)^{1/\alpha} = \text{mínimo}$$

y como, a , es constante el mínimo está definido para la expresión semejante a la (.1) es decir para T_α tal que

$$\frac{T_\alpha - b}{a} = Z_\alpha \quad \therefore \quad T_\alpha = a Z_\alpha + b$$

pues los desvíos serán entonces iguales a los indicados por la (1)

Queda probado entonces que las medias Z_α son todas homogéneas y traslativas (la homogeneidad resulta del factor, a , y la traslatividad del término b).-
XI.

11.6. Resulta entonces de lo expuesto que todas las medias potencia-⁵⁵les

$$.1 \quad m_{\alpha} = \left(\sum x^{\alpha} p \right)^{1/\alpha}$$

son homogéneas y asociativas y las medias Z_{α} definidas por la condición

$$.2 \quad Y_{\alpha} (Z_{\alpha}) = \left(\sum |Z_{\alpha} - x|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} = \text{mínimo}$$

son todas homogéneas y traslativas.

La expresión (.1) definen en particular la media armónica, m_{-1} ; la media geométrica, m_0 ; la media aritmética $m_1 = \bar{X}$; en tanto que la expresión (2) define al modo $Z_0 \doteq M_0$; la mediana $Z_1 = M_e$ y también la media aritmética $Z_2 = \bar{X}$.-

La media aritmética que pertenece tanto al grupo de medias del tipo (.1) como al grupo de medias del tipo (.2) goza en consecuencia de las tres propiedades: de ser homogénea, asociativa y traslativa.

Debemos recordar que el cambio de origen y el cambio de escala de las observaciones oportunamente utilizado para simplificar el cálculo de la media aritmética y el desvío medio cuadrático derivan justamente de la propiedad traslativa y homogénea aquí consideradas.

XI.-

13.1 Los números índices se utilizan principalmente para reflejar la variación de los precios pero sus usos son muy diversos. Veamos algunos ejemplos:

1. COTIZACION DE CEREALES POR CADA 100 KILOS:

Años	De trigo en el mercado		Número índice del mercado	
	Nacional	Internacional	Nacional	Internacional
	m\$.n.			
1946	15,51	23,93	100,0	100,0
1947	17,08	31,94	110,1	133,5
1948	19,73	29,64	127,2	123,9
1949	23,02	26,18	148,4	109,4
1950	24,08	32,11	155,3	134,2
1951	30,71	45,31	198,0	189,3
1952	36,15	44,18	233,1	184,6
1953	50,00	38,00	322,4	158,8
1954	50,00	39,20	322,4	163,8

Fuente: Indices Estadísticos 1954 (P.E.N. Secretaría de Asuntos Técnicos - Buenos Aires 1955 pág. 48).

2. SUPERFICIE CULTIVADA Y PRODUCCION DEL TRIGO

Períodos	Superficie en miles de hectáreas	Producción en miles de toneladas	Números índices de la superficie cultivada	Números índices de la producción
1953/34	7.957	7.787	140,0	151,7
1938/39	10.318	9.150	131,3	178,2
1943/44	6.811	6.800	119,8	132,3
1948/49	5.809	5.200	102,0	101,2
1949/50	5.692	5.144	100,0	100,0
1950/51	6.554	5.796	115,0	112,8
1951/52	4.791	2.100	84,2	40,8
1952/53	6.065	7.634	106,7	148,3
1953/54	6.354	6.200	113,3	120,7

Fuente: Indices estadísticos 1954 - pág. 28 - Bs. Aires 1955

3. N. I. DE LOS PRECIOS DE ADQUISICION DEL IAPI Y VENTA EN EL EXTERIOR

Años	Trigo		Maíz	
	Adquisición m\$.n.	Venta al exterior	Adquisición m\$.n.	Venta al exterior
1950	100,0	100,0	100,0	100,0
1951	130,0	112,8	200,0	158,7
1952	144,7	106,2	250,0	153,2
1953	212,8	144,5	281,3	112,7
1954	212,8	106,6	281,3	93,4

Fuente: Economía y Finanzas - Buenos Aires 15/IX/955 - pág. 137

Es evidente que el reemplazo de las observaciones por Números Índices (N.I.) permite apreciar más fácilmente la tendencia de la serie numérica a través del tiempo.

13.2 Los Números Índices se denominan simples o compuestos según correspondan a una sola serie de observaciones o a una combinación de varias series de observaciones. Los ejemplos del párrafo anterior son, por lo tanto, N.I. simples.

Particularizándonos con los precios, se han ideado numerosos métodos para la construcción de Números Índices compuestos atendiendo a la finalidad y posibilidades prácticas.

Irving Fisher, en su notable obra: "The Making of Index Numbers a Study of their Varieties, Test and Reliability" (La construcción de números índices. Un estudio de su variedad, pruebas y eficiencia) Boston 1923; 2^a ed.; examina 6 tipos diferentes atendiendo a la fórmula utilizada para calcular el N.I.

- 1º Método aditivo o agregativo
- " del promedio aritmético
- " del promedio geométrico
- " del promedio armónico
- " de la mediana
- " del modo, valor modal o dominante

13.3 Los números índices del tipo aditivo se construyen sumando los precios correspondientes a los artículos que se consideren, en una fecha dada; y se miden las variaciones generales experimentadas por la suma de precios de ese agregado de cosas, comparando las sumas correspondientes a diferentes fechas.

Simbólicamente escribimos:

$$P_{l/0} = \frac{P_l + P'_l + P''_l + \dots + \sum P_l}{P_0 + P'_0 + P''_0 + \dots + \sum P_0}$$

indicando con $P_l, P'_l, P''_l, \dots$ respectivamente los precios de la unidad de cada uno de los bienes o artículos considerados, en la época indicada por el subíndice l ; y con $P_0, P'_0, P''_0, \dots$ los precios de la unidad de cada uno de los mismos bienes en la época 0 , tomada como base de referencia.

El defecto principal de esta clase de índices consiste en que asigna a cada uno de los bienes la misma importancia en que la unidad de medida puede diferir notablemente de uno a otro bien: kilos, toneladas, litros, metros, paquetes, gruesas, etc.

Por otra parte al sumar precios de diferentes bienes se hace abstracción de su falta de homogeneidad pues no tienen la misma dimensión por la que resulta necesario deformar conceptos teóricos clásicos para asignarle un sentido al número resultante que estará necesariamente comprendido entre el menor y el mayor de los cocientes que puede formarse eligiendo respectivamente el menor sumando del numerador y el mayor del denominador; e inversamente para el segundo cociente.

Los escrúpulos teóricos pueden salvarse imaginando que las unidades de los diferentes bienes forman un conjunto o surtido particular en cuyo caso

$$P_l + P'_l + P''_l + \dots = \sum P_l$$

representa el precio de ese surtido en la época 1; y

$$p_0 + p_0' + p_0'' + \dots = \sum p_0$$

representa el precio de ese mismo surtido en la época base, 0. El índice

$$ad_{1/0} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0}$$

refleja pues la variación

de precio de ese surtido particular de la época 1 con relación a la época 0.

13.4 Para resaltar las consecuencias que pueden derivar de la aplicación lisa y llana del método aditivo o agregativo imaginemos el siguiente ejemplo:

Artículo	Unidad	Precio (0)	Precio (1)	Unidad	Precio (0)	Precio (1)
A	Tonelada	40.00	50.00	kilo	(mon.) 0.04	0.05
A'	Paquete	0.25	0.20	Gruesa de paquetes	36.00	28.80
Suma de precios:		40.25	50.20		36.04	28.85
		(0)	Precio relativo (1)		(0)	Precio relativo (1)
A		100	125		100	125
A'		100	80		100	80
		100	124,7		100	80,4

Al método aditivo se lo considera por eso desprovisto de valor, a menos que una elección conveniente de las unidades de medida pueda compensar sus defectos.

Un índice de este tipo fué el utilizado por el autor francés Dutot en 1738 para comparar los precios de la época de Luis XII(1500) a los de la época de Luis XIV (1670) tomando una media aditiva simple con la suma de los precios de 13 mercancías. Ejemplo moderno que merece señalarse es el del Número Índice de la publicación periódica americana Bradstreet construido con la simple suma de los precios por libra de cada una de los diferentes artículos incluidos. Ese índice no es pues otra cosa que el precio de un surtido compuesto de 98 ó de 96 artículos - 1 libra (450 gramos) de cada uno, correspondiente al primer día de cada mes. Se entiende que los precios por libra debieron calcularse cuando no correspondieran a esa unidad de peso. No existe por lo tanto para tal índice una época base pero puede obtenerse la serie de precios relativos del surtido Bradstreet, tomando la suma de precios de un mes o año cualquiera como base, para expresar la de los otros meses o años.

13.5.- El método de las medias aritméticas se aplica a los precios relativos. Así si se han calculado N precios relativos p_1/p_0

$$^a P_{1/0} = \frac{1}{N} \sum \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{N} \left(\frac{p_1}{p_0} + \frac{p_1'}{p_0'} + \frac{p_1''}{p_0''} + \dots \right)$$

También aquí puede criticarse el tratamiento igualitario dado a cada uno de los bienes considerados para el promedio pero en cambio el sentido dimensional del índice. $^a I_{1/0}$ es claro, pues siendo los precios relativos, p_1/p_0 , números puros, también lo es su promedio.

Este método lo utilizó en 1764 el conde Giovanni Rinaldo Carli deseando poner en evidencia la repercusión del descubrimiento de América sobre el valor de la moneda. Redujo los precios pagados en 1750 por el trigo, el vino y el aceite a un tanto por ciento de los precios correspondientes a las mismas mercancías en el año 1400; sumó los tres porcentajes y dividió por tres obteniendo así un número índice medio de las tres mercancías. Se trata pues de un promedio aritmético simple de tres precios relativos. Ejemplo.

Precios en 1400		Precios en 1750	Precios relativos
Trigo	p_0	p_1	$p_1/p_0 = 3,85$
Vino	p_0'	p_1'	$p_1'/p_0' = 4,05$
Aceite	p_0''	p_1''	$p_1''/p_0'' = 3,23$
			$\sum p_1/p_0 = 11,13$

$$\therefore ^a P_{1/0} = \frac{1}{3} \sum p_1/p_0 = 3,71$$

y afirma Carli que la variación nominal de precios en esos 250 años en Italia es de 1 a 3,71; si bien luego de eliminar la influencia perturbadora de los metales preciosos oro y plata concluye en que el aumento real fué para Italia, solamente del 7,54 %.

13.6.- El método de la media geométrica resulta de aplicar la fórmula:

$$^g P_{1/0} = \sqrt[N]{\left(\frac{p_1}{p_0} \right)} = \left(\frac{p_1}{p_0} \frac{p_1'}{p_0'} \frac{p_1''}{p_0''} \dots \right)^{1/N} = \frac{(p_1 p_1' p_1'' \dots)^{1/N}}{(p_0 p_0' p_0'' \dots)^{1/N}}$$

que recurriendo a los logaritmos, puede presentarse en las formas:

I.t.p. III.-

$$\lg \bar{g}_{P_{1/0}} = \frac{1}{N} \sum \lg \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{N} \left(\lg \frac{p_1}{p_0} + \lg \frac{p'_1}{p'_0} + \lg \frac{p''_1}{p''_0} + \dots \right)$$

o bien

$$\begin{aligned} \lg \bar{g}_{P_{1/0}} &= \frac{1}{N} \sum \lg p_1 - \frac{1}{N} \sum \lg p_0 = \frac{1}{N} (\lg p_1 + \lg p'_1 + \lg p''_1 + \dots) \\ &\quad - \frac{1}{N} (\lg p_0 + \lg p'_0 + \lg p''_0 + \dots) \end{aligned}$$

El economista inglés, W. Stanley Sevons construyó, en 1863, uno de los primeros números índices de importancia para medir la baja del valor del oro después de los descubrimientos de minas auríferas en California y en Australia alrededor de 1850, utilizando no solamente la media geométrica simple de precios relativos sino que sostuvo la necesidad de aplicar la media geométrica más bien que la aritmética. Sevons tenía el promedio de los precios anuales de 39 bienes para los años 1845 a 1862 inclusive. Tomó precio de la época base, p_0 a la media aritmética simple de los precios anuales 1845 a 1850 inclusive y los precios para cada uno de los 18 años de su estudio los expresó como precios relativos de la época base, considerando a la media geométrica de esos precios relativos como número índice.

Para el método de la media armónica tendremos, en cambio, la fórmula.

$$\bar{h}_{P_{1/0}} = \frac{N}{\sum \frac{p_0}{p_1}} = \frac{N}{\frac{p_0}{p_1} + \frac{p'_0}{p'_1} + \frac{p''_0}{p''_1} + \dots}$$

o bien considerando la inversa del número índice.

$$\frac{1}{\bar{h}_{P_{1/0}}} = \frac{1}{N} \sum \frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{N} \left(\frac{p_0}{p_1} + \frac{p'_0}{p'_1} + \frac{p''_0}{p''_1} + \dots \right)$$

13.7 En cuanto al método de la mediana se limita a aplicar la definición de la mediana Me , a los precios relativos p_1/P_0 , para lo cual deberán ordenarse por su orden de magnitud y elegir como mediana al precio relativo central o al promedio de los dos centrales según sea impar o par el número N de precios relativos considerados. Esa mediana será pues el número índice buscado, $^{Mo}P_{1/0}$.

El método del valor modal no puede aplicarse en forma directa, pues exige un agrupamiento previo de los precios relativos en clases, y presentarlos en una tabla de frecuencias que permita determinar un modo, o valor modal teórico, tal como se ha indicado al tratar de este valor medio. De procederse así, el valor modal que se determine, será el índice buscado, $^{Mo}P_{1/0}$.

13.8 Con excepción del método aditivo, los demás métodos suelen dar valores concordantes debiendo hallar su confirmación en el hecho de pertenecer a una expresión matemática general.

Debe en consecuencia recordarse que los resultados de los promedios armónico, geométrico, y aritmético están necesariamente en orden creciente, y que las diferencias entre unos y otros se hacen mayores cuanto más dispersos estén los valores de los números promediados.

La mediana y el modo por otra parte, no conservan el mismo grado de estabilidad que los otros valores medios cuando el número de observaciones utilizados para determinarlos, es reducido.

La crítica del trato igualitario de los diferentes bienes, al considerar como de la misma importancia para el cálculo del número índice a todos los precios o precios relativos, es aplicable a todos estos métodos, pero quedan aún por analizar las diferencias de comportamiento de los diversos números índices, respecto de ciertas operaciones o pruebas.-

EL PROBLEMA DE MEDIR LA VARIACION DE LOS PRECIOS Y LA PRODUCCION.

12.1. Los valores medios, ó promedios, de que nos hemos ocupado son utilizados para caracterizar un conjunto de observaciones numéricas correspondientes a un determinado momento o bien asignables a un cierto día, mes, año, etc. Se trata por lo tanto, de un tipo de informático que, recurriendo al lenguaje de la Mecánica, es de carácter estático.

En tal sentido podríamos decir que esas cifras son una imagen o fotografía impresa por el estado particular de los hechos motivo de observación. Por ejemplo precios de artículos de consumo vigentes al 30 de junio de 1955. De la misma manera que el cine logra reflejar el movimiento mediante una sucesión ininterrumpida de cuadros fotográficos mantenidos fijamente en exposición por brevísimos instantes (1/16 avo de segundo o menos) se logra también un sentido dinámico de la evolución de las cifras estadísticas a través de sucesivos cuadros numéricos del mismo fenómeno correspondientes a fechas preferiblemente equiespaciadas. El lapso entre las fecha puede ser un día, mes, año, quinquenio, etc.; depende de la finalidad perseguida y de las posibilidades prácticas.

Generalmente en esos cuadros numéricos no aparecen las cifras directamente observadas, sino parcialmente elaboradas de manera que resultan facilitadas las comparaciones y sintetizada comúnmente su información en los citados valores medios, coeficientes de variabilidad porcentajes ó otro número vinculado de alguna manera a las observaciones.

12.2. La técnica mas frecuentemente utilizada para reflejar la variación de los precios o de las cantidades producidas, consumidas, vendidas, etc., a través del tiempo es la de los Números Índices, técnica que ha llegado a convertirse en instrumento preferido por su simplificidad y eficacia para la interpretación y análisis de condiciones económicas generales ó particulares.

Por ejemplo: los cambios experimentados por el llamado nivel de precios - de tanta realidad como pueda serlo el del nivel del mar, no obstante la agitación permanente de sus aguas- interesan sobremedura tanto a empresarios como a trabajadores: pues es cada vez más intenso el deseo de mantener estrechamente ligados precios y salarios a fin de evitar trastornos económicos y sociales derivados de su falta de equilibrio ó paridad ya que evidentemente, desde el punto de vista económico el salario es también un precio: el del trabajo ó servicio personal.

No solamente interesan las variaciones en el tiempo sino también las variaciones en el espacio, es decir, las registradas por cuadros numéricos de un mismo tipo de observaciones correspondientes a distintos lugares. Pero el tratamiento no difiere substancialmente del que se dá al problema dinámico pues en vez de desplazamientos en el tiempo se opera con desplazamientos en el espacio. La complicación se presenta realmente, cuando se trata de considerar variaciones combinadas en el tiempo y en el espacio, y en general, cuando se trata de efectos superpuestos de dos ó mas factores.

12.3. Las cuestiones que se encaran con los números índices son del tipo siguiente: Dada una clase social caracterizada, v.g., por la magnitud de sus ingresos ó por su capacidad económica, como puede serlo

el personal ocupado en cierta industria qué nivel de vida tenía en 1945? y qué nivel de vida en 1955? Esto requiere precisar que se entiende por nivel vida.

En efecto podemos considerar a la diversidad y cantidad de los artículos comprados anualmente por una familia tipo de la categoría social aludida, como una medida aproximada de ese nivel y en tal caso es evidente que si en 1955 se compra la misma diversidad y cantidad de artículos que en 1945 no podremos decir que el nivel de vida haya variado. Importará seguramente una mejora si se ha producido un aumento en la cantidad sin desmedro de la diversidad o viceversa; y seguramente habrá descendido el nivel si ambos o alguno de esos dos factores ha disminuido. En los casos intermedios disminución de la diversidad a expensas de la cantidad y recíprocamente, queda la duda librada a la interpretación de otros aspectos que puedan justificar o no una compensación. La O.I.T. (Oficina Internacional del Trabajo) ha interpretado como nivel de vida al conjunto de bienes consumidos y servicios utilizados por una cierta familia, tipo v.g. Matrimonio con dos hijos menores de 14 años residentes en la Capital Federal, es el tipo que sirvió para establecer el presupuesto básico en 1943. Evidentemente más apropiadas que las palabras nivel de vida parecenserlo en este caso, nivel de consumo pues debe observarse que el número índice no reflejaría así las alteraciones producidas en la clase de consumo.

La misma idea está implícita en el propósito de medir lo que se ha dado en llamar el salario real por oposición al salario nominal o salario monetario - entendiéndose por ello a la capacidad de compra o capacidad adquisitiva del salario nominal o monetario. El problema se reduce conceptualmente a medir el conjunto de bienes necesarios que pueden adquirirse a cambio de la unidad de tiempo trabajado en una u otra fecha, por un obrero o empleado perteneciente a la categoría social estudiada.

Utilizando expresiones vulgares, podríamos preguntar así mismo, si la vida es más cara en 1955 que en 1945; más cara en la Capital Federal que en una ciudad del interior de la República; en Buenos Aires que en Río de Janeiro, Madrid o Washington, etc.

12.4.- En otro campo de estudios se plantean cuestiones cuya solución reclama procedimientos como el de los números índices. Por ejemplo: si quiere compararse la mortalidad de la población de la Capital Federal en 1945 con la del año 1955; o cotejar la mortalidad de una ocupación con la de otra; o la mortalidad de una región con la de otra. Y lo mismo puede plantearse respecto de la nupcialidad, natalidad, morbilidad, etc.

En efecto la denominada tasa cruda de mortalidad, p.e., obtenida al dividir el número de muertes por el número de habitantes de la población considerada expresada comúnmente en un tanto por mil, puede inducir a conclusiones erróneas pues no tiene en cuenta la composición por edades (sexo y profesión en su caso) de la población.

Debe tenerse presente que a cada edad - y también sexo o profesión- corresponde una tasa anual de mortalidad específica. Una población en la que abundan los jóvenes acusa una mortalidad menor que aquella en la que abundan los viejos; y es entonces evidente que no

será necesariamente mas sano el lugar donde el por mil anual de muertes sea menor, habrá que considerar su composición por edades.

El precio de la vida -podríamos decir- depende del lugar, de la época, de la edad, del sexo, de la ocupación, etc., y cabe preguntar respecto de dos poblaciones, atendiendo a uno de esos factores de diferenciación si el nivel de mortalidad de la una es más alto ó / más bajo el de la otra.

12.5.- Problemas de la misma naturaleza se presentan también respecto del prestamista que quiere rodearse de garantías suficientes para recibir a su vencimiento el valor real prestado, o respecto del ahorrista que entrega parte del esfuerzo de su trabajo a una institución privada ó oficial, creyendo que ha de conservar así intacto, el valor / real depositado, etc.-

En el momento en que se presta o ahorra coinciden, evidentemente, el valor real y el valor nominal o monetario de las sumas / prestadas o ahorradas, pero si a partir de ese momento los precios de la generalidad de los bienes crecen (cualquiera sea el motivo) esos / dos valores divergen en forma también creciente de modo que al disponer ulteriormente de esas sumas nominales no será posible adquirir la misma cantidad de bienes o mercancías. Basta como ejemplo, pensar que es lo que podía adquirirse con \$200 depositados en Caja de Ahorros en 1945 y que puede adquirirse en 1955 al retirar esos \$200.

12.6.- Justamente, entre las aplicaciones de los Números Índices está principalmente la de determinar la fluctuación media de los precios con el fin de medir el poder adquisitivo de la moneda. La idea es antigua. En 1738, un autor francés, Dutot estudia la variación de precios de numerosos artículos y compara para 13 de ellos la suma de los precios de la época de Luis XII con los de la época de Luis XIV queriendo averiguar si las rentas del Rey Sol superaban a la de los soberanos anteriores diciendo: "es necesario recurrir a los precios de las mercancías bajo cada uno de esos reinados. Aquel que con sus rentas / pueda adquirir mas mercancías a los precios vigentes en su tiempo, será constantemente el más rico".

El más antiguo movimiento importante de precios, que se conoce bastante bien es la del alza general de precios del siglo XVI, En 1764, un autor italiano el Conde G. R. Carli, indagando el efecto del descubrimiento de América sobre el poder de compra de la moneda, comparó los precios pagados en su época (1750) por el trigo, el vino, y el aceite, con los precios de esos mismos artículos en el año 1500.

Pero es durante la época de las violentas fluctuaciones de precios a comienzos del siglo XIX, particularmente en Gran Bretaña a consecuencia de las guerras contra Napoleón y de la emisión de papel moneda de curso forzoso, que se intensifica el estudio para medir las variaciones de precios y sus efectos sobre el valor de la moneda con el objeto de que pudieran reglarse con equidad los compromisos monetarios .-

Otro tanto ocurrió después de la primera guerra mundial de este siglo XX; 1914 - 1918; recrudeció el interés por el estudio de las variaciones de precios a raíz de la intensa depreciación monetaria I.t.p. XII.

de los países beligerantes y de los índices más prácticos y adecuados para medirlas. Exponentes principales de ésta época pueden considerarse, en primer lugar al profesor americano Irving Fisher que publicó en 1911 su obra El poder adquisitivo de la moneda, que se ocupaba muy especialmente de los números índices y más adelante en 1922, publica La construcción de los números índices, obra consagrada casi totalmente a la investigación de una fórmula ideal. En segundo lugar aparece en 1915 un estudio del profesor también americano del norte, Wesley Mitchell en el Boletín Nº 173 de la Oficina Estadística del Trabajo. La construcción y uso de los números índices, obra ésta considerada como la más importante sobre la materia y reimpresa varias veces en números posteriores del mismo boletín.

12.8.- Como señala Wesley Mitchell los números índices son construídos, por lo común, con propósitos de carácter general y sin otra pretensión definida que la de servir de medida a las variaciones experimentadas por la producción ó por los precios.

Pero una vez publicados son utilizables para muchos fines: para evidenciar la depreciación del oro; el aumento del costo de la vida; las alternativas de prosperidad ó depresión comercial; la influencia del cambio de precios en el patrimonio ó en la renta nacional o privada. Para probar que los salarios deben aumentarse o mantenerse (nunca rebajarse); que los cambios de tarifa aduanera han beneficiado o perjudicado a los productores; que los empresarios han manipulado los precios o la producción en perjuicio del público; que el sistema monetario debe reformarse; que la inmigración debiera estimularse ó restringirse; que los recursos naturales están agotándose ó que la renta nacional crece.-

Se traen a colación los números índices para explicar porque han bajado las cotizaciones de la bolsa y porque ha subido la tasa / del interés; porque han crecido los gastos públicos y porque en ciertas épocas recrudecen los trastornos sociales; porque prosperan o nó los agrarios; porque fluctua la desocupación; porque debe importarse oro ó exportarlo y porque se derrumba un sistema político.

El número índice ha de construirse, por de pronto, con abstracción del buen o mal uso que de él pueda hacerse; y si bien para cada finalidad podría discurrirse una serie particularmente apropiada, no puede afirmarse que exista una que sirva con igual eficacia para todos los usos. Pues las cualidades que hacen bueno al índice / para los comerciantes por reflejar la situación económica, pueden ser malas para los chacareros interesados específicamente en la situación agraria; ó en los derechos aduaneros o en el cotejo de precios del / mercado nacional con el internacional, etc.-

METODOS DE PONDERACION DE LOS NUMEROS INDICES

14.1.- La finalidad de todo Número Índice es la de representar el papel de un buen promedio de la variación de los precios, de las cantidades ó de otro tipo de magnitudes, experimentada a través del tiempo y del espacio

Si se trata de precios y no se conoce la importancia relativa de los diferentes bienes ó artículos que han de considerarse, pudiera creerse que un simple promedio constituye un índice aceptable. Pero es indudable que existe enorme diferencia en cuanto a la importancia de los bienes y para reconocerlo basta pensar en la diversidad de artículos que suelen utilizarse para construir un Número Índice de precios mayoristas ó, más sencillamente, en un Número Índice del consumo familiar: pan, café, azúcar, leche, carne, kerosene etc., y así mismo en la diversidad de las unidades de medida, litros, kilos, metros, etc..

En consecuencia, para mejorar el índice resulta necesario dar intervención a los denominados pesos ó factores de ponderación de cada uno de los bienes que han de servir para construir el índice.

El principio más adecuado para la ponderación parece ser el de utilizar números proporcionales al valor monetario de los varios bienes, representable por el producto del precio, p , de cada unidad de bien por la cantidad, q , de unidades de ese bien.

Por ejemplo, si la venta de carne en la Capital Federal alcanza a unos 400 millones de pesos anuales y la de pescado a solamente 80 millones de pesos anuales, es natural asignar a la carne un peso-6 para evitar confusión de palabras, una ponderación- 5 veces mayor que al pescado. Este es el tipo de ponderación más apropiado y serio de todos los que se han propuesto hasta ahora.

14.2.- Como todo número índice relaciona datos referentes a dos fechas (ó a dos lugares) es evidente que los pesos de una y otra fecha (ó de uno y otro lugar) serán, por lo general, diferentes.

La utilización de los mismos pesos es decir, del mismo factor de ponderación para el mismo artículo a través de los diferentes años como suele hacerse por ejemplo, con los Números Índices del consumo, es en consecuencia un simple arbitrio, nunca correcto desde el punto de vista técnico y menos aún aceptable si los cambios de valor son grandes. Puede citarse por ejemplo el consumo del carbón de leña ó el del carburo en la Capital Federal que tenía hace 20 ó mas años un valor monetario relativo al conjunto de bienes superior al de hoy a consecuencia de ser substituido por el gas, la electricidad ó el kerosene; las llantas de goma para autos, que también han variado apreciablemente en el transcurso del tiempo su importancia relativa; y lo mismo puede decirse de la vivienda a consecuencia de las sucesivas prórrogas de la ley de alquileres, etc.. Se plantea pues, al comparar niveles de precios actuales con otros de muchos años atrás, qué factores de ponderación deben utilizarse; si -

los de ahora, los de antes o alguna combinación de ambos. Diversos caminos pueden seguirse y con el mismo derecho, pero reflejarán sin duda, aspectos diferentes.

En efecto si fijamos la atención en los años 1945 y 1955 sabemos que la generalidad de los artículos han subido notablemente de precio acusando asimismo, un aumento correlativo en el valor monetario correspondiente al volumen físico anual de esos artículos, pero algunos de ellos no obstante su enorme aumento, redujeron su volumen físico en tal proporción que disminuyeron su valor monetario anual. (v.g. ciertos artículos fotográficos).

14.3.- Utilizaremos la letra q , inicial de la palabra inglesa "quantity" (cantidad) para indicar la cantidad o volumen físico de un determinado bien o artículo.

consecuentemente designaremos con $q_0, q_0', q_0'', \dots$ las cantidades de un primero, segundo, tercero y otros bienes del año o base (subíndice cero) y con $q_1, q_1', q_1'', \dots$ las cantidades correspondientes a esos mismos bienes pero en el año actual (subíndice uno). Decimos año base o actual, pero puede tratarse también de un lugar o período de tiempo diferente.

Esas cantidades pueden estar representadas por la producción total del año más las importaciones; las existencias o las ventas totales del año del bien considerado simplemente por algunas cifras proporcionales a las de esos parecidos conceptos. La importancia relativa de cada uno de los bienes o artículos se estima en algunos casos por esas cantidades q ; y en otros por el valor monetario correspondiente a esa cantidad, q , aplicándole al efecto el precio pertinente p .

Se adoptan pues, como factores de ponderación de cada uno de los bienes que se incluyen en un Número Índice de precios las cantidades del año base $q_0, q_0', q_0'', \dots$; pero la generalidad de las veces se prefiere a los valores monetarios $p_0 q_0, p_0' q_0', p_0'' q_0'', \dots$. También se adoptan como alternativa los elementos correlativos del año actual.

Quando se trata de construir un Número Índice de las cantidades o volumen físico, los factores de ponderación son los precios, p , o los valores monetarios, $p \cdot q$, también del año base o del actual.

14.4.- En el método aditivo o agregativo, la ponderación se hace únicamente mediante las cantidades q , y no con el valor monetario $p \cdot q$. Por lo tanto hay dos formas posibles de ponderación: sea con las cantidades q_0 del año base o bien con las cantidades q_1 del año actual considerado. A saber:

$$I_{ad}^{p1/0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{p_1 q_0 + p_1' q_0' + p_1'' q_0'' + \dots}{p_0 q_0 + p_0' q_0' + p_0'' q_0'' + \dots}$$

2

ad

$$I_{P1/0}^{ad} = \frac{\sum p_1 q_1 - p_1 q_1 + p_1' q_1' + p_1'' q_1'' + \dots}{\sum p_0 q_1 - p_0 q_1 + p_0' q_1' + p_0'' q_1'' + \dots}$$

La primera de las dos fórmulas, $I_{P1/0}^{ad}$ ponderando con las cantidades del año o época base utilizada por la Oficina de Trabajo de los E.E.U.U., fué propugnada en 1864 por E. Laspeyres por cuya razón se ha designado a la ponderación con elementos del año base como método de Laspeyres. El uso de dicha fórmula se extendió notablemente a raíz de los positivos argumentos que adjun-jo en su favor el eminente estadístico del gobierno australiano G.H. Knibbs.

La segunda de las fórmulas, $I_{P1/0}^{ad}$ ponderando con las cantidades de la época o año actual fué propugnada por H. Paasche en 1874 por lo que se conoce a dicho método de ponderación como método de Paasche.

En todos los demás métodos se prefiere estimar la importancia relativa de los bienes o artículos que han de comprenderse en el Número Índice, por el valor monetario de su volumen físico, es decir, por los factores de ponderación p.q.

En realidad estos métodos aditivos para construir Números Índices, podrían excluirse como tales, pues están implícitamente comprendidos en los métodos aritméticos y armónicos que hemos de tratar. En ese caso solamente debiéramos considerar las ponderaciones con los valores monetarios, p.q.

14.5.- Para el método del promedio aritmético ponderado de los precios relativos, se entiende entonces

$$I_{P1/0}^{a} = \frac{\sum p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_0} = \frac{p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0} + p_0' q_0' \frac{p_1'}{p_0} + p_0'' q_0'' \frac{p_1''}{p_0} + \dots}{p_0 q_0 + p_0' q_0' + p_0'' q_0'' + \dots}$$

$$\text{o bien } I_{P1/0}^{a_p} = \frac{\sum p_1 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_1 q_1} = \frac{p_1 q_1 \frac{p_1}{p_0} + p_1' q_1' \frac{p_1'}{p_0} + p_1'' q_1'' \frac{p_1''}{p_0} + \dots}{p_1 q_1 + p_1' q_1' + p_1'' q_1'' + \dots}$$

La ponderación con los factores del año base, $p_0 q_0$, ha sido preferentemente empleada -a la ponderación con los factores del año dado o año actual, $p_1 q_1$ - porque de esa manera se facilita el cálculo del número índice construyendo los sucesivos tér-

menos de la serie con el mismo juego de pesos utilizado para el término inicial; pero generalmente tal preferencia se debe a la dificultad que existe para determinar esos factores de ponderación. Por ejemplo, tratándose de un índice del consumo el censo, ó encuestas, de un determinado año puede dar las cifras que sirvan de punto de partida del índice, tomándolas como base; pero puede ser prácticamente imposible ó inconveniente, realizar un censo anual ó encuestas, para conseguir elementos que sirvan de base en otros años.

La Oficina del Trabajo de los E.U. ha utilizado la ponderación del año base con el método del promedio aritmético y Charles Day del Comité de Investigaciones Económicas de Harvard, ha utilizado la media geométrica para el Número Índice de la producción que lleva la denominación de su autor, Day.

La ponderación con los factores del año dado ó actual, ha sido propuesta por Palgrave con el método de las medias aritméticas.

Además de esas dos formas de ponderación existen otras dos análogas que se deducen entrecruzando los precios, p , y cantidades q , de una y otra época; y ellas son:

$$\begin{aligned}
 {}^{a_0}I_{1/0} &= \frac{\sum p_0 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_0} = \frac{p_0 q_1 \frac{p_1}{p_0} + p_0' q_1' \frac{p_1'}{p_0} + p_0'' q_1'' \frac{p_1''}{p_0} + \dots}{p_0 q_1 + p_0' q_1' + p_0'' q_1'' + \dots} \\
 {}^{a_1}I_{1/0} &= \frac{\sum p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_1 q_0} = \frac{p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0} + p_1' q_0' \frac{p_1'}{p_0} + p_1'' q_0'' \frac{p_1''}{p_0} + \dots}{p_1 q_0 + p_1' q_0' + p_1'' q_0'' + \dots}
 \end{aligned}$$

15.1 Recordando la fórmula general para el cálculo de la media geométrica.

$$\prod x^{f/\sum f} = x_1^{f/\sum f} x_2^{f/\sum f} x_3^{f/\sum f} \dots$$

tendremos aquí, como observaciones X y ponderaciones f,

$$X = \frac{p_1}{p_0}; \quad f = p_0 q_0; \quad p_0 q_1; \quad p_1 q_0; \quad p_1 q_1;$$

que nos permiten escribir las fórmulas correspondientes a los Números Índices con el método del promedio geométrico:

$${}_{00}^g P_{1/0} = \prod \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{p_0 q_0 / \sum p_0 q_0} = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{p_0 q_0 / \sum p_0 q_0} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{p_0 q_1 / \sum p_0 q_1}$$

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{p_1 q_0 / \sum p_1 q_0} \dots$$

$${}_{01}^g P_{1/0} = \prod \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{p_0 q_1 / \sum p_0 q_1}$$

$${}_{10}^g P_{1/0} = \prod \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{p_1 q_0 / \sum p_1 q_0}$$

$${}_{11}^g P_{1/0} = \prod \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{p_1 q_1 / \sum p_1 q_1}$$

y puesto que el cálculo deberá hacerse mediante logaritmos.

$$\lg {}_{00}^g P_{1/0} = \frac{\sum p_0 q_0 (\lg p_1 - \lg p_0)}{\sum p_0 q_0}$$

$$\lg {}_{01}^g P_{1/0} = \frac{\sum p_0 q_1 (\lg p_1 - \lg p_0)}{\sum p_0 q_1}$$

$$\lg {}_{10}^g P_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_0 (\lg p_1 - \lg p_0)}{\sum p_1 q_0}$$

$$\lg {}_{11}^g P_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_1 (\lg p_1 - \lg p_0)}{\sum p_1 q_1}$$

15.2. De la misma manera para la media armónica ponderada. Siendo la fórmula general.

$$M_{-1} = \left(\frac{\sum x^{-1} f}{\sum f} \right)^{-1} = \frac{\sum f}{\sum \frac{1}{x}}$$

como Números Índices de precios por el método de la media armónica escribimos:

$${}^{00}h_{P1/0} = \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_0 \frac{p_0}{p_1}}$$

$${}^{01}h_{P1/0} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_1 \frac{p_0}{p_1}}$$

$${}^{10}h_{P1/0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_1 q_0 \frac{p_0}{p_1}} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_0}$$

$${}^{11}h_{P1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_1 \frac{p_0}{p_1}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_0 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_1}$$

15-3 Debe observarse que los índices ${}^{10}h_{P1/0}$, ${}^{11}h_{P1/0}$, obtenidos con las medias armónicas coinciden con los obtenidos por el método aditivo y con dos de los del método de la media aritmética. Es decir:

$$\begin{aligned} {}^{10}h_{P1/0} &= {}^{ad}_{0}P1/0 = {}^{a}_{00}P1/0 = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \\ {}^{11}h_{P1/0} &= {}^{ad}_{1}P1/0 = {}^{a}_{01}P1/0 = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \end{aligned}$$

En cuanto a un método de la Mediana ó método del Modo, deberían determinarse, respectivamente la mediana M_e , o el modo M_o , tal como se ha indicado al tratar de los valores medios: considerando el cuadro numérico de distribución de frecuencias de precios relativos, ya que no tiene sentido asignar otros pesos a las observaciones p_1/p_0 , que las correspondientes frecuencias.

Merece también observarse que el mismo método aditivo simple puede considerarse como método de promedio aritmético ponderado de precios relativos, pero utilizando como factores de ponderación a los precios, p , pues:

$$\frac{\sum p_1}{\sum p_0} = \frac{p_1 + p_1' + p_1'' + \dots}{p_0 + p_0' + p_0'' + \dots} = \frac{p_0 \frac{p_1}{p_0} + p_0' \frac{p_1'}{p_0} + p_0'' \frac{p_1''}{p_0} + \dots}{p_0 + p_0' + p_0'' + \dots} = \frac{\sum p_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0}$$

NÚMEROS INDICES PARA EL VOLUMEN FÍSICO O CANTIDADES, DE LOS BIENES

15.4 Fácil es ahora, reconstruir las fórmulas correspondientes a los Números Índices del volumen físico o de las cantidades, de bienes o artículos.

En efecto las observaciones serán en este caso las cantidades q , o las cantidades relativas q_1/q_0 ; y para obtener los factores de ponderación deberá permutarse el papel que juega la p , por el de la q , en todas las fórmulas precedentes.

Tenemos así, las fórmulas del método agregativo o aditivo

$${}^{\text{ad}}_0 q_{1/0} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} ; \quad {}^{\text{ad}}_1 q_{1/0} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$$

Para el método del promedio aritmético:

$$\begin{aligned} {}^{\text{aa}}_0 q_{1/0} &= \frac{\sum q_0 p_0 \frac{q_1}{q_0}}{\sum q_0 p_0} ; & {}^{\text{aa}}_1 q_{1/0} &= \frac{\sum q_0 p_1 \frac{q_1}{q_0}}{\sum q_0 p_1} \\ {}^{\text{ia}}_0 q_{1/0} &= \frac{\sum q_1 p_0 \frac{q_1}{q_0}}{\sum q_1 p_0} ; & {}^{\text{ia}}_1 q_{1/0} &= \frac{\sum q_1 p_1 \frac{q_1}{q_0}}{\sum q_1 p_1} \end{aligned}$$

Para el método del promedio geométrico:

$${}^{\text{ga}}_0 q_{1/0} = \sqrt[n]{\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{q_0 p_0} / \sum q_0 p_0} ; \quad {}^{\text{ga}}_1 q_{1/0} = \sqrt[n]{\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{q_0 p_1} / \sum q_0 p_1}$$

$$10^{q_{1/0}} = \pi\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{q_1 p_0 / \sum q_1 p_0} ; \quad 11^{q_{1/0}} = \pi\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{q_1 p_1 / \sum q_1 p_1} ;$$

y para el método del promedio armónico

$$00^{h_Q}_{1/0} = \frac{\sum q_0 p_0}{\sum q_0 p_0 \frac{q_0}{q_1}} ; \quad 01^{h_Q} = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_1 \frac{q_0}{q_1}}$$

$$10^{h_Q}_{1/0} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_1 p_0 \frac{q_0}{q_1}} ; \quad 11^{h_Q} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_1 \frac{q_0}{q_1}}$$

PRUEBAS DE REVERSIBILIDAD

16.1 Como ya lo hemos apuntado no todas las fórmulas sugeridas para el cálculo de Números Índices tienen iguales méritos para representar la variación de los precios, pudiendo clasificarlas como lo hace el profesor Irving Fisher en fórmulas buenas, malas o indiferentes según que respondan a ciertas exigencias.

Entre las cualidades que Fisher reclama de la fórmula para un buen Número Índice de precios está la de servir en dos sentidos: en lo que respecta a dos bienes cualesquiera de los que han de incluirse en el índice; en lo que respecta a las dos épocas que quieran compararse, ó respecto de los dos conjuntos de elementos asociados que permiten calcular los números índices es decir, los precios y las cantidades. Se traduce esa cualidad en el hecho de que la fórmula admita la posibilidad de intercambiar dos bienes cualesquiera; dos épocas o los dos factores, precios y cantidades.

Se trata en realidad de tres cualidades diferentes que se utilizarán para probar la bondad o consistencia de las fórmulas de Números Índices. Precisando las tres pruebas aludidas, se distinguirá como:

Prueba preliminar o de reversibilidad de los bienes

Prueba primera o de reversibilidad en el tiempo, (RT);

Prueba segunda o de reversibilidad de los factores, (RF)

Toda fórmula buena para un Número Índice de precios debiera satisfacer las tres pruebas.

La prueba preliminar puede enunciarse diciendo que dos bienes, o artículos, pueden intercambiarse, sin que por ello resulte afectado el Número Índice.

La regla parece tan natural que no acostumbra formularse pues es tácita é intuitivamente observada y todas las fórmulas que hemos presentado la cumplen. No obstante podría no cumplirse con otros procedimientos. Si para construir el Número Índice se recurriera, por ejemplo a dividir en dos grupos los bienes, y para el primero se adoptara una media aritmética de sus precios y para el segundo una media geométrica y luego se promediaran esos dos promedios; también: si los bienes del primer grupo se ponderaran con un factor 2, y los del segundo grupo con un factor 1. En cualquiera de esos dos ejemplos si se intercambiara un artículo del grupo primero con otro del grupo segundo el Número Índice resultaría afectado.

Las otras dos pruebas mencionadas aun cuando similares a ésta no han sido por lo general tan bien observadas y por el contrario muchos de los índices en uso no satisfacen alguna de ellas y no hay uno solo que cumplan con la prueba segunda.

REVERSIBILIDAD EN EL TIEMPO

16.2 Así como la idea de un Número Índice lleva consigo la de un conjun

to de bienes, también implica la de dos épocas (o dos lugares). Cualquiera de las dos épocas puede elegirse como base y la prueba segunda exige que tal elección no deba afectar la comparabilidad del N.I. Mas claramente: la fórmula para calcular el Número Índice debe ser tal que la relación entre un término de comparación y otro, debe ser la misma cualquiera sea el que de ellos dos se elija como base.

Ejemplo 1945 1,00 .80

1955 1,25 1,00 . . . $P_{1/0} = 1,25 = P_{0/1} = 0,80$

Tomando como base la cifra del año 1945 (época base) se obtiene como valor del índice 1,25 en el año 1955 (época actual). Inversamente, tomando como base la cifra del año 1955, el valor del índice en 1945 se convierte en, .80.

Se tiene entonces, evidentemente, que la reversibilidad en el tiempo implica que el producto del Número Índice progresivo, $P_{1/0}$, por el Número Índice regresivo, $P_{0/1}$, valga la unidad. Es decir:

$$P_{1/0} \cdot P_{0/1} = 1$$

La razón para reclamar el cumplimiento de esa regla es doble: En primer lugar para que la relación entre los términos del N.I. sea independiente de la base elegida; y en segundo lugar por que el N.I. de cada bien particular, cumple ya esa regla. En efecto si el azúcar cuesta en 1955, cinco veces más que en 1945 ($P_{1/0} = 5$) entonces necesariamente ha costado en 1945 la $1/5$ parte de su costo en 1955. ($P_{0/1} = 1/5 = 0,20$).

16,3 La exigencia de la reversibilidad en el tiempo parece más natural si en vez de considerar dos épocas se consideran dos lugares diferentes, pues entonces no se ve razón alguna para que los resultados dependan de cuál de los dos lugares se elija como base.

Un ejemplo numérico aclarará estos conceptos. Supongamos que el precio relativo del pan en Mar del Plata es el doble del que tiene en Buenos Aires; y que el precio de la manteca en Mar del Plata es solamente la mitad del que tiene en Buenos Aires.

Tomando como base los precios de Buenos Aires se tiene

	M.I. del precio del pan $\frac{p_1}{p_0}$	M.I. del precio de la manteca $\frac{p_1'}{p_0'}$	$^a P_{1/0}$ $\frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{p_0} + \frac{p_1'}{p_0'} \right)$	$^g P_{1/0}$ $\sqrt{\frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{p_1'}{p_0'}}$	$^h P_{1/0}$ $2 / \left(\frac{p_0}{p_1} + \frac{p_0'}{p_1'} \right)$
(1) Mar del Plata	2,00	.50	1,25	1,00	.80
(0) Buenos Aires	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Observamos que el N.I. calculado con el promedio aritmético, $^a P_{1/0}$, acusa un mayor valor del 25 % en Mar del Plata, para el surtido pan-man-
teca.

Tomando inversamente, como base los precios de Buenos Aires

	N.I. del precio del pan	N.I. del precio de la manteca	$a_{p_1/0}$	$g_{p_1/0}$	$h_{p_1/0}$
(0) Mar del Plata	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
(1) Buenos Aires	.50	2,00	1,25	1,00	,80

El N.I. aritmético $a_{p_1/0}$ acusa ahora para el mismo surtido pan manteca un mayor valor del 25 % pero para Buenos Aires. Si nos fijamos en el N.I. armónico $h_{p_1/0}$ observamos que se comporta al revés que el aritmético pues dice que el mismo surtido es más barato en M. del P. y luego al cambiar de base que es más barato en Buenos Aires.

Hay por lo tanto una inconsistencia de procedimiento atribuible al tipo de promedio utilizado que no asigna la misma importancia a los aumentos relativos que a las disminuciones relativas. En cambio si se adopta el promedio geométrico se observa en el ejemplo que el N.I., $g_{p_1/0}$ no acusa variación alguna de precio en uno u otro lugar, pues el mayor precio relativo de uno de los bienes es estrictamente compensado por el menor precio relativo del otro bien.

Si en vez de operar con Números Índices de precios relativos, se lo hiciera con precios absolutos, entonces sería la media aritmética la que permitiría compensar altas y bajas por asignarles la misma importancia a las diferencias en más o menos, pero con números relativos esa propiedad se transfiere a la media geométrica.

16.4 Es fácil verificar que la media geométrica simple y con más generalidad la media geométrica ponderada (con tal de no cambiar los factores de ponderación) satisface la prueba de reversibilidad en el tiempo o de inversión de la base.

Para resaltar el hecho de que deben conservarse los mismos factores de ponderación distingamos a estos con la letra f . Se tiene entonces:

$$.1) \quad g_{f, p_1/0} = \prod \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{f/\sum f} ; \quad g_{f, p_0/1} = \prod \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{f/\sum f}$$

Luego

$$.2) \quad g_{f, p_1/0} \cdot g_{f, p_0/1} = \prod \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{f/\sum f} \cdot \prod \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{f/\sum f} = 1$$

pues cada precio, p , figura a la vez como multiplicador y como divisor.

Por otra parte, teniendo presente el caracter monótono creciente de los valores medios definidos por la expresión, en que las x y las f son números positivos.

$$m_x = \left(\frac{\sum x^x f}{\sum f} \right)^{1/x}$$

la media armónica m_{-1} , es menor que la geometría m_0 , y ésta menor que la aritmética m_1 . Por lo tanto, si se reemplazan los promedios geométricos de la (1) por los aritméticos y armónicos correlativos se tendrá, evidentemente

$$.3) \quad h_{f^{P_{1/0}}} \cdot h_{f^{P_{0/1}}} < g_{f^{P_{1/0}}} \cdot g_{f^{P_{0/1}}} = 1 < a_{f^{P_{1/0}}} \cdot a_{f^{P_{0/1}}}$$

Es decir: el producto del N.I. progresivo por el N.I. regresivo es igual a 1 si se los construye con promedios geométricos: Pero es superior a 1 si se lo hace con promedios aritméticos e inferior a 1 si con promedios armónicos. En todos los casos deberá entenderse que los factores de ponderación, f , utilizados son los mismos es decir, que no son afectados en su valor, al invertir la base.

16.5 El método aditivo simple o el ponderado con el mismo peso f , también satisface la prueba de inversión de la base, pues:

$$ad_{f^{P_{1/0}}} \cdot ad_{f^{P_{0/1}}} = \frac{\sum p_1 f}{\sum p_0 f} \cdot \frac{\sum p_0 f}{\sum p_1 f} = 1$$

Se observa además, respecto de índices construidos con media armónica y con media aritmética:

$$h_{f^{P_{1/0}}} \cdot a_{f^{P_{0/1}}} = \frac{\sum f}{\sum f \frac{p_0}{p_1}} \cdot \frac{\sum f \frac{p_0}{p_1}}{\sum f} = 1$$

$$a_{f^{P_{1/0}}} \cdot h_{f^{P_{0/1}}} = \frac{\sum f \frac{p_1}{p_0}}{\sum f} \cdot \frac{\sum f}{\sum f \frac{p_1}{p_0}} = 1$$

En consecuencia, entre el producto de índices progresivos, $f^{P_{1/0}}$, y de índices regresivos, $f^{P_{0/1}}$, armónicos y aritméticos existe la relación

$$h_{f^{P_{1/0}}} \cdot h_{f^{P_{0/1}}} = \frac{1}{a_{f^{P_{1/0}}} \cdot a_{f^{P_{0/1}}}}$$

$$\frac{h}{f} P_{1/0} \cdot \frac{h}{f} P_{0/1} \cdot \frac{a}{f} P_{1/0} \cdot \frac{a}{f} P_{0/1} = 1$$

que se complementa con señalada en el párrafo precedente.

$$\frac{h}{f} P_{1/0} \cdot \frac{h}{f} P_{0/1} < 1 < \frac{a}{f} P_{1/0} \cdot \frac{a}{f} P_{0/1}$$

REVERSIBILIDAD DE LOS FACTORES. (RF)

El valor monetario de un cierto artículo correspondiente a un año dado podemos expresarlo mediante el producto del precio por unidad, p , por la cantidad, q , de unidades consideradas en ese año. Por lo tanto si hacemos

$$v = p \cdot q \equiv \text{valor monetario de cierto artículo.}$$

un índice para reflejar la variación de un año respecto a otro lo es el cociente de valores monetarios.

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{q_1}{q_0}$$

que puede expresarse como producto del precio relativo p_1/p_0 por la cantidad relativa q_1/q_0 .

Si construimos un Número Índice para reflejar la variación de los precios de una año a otro; y otro Número Índice para reflejar la variación de las cantidades, en esos mismos dos años, parece natural esperar que multiplicando ambos números índices se obtenga el mismo resultado que si se relacionaran los valores monetarios de uno y otro año, de los bienes comprendidos en los índices. Es decir, si $P_{1/0}$ es el Número Índice de precios: $Q_{1/0}$, el Número Índice de cantidades y

$$V_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum v_1}{\sum v_0}$$

el Número Índice de los valores monetarios, la prueba de reversibilidad de los factores exige que sea.

$$P_{1/0} \cdot Q_{1/0} = V_{1/0}$$

Ninguna de las fórmulas precedentes satisface esta prueba de reversibilidad de los factores.

ERRORES SISTEMATICOS DE LAS FORMULAS PARA NUMEROS INDICES

17.1.- Atendiendo a los símbolos que hemos adoptado para caracterizar los elementos que intervienen en las fórmulas de números índices:

$p_1, p'_1, p''_1, \dots ; q_1, q'_1, q''_1, \dots ; p_0, p'_0, p''_0, \dots ; q_0, q'_0, q''_0, \dots$

hemos considerado las tres únicas pruebas de reversibilidad posibles: la de los bienes (permutación de tildes); la del tiempo (cambio de base, permutación de los subíndices 0 y 1) y la de los factores (permutación de las letras p y q). Las pruebas de reversibilidad consisten prácticamente en permutar tildes o subíndices o letras sin que se produzcan inconsistencias. De estas tres pruebas, solamente las dos últimas merecen especial consideración por lo que siguiendo a Fisher, las denominaremos pruebas mayores de reversibilidad (great reversal tests) y según hemos visto consisten en lo siguiente:

Prueba 1ra: De reversibilidad en el tiempo, (RT) se cumple cuando el producto del N.I. progresivo por el N.I. regresivo es igual a la unidad.

Prueba 2da: De reversibilidad de los factores (RF) se cumple cuando el producto del N.I. de precios por el N.I. de las cantidades es igual al N.I. de valores monetarios.

Con símbolos algebraicos escribimos para las dos pruebas:

$$1ra. (RT) : P_{1/0} \cdot P_{0/1} = 1$$

$$2da. (RF) : P_{1/0} \cdot Q_{1/0} = V_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

siendo $P_{0/1}$ el resultado de permutar los índices 1 y 0, en la fórmula representada por $P_{1/0}$ y $Q_{1/0}$ el resultado de permutar la p por la q en la misma fórmula $P_{1/0}$, aludida.

17.2. Si la prueba 1ra. (RT) no da igual a 1, la diferencia se considera como un error conjunto atribuible tanto al N.I. progresivo como al N.I. regresivo; y análogamente, si la prueba 2da. (RF) no da igual al cociente de los valores monetarios $V_{1/0}$, la diferencia se considera como error conjunto atribuible a los N.I. de precios y N.I. de cantidades.

Ocorre que según se utilice uno u otro tipo de promedio para la construcción del N.I. las pruebas suelen arrojar un valor que necesariamente supera o no supera los resultados que prefijan. En ese caso, el error que introducen esos promedios se denomina: error sistemático por el hecho de producirse siempre en el mismo sentido.

Cuando no fuera así, es decir, cuando no pudiera prefijarse el sentido del error, la diferencia, o mejor dicho el desvío puede calificarse de errático o casual.

Ya hemos visto (16.4.3) como algunos tipos de promedio introducen error sistemático, los aritméticos por exceso y los armónicos por defecto según resulta de las desigualdades:

$$f^{P_{1/0}} \cdot f^{P_{0/1}} < 1 < f^{a_{1/0}} \cdot f^{a_{0/1}}$$

Si bien no es posible decir en cada caso a cuanto asciende el error o desvío de la fórmula progresiva $P_{1/0}$, y a cuanto el de la regresiva $P_{0/1}$, a falta de razones para acusar a una mejor que a otra se considera que el error es atribuible por igual a las dos.

Como es lógico los factores de ponderación para los diferentes tipos de promedios son siempre los mismos; y dentro de esa condición la necesaria tendencia de los N.I. aritméticos a ser más elevados, o por exceso - y respectivamente los N.I. armónicos más bajos o por defecto - es independiente del sistema de pesos utilizado.

17.3.- Existe otra clase de error sistemático inherente al sistema de ponderación utilizado que afecta a todas las fórmulas descriptas, excepto a las de tipo aditivo o agregativas. Es decir, afecta a todas las fórmulas ponderadas con los valores monetarios, p, q ; pues las aditivas lo son, únicamente, con cantidades q .

Para ilustrar el error de ponderación podemos tomar el Número Índice geométrico del cual sabemos que - bajo un mismo sistema de ponderación - satisface la prueba de inversión de la base (prueba Ira.), es decir, designando con f , los factores de ponderación

$$f^{P_{1/0}} \cdot f^{P_{0/1}} = \prod \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{f/\sum f} \cdot \prod \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{f/\sum f} = 1$$

Si tenemos presente que los pesos f se forman con el producto de precios p , por cantidades q , afectados con los subíndices 0 ó 1, según sean elementos del año o época, base o de la época actual, los efectos de la inversión de la base al permutar así mismo los subíndices de los pesos, dependen de cual de los cuatro tipos siguientes se utilice

- | | | |
|-----|-----------|--|
| I | $p_0 q_0$ | , sistema de ponderación de la <u>época base</u> o de <u>Laspeyres</u> |
| II | $p_0 q_1$ | |
| III | $p_1 q_0$ | |
| IV | $p_1 q_1$ | , sistema de ponderación de la <u>época actual</u> o de <u>Paasche</u> . |

habiendo asignado un número romano a cada uno de los tipos de ponderación tal como lo hacen Fisher y otros autores que lo siguen.

17.4.- Para resaltar los efectos del cambio de ponderación, recordemos primeramente la coincidencia de ciertos N.I. de los métodos armónico, aditivo y aritmético.

$$\frac{\sum p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_1 q_0 \frac{p_0}{p_1}}$$

igualdades que, con los símbolos ya utilizados se expresan

$$.1 \quad a_{P-}^{00} = ad_{P-}^{00} = h_{P-}^{10}$$

Análogamente se tiene,

$$.2 \quad a_{P-}^{01} = ad_{P-}^{01} = h_{P-}^{11}$$

En consecuencia, puesto que las medias armónicas, son inferiores a las geométricas y estas a las aritméticas (calculadas todas con los mismos factores de ponderación) puede escribirse para los Números Índices Progresivos

$$.3 \quad h_{P-}^{00} < g_{P-}^{00} < a_{P-}^{00} = ad_{P-}^{00} = h_{P-}^{10} < g_{P-}^{10} < a_{P-}^{10}$$

$$.4 \quad h_{P-}^{01} < g_{P-}^{01} < a_{P-}^{01} = ad_{P-}^{01} = h_{P-}^{11} < g_{P-}^{11} < a_{P-}^{11}$$

Para obtener las desigualdades correspondientes a los Números Índices regresivos, basta invertir la base, es decir, permutar el subíndice, 0 por el subíndice, 1. Será entonces:

$$.5 \quad h_{P-}^{10} < g_{P-}^{10} < a_{P-}^{10} = ad_{P-}^{10} = h_{P-}^{00} < g_{P-}^{00} < a_{P-}^{00}$$

$$.6 \quad h_{P-}^{11} < g_{P-}^{11} < a_{P-}^{11} = ad_{P-}^{11} = h_{P-}^{01} < g_{P-}^{01} < a_{P-}^{01}$$

Se observa en estas desigualdades que los Números Índices progresivos ponderados con el sistema I es decir con factores p_0, q_0 del año o de la época base, son necesariamente inferiores a los ponderados con el sistema III, factores p_0, q_1 ; y también que los ponderados con el sistema II, factores p_1, q_0 , son necesariamente inferiores a los ponderados con el sistema IV, factores p_1, q_1 , del año actual. A la inversa ocurre con los N.I. regresivos.

Que la ponderación I($p_0 q_0$) dé resultados inferiores a la III($p_1 q_0$), y que la II ($p_0 q_1$) inferior a la IV ($p_1 q_1$) no es necesario pero si muy probable(según Fisher) como veremos.-

18.1 Para complementar la información referente al error sistemático de las varias fórmulas de números índices mencionadas, recurriremos a una desigualdad entre valores medios que lleva el nombre de B. Jensen y es una generalización de otra del matemático Tchebycheff.

La enunciamos así: Dados los tres juegos de números positivos constituidos v.g. por las observaciones $x_1, x_2, \dots, x_n$; por un primer sistema de pesos, $y_1, y_2, \dots, y_n$; y por otro segundo sistema de pesos $z_1, z_2, \dots, z_n$; se cumple la desigualdad.

$$.1 \quad \frac{\sum x_r y_r}{\sum y_r} \leq \frac{\sum x_s z_s}{\sum z_s} \quad \text{si es, } 0 \leq (x_s - x_r) \left(\frac{z_s}{y_s} - \frac{z_r}{y_r} \right)$$

La desigualdad tiene el sentido $\leq$ menor o igual a la diferencia $x_s - x_r$, le corresponde una diferencia del mismo signo, entre los cocientes z/y de los pesos correlativos.

Simbolizando como es costumbre anteponiendo la letra griega Δ para expresar incrementos, v.g.

$$.2 \quad \Delta x = x_s - x_r \quad ; \quad \Delta \frac{z}{y} = \frac{z_s}{y_s} - \frac{z_r}{y_r}$$

la condición para que la desigualdad (.1) se cumpla en el sentido indicado es que el producto del incremento de los valores de x , por el incremento correlativo de los valores, z/y dé como resultado un número positivo o cero, es decir

$$.3 \quad 0 \leq \Delta x \cdot \Delta \frac{z}{y}$$

La propiedad resulta del hecho de que la desigualdad (.1) eliminando denominadores y reuniendo todos términos en un mismo miembro se transforma en esta otra.

$$0 \leq \sum_r \sum_s y_s y_r \left(\frac{z_s}{y_s} - \frac{z_r}{y_r} \right) (x_s - x_r) = \sum_r \sum_s y_s y_r \left(\Delta \frac{z}{y} \right) (\Delta x)$$

que por ser y_s e y_r positivos, pone en evidencia que el signo de la desigualdad depende del signo del producto de incrementos (.3).

Evidentemente si la (.3) resultara negativa el sentido de la desigualdad (.1) se invertiría.

18.2.- Una aplicación simple de la desigualdad de Lensen permite establecer que por ejemplo, es

$$\frac{\sum p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_0} \leq \frac{\sum p_1 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_1 q_1} \text{ si } 0 \leq \left(\Delta \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right) = \Delta$$

es decir, si el incremento de los valores monetarios relativos, y el incremento de los precios relativos pertinentes, es del mismo sentido. La desigualdad se invierte, evidentemente, si el sentido de ambos incrementos es contrario. Como en la mayor parte de los casos el aumento de precios unitarios apareja un aumento de valores monetarios, la ponderación con factores del sistema I ($p_0 q_0$) es decir con elementos del año base dará N.I. inferiores a los ponderados con elementos del año actual, o sistema IV ($p_1 q_1$).

De la misma manera para comparar los efectos de ponderar con el sistema II ($p_0 q_1$) y con III ($p_1 q_0$). Se tiene

$$\frac{\sum p_0 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_1} \leq \frac{\sum p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_1 q_0} \text{ si } 0 \leq \left(\Delta \frac{p_1 q_0}{p_0 q_1} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right) = 1$$

Y para I ($p_0 q_0$) con II ($p_0 q_1$)

$$\frac{\sum p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_0} \leq \frac{\sum p_0 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0 q_1} \text{ si } 0 \leq \left(\Delta \frac{q_1}{q_0} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right)$$

Para III ($p_1 q_0$) con IV ($p_1 q_1$)

$$\frac{\sum p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_1 q_0} \leq \frac{\sum p_1 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_1 q_1} \text{ si } 0 \leq \left(\Delta \frac{q_1}{q_0} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right)$$

Para I ($p_0 q_0$) con III ($p_1 q_0$) y II ($p_0 q_1$) con IV ($p_1 q_1$), la condición de que los primeros I y II no excedan a los respectivos segundos III y IV es $0 \leq \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right)$ lo cual es necesariamente cierto.

18.3.- Podemos resumir las conclusiones referentes al error sistemático que introducen los diferentes métodos de ponderación mencionados,

en los N.I. construídos con medias aritméticas de la manera siguiente:
se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} I (p_0 q_0) < II (p_0 q_1) \\ III (p_1 q_0) < IV (p_1 q_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Si es } 0 \leq \\ \left(\Delta \frac{q_1}{q_0} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right) \end{array} \text{ es decir } \left\{ \begin{array}{l} \text{Cuando varían en el mis} \\ \text{mo sentido.} \\ \text{Precios relativos y can} \\ \text{tidades relativas.} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} I (p_0 q_0) < III (p_1 q_0) \\ II (p_0 q_1) < IV (p_1 q_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Si es } 0 \leq \\ \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right) = \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right)^2 \end{array} \text{ es decir: } \underline{\text{En todos los casos.}}$$

$$I (p_0 q_0) < IV (p_1 q_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si es } 0 \leq \\ \left(\Delta \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right) \end{array} \right. \text{ es decir } \left\{ \begin{array}{l} \text{Cuando varían en el mis} \\ \text{mo sentido.} \\ \text{Valores monetarios, re-} \\ \text{lativos y precios rela} \\ \text{tivos.} \end{array} \right.$$

$$II (p_0 q_1) < III (p_1 q_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si es } 0 \leq \\ \left(\Delta \frac{p_1 / q_0}{q_1 / q_0} \right) \left(\Delta \frac{p_1}{p_0} \right) \end{array} \right. \text{ es decir } \left\{ \begin{array}{l} \text{Cuando varían en el} \\ \text{mismo sentido; co-} \\ \text{eficiente de precios re} \\ \text{lativos sobre canti-} \\ \text{dades relativas y pre} \\ \text{cios relativos.} \end{array} \right.$$

Las desigualdades se invierten evidentemente si las varia-
ciones se producen en sentido contrario al señalado

18.4.- Multiplicando miembro a miembro, ordenadamente, las desigualda-
des correspondientes a los N.I. progresivos (17.4.3.), (17.4.4.) por
las de los N.I. regresivos (17.4.5.), (17.4.6.) que se obtienen al in-
vertir la base, se obtiene.

$$\begin{array}{l} \frac{h_p}{00^1/0} \frac{h_p}{11^0/1} < \frac{g_p}{00^1/0} \frac{g_p}{11^0/1} < \frac{a_p}{00^1/0} \frac{a_p}{11^0/1} = \frac{ad_p}{0^1/0} \frac{ad_p}{1^0/1} = \\ = \frac{h_p}{10^1/0} \frac{h_p}{01^0/1} < \frac{g_p}{10^1/0} \frac{g_p}{01^0/1} < \frac{a_p}{10^1/0} \frac{a_p}{01^0/1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{h_p}{01^1/0} \frac{h_p}{10^0/1} < \frac{g_p}{01^1/0} \frac{g_p}{10^0/1} < \frac{a_p}{01^1/0} \frac{a_p}{10^0/1} = \frac{ad_p}{1^1/0} \frac{ad_p}{0^0/1} = \\ = \frac{h_p}{11^1/0} \frac{h_p}{00^0/1} < \frac{g_p}{11^1/0} \frac{g_p}{00^0/1} < \frac{a_p}{11^1/0} \frac{a_p}{00^0/1} \end{array}$$

10. Logamente, multiplicando (16.3.3) por (16.3.5) y (16.3.4) por (16.3.5)

$$\begin{aligned} \frac{h_{P1/0}}{10^{P1/0}} & \frac{h_{P0/1}}{10^{P0/1}} < \frac{g_{P1/0}}{00^{P1/0}} \frac{g_{P0/1}}{10^{P0/1}} < \frac{a_{P1/0}}{00^{P1/0}} \frac{a_{P0/1}}{10^{P0/1}} = 1 = \\ & = \frac{h_{P1/0}}{10^{P1/0}} \frac{h_{P0/1}}{00^{P0/1}} < \frac{g_{P1/0}}{10^{P1/0}} \frac{g_{P0/1}}{00^{P0/1}} < \frac{a_{P1/0}}{10^{P1/0}} \frac{a_{P0/1}}{00^{P0/1}} \end{aligned}$$

$$\frac{h_{P1/0}}{01^{P1/0}} \frac{h_{P0/1}}{11^{P0/1}} < \frac{g_{P1/0}}{01^{P1/0}} \frac{g_{P0/1}}{11^{P0/1}} < \frac{a_{P1/0}}{01^{P1/0}} \frac{a_{P0/1}}{11^{P0/1}} = 1 =$$

$$= \frac{h_{P1/0}}{11^{P1/0}} \frac{h_{P0/1}}{01^{P0/1}} < \frac{g_{P1/0}}{11^{P1/0}} \frac{g_{P0/1}}{01^{P0/1}} < \frac{a_{P1/0}}{11^{P1/0}} \frac{a_{P0/1}}{01^{P0/1}}$$

pues

$$1 = \frac{a_{P1/0}}{0^{P1/0}} \frac{a_{P0/1}}{0^{P0/1}} = \frac{a_{P1/0}}{1^{P1/0}} \frac{a_{P0/1}}{1^{P0/1}}$$

o sea

$$1 = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

Se observa así- fijándonos en los pesos de los N.I. progresivos- como la ponderación con pesos I($p_0 q_0$) y II($p_0 q_1$) dan un error conjunto inferior a la de los pesos III($p_1 q_0$) y IV($p_1 q_1$). Resulta de ahí que con los sistemas III y IV los precios relativos altos reciben un mayor peso y el N.I. aparece dominado por ellos, es decir, tiende a ser más alto; o bien si se prefiere, que con los sistemas I y II los precios relativos más bajos reciben un mayor peso dominando en consecuencia al promedio, es decir, lo aminoran.

De aquí que digamos que el error de ponderación es positivo con los sistemas III y IV y negativo con los I y II. Luego, en un N.I. de precios el elemento precio en la ponderación tiene mucha más influencia en el resultado que el elemento cantidad. Claro está que con los N.I. de las cantidades o del volumen físico, ocurre al revés, es el elemento cantidad, el que más influye en la ponderación.

18.5.- Considerando entonces las dos clases de error sistemático pueden distinguirse las fórmulas de Números Índices progresivos atendiendo a que el error de ponderación y el error del tipo de promedio se superpongan y se manifiesten o no en el mismo sentido.

El profesor Irving Fisher ilustra la cuestión mediante un gráfico, representando a los diversos N.I., que parten de una misma base y divergen en la época actual, al cual denomina "tenedor de 5 dientes" o si se quiere, "pentadente". Asigne a cada uno de los dientes un juego de fórmulas; por ejemplo:

→ 1ro. Con desvío <u>doble</u> y positivo	:	$\begin{matrix} a_p & a_p \\ 10 & 11 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & + & + & + \\ AIII, AIV \end{matrix}$
→ 2do. " " <u>simple</u> "	:	$\begin{matrix} g_p & g_p \\ 10 & 11 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & + \\ GIII, GIV \end{matrix}$
→ 3ro. " " <u>incierto</u> o com- pensado :		$\begin{matrix} a_p & a_p & h_p & h_p \\ 00 & 01 & 10 & 11 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & - & + & - & + & + \\ AI, AII, HIII, \\ HIV \end{matrix}$
→ 4to. Con desvío <u>simple</u> y negati- vo :		$\begin{matrix} g_p & g_p \\ 00 & 01 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \bar{G}I, \bar{G}II \end{matrix}$
→ 5to. Con desvío <u>doble</u> y negati- vo :		$\begin{matrix} h_p & h_p \\ 00 & 01 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \bar{H}I, \bar{H}II \end{matrix}$

donde se designan con A al método aritmético; G, al geométrico; H al armónico; y como anteriormente distinguiendo la ponderación, $p_0 q_0$; $p_0 q_1$; $p_1 q_0$; $p_1 q_1$; respectivamente con los números romanos I, II, III, IV.

FORMULAS ANTITETICAS

19.1 El concepto de reversibilidad utilizado como prueba de las diferentes fórmulas de números índices, sirve para construir nuevas fórmulas, que son en cierto modo la antítesis de las primitivas, por lo cual reciben el nombre de fórmulas antitéticas.

Se distingue entre las fórmulas antitéticas respecto del tiempo, obtenidas mediante la aplicación de la prueba 1ra.; de las fórmulas antitéticas respecto de los factores p y q, que resultan de aplicar la prueba 2da.

Es evidente que si una fórmula satisface las pruebas 1ra. (RT) basta conocer uno de los dos N.I., el progresivo o el regresivo) para que quede determinado el otro, pues ambos están ligados por la relación

$$P_{1/0} \cdot P_{0/1} = 1 \quad \cdot \quad P_{1/0} = 1 / P_{0/1}$$

Se tendrían pues dos caminos para obtener el índice $P_{1/0}$, por de pronto el camino directo y además el indirecto que consistiría en calcular la inversa del regresivo, $1/P_{0/1}$, que coincide con el N.I. anterior.

Análogamente si una fórmula satisface la prueba 2da. (RF) se tiene por ejemplo

$$P_{1/0} \cdot Q_{1/0} = V_{1/0} \quad \cdot \quad P_{1/0} = V_{1/0} / Q_{1/0}$$

que el N.I. progresivo de precios por el N.I. progresivo de cantidades iguales al N.I. progresivo de valores monetarios. Se tendrían también aquí dos caminos para calcular el número índice $P_{1/0}$; el camino directo, aplicando la fórmula correspondiente y el indirecto que exigiría en cálculo del N.I. monetario $V_{1/0}$ y el del N.I. de cantidades $Q_{1/0}$, para obtener el cociente $V_{1/0} / Q_{1/0}$ que coincide también con el N.I. directo.

Pero claro está que si no se satisfacen las pruebas se tienen números índices directos y números índices indirectos que no coinciden. De aquí la denominación de antitéticos. Por ejemplo:

$$P_{1/0} \neq \frac{1}{P_{0/1}} \quad ; \quad P_{0/1} \neq \frac{1}{P_{1/0}}$$

$$P_{1/0} \neq \frac{V_{1/0}}{Q_{1/0}} \quad ; \quad P_{0/1} \neq \frac{V_{0/1}}{Q_{0/1}}$$

1º Permutando los subíndices que simbolizan las épocas o el tiempo (inversión de la época base y la época actual)

2º Tomando la recíproca del resultado anterior.

Ejemplo: Partiendo de la fórmula del N.I. aritmético.

$$10^{ap} 1/0 = \frac{\sum p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_1 q_0}$$

la 1ª. operación al permutar los subíndices 0 y 1 da

$$\frac{\sum p_0 q_1 \frac{p_0}{p_1}}{\sum p_0 q_1} = 01^{ap} 0/1$$

y la 2da operación, de tomar la recíproca.

$$\frac{1}{01^{ap} 0/1} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_1 \frac{p_0}{p_1}} = 01^{hp} 1/0$$

Se obtienen pues como antitéticas: a la fórmula del promedio aritmético $10^{ap} 1/0$. Y a la del promedio armónico, $01^{hp} 1/0$. Evidentemente no coinciden en este caso las dos fórmulas.

Debe tenerse presente que un N.I. de precios es un promedio de precios relativos, p_1/p_0 ; la permutación de los subíndices implica permutar las épocas base y actual obteniéndose entonces un N.I. que representa a p_0/p_1 , y el efecto de esa permutación de subíndices se vuelve a compensar si tomamos la recíproca pues tendríamos nuevamente representado al cociente primitivo p_1/p_0 .

19/2 Es fácil, entonces dar las expresiones de fórmulas antitéticas respecto del tiempo, pues representando a una de ellas simplemente por $P_1/0$, su antitético es $1/P_0/1$; y reciprocamente dada $P_0/1$ su antitético es $1/P_1/0$.

Son pues antitéticas respecto del tiempo, (AT) las formulas siguientes:

$$10^{ap} 1/0 \text{ es (AT) de } \frac{1}{01^{ap} 0/1} = 01^{hp} 1/0$$

$$00^{ap} 1/0 \quad " \quad \frac{1}{11^{ap} 0/1} = 11^{hp}$$

$$01^{ap} 1/0 \quad \text{es(AT)} \quad \text{de} \frac{1}{10^{adp} 0/1} = 10^{hp} 1/0$$

$$10^{ap} 1/0 \quad " \quad \frac{1}{01^{ap} 0/1} = 01^{hp} 1/0$$

$$11^{ap} 1/0 \quad " \quad \frac{1}{00^{ap} 0/1} = 00^{hp} 1/0$$

$$00^{gp} 1/0 \quad " \quad \frac{1}{11^{gp} 0/1} = 11^{gp} 1/0$$

$$01^{gp} 1/0 \quad " \quad \frac{1}{10^{gp} 0/1} = 10^{gp} 1/0$$

$$10^{gp} 1/0 \quad " \quad \frac{1}{01^{gp} 0/1} = 01^{gp} 1/0$$

$$11^{gp} 1/0 \quad " \quad \frac{1}{00^{gp} 0/1} = 00^{gp} 1/0$$

Podemos sintetizar el detalle precedente escribiendo

$$01^{adp} \quad \text{es (AT)} \quad \text{de} \quad 11^{adp}$$

$$rs^{ap} 1/0 \quad " \quad sr^{hp} 1/0$$

$$rs^{gp} 1/0 \quad " \quad sr^{gp} 1/0$$

donde r y s pueden tomar los valores 0 y 1, según sean los subíndices de los factores de ponderación, p_r , q_s .

Se observa en el cuadro que los N.I. aritméticos tienen como antitéticos a N.I. armónicos y recíprocamente; en tanto que los aditivos y geométricos, los tienen del mismo tipo; pero en todos los casos se permutan los subíndices de los factores, p y q .

ANTITETICOS RESPECTO DE LOS FACTORES (AF)

19.4 La prueba 2da. de reversión de los factores p y q permite agregar nuevas fórmulas al repertorio anterior.

Las antitéticas respecto de los factores (AF), precio p y cantidad q , se encuentran mediante las dos operaciones siguientes

1º.- Permutar la p por la q , sin alterar los otros elementos de la fórmula

2º.- Dividir el índice del valor monetario $V_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ por el resultado anterior.

Ejemplo:

$$\frac{\sum p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\sum p_1 q_0} \cdot \frac{\sum q_1 p_0 \frac{q_1}{q_0}}{\sum q_1 p_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum q_1 p_0 \frac{q_1}{p_0}}{\sum q_1 p_0}$$

Con los símbolos ya adoptados, expresamos esas dos operaciones a partir de la fórmula original

$$10 \frac{a_p}{1/0} \cdot 10 \frac{a_q}{1/0} = V_{1/0} \cdot 10 \frac{a_q}{1/0}$$

Evidentemente al sustituir la p por la q -precios por cantidades- transformamos la fórmula del N.I. de precios en otra de un N.I. de cantidades, y puesto que la prueba 2da. de reversión de factores p y q , consiste en que multiplicando el N.I. de precios por el correlativo N.I. de cantidades como resultado el N.I. de valores monetarios, se desprende que, la 2da. operación dividir el índice de valores monetarios por el índice de cantidades representa a un índice de precios.

Designando simplemente con $P_{1/0}$ al N.I. de precios se tiene entonces como antitético respecto de los factores a $V_{1/0} / Q_{1/0}$, siendo $Q_{1/0}$ el resultado de permutar los precios p por las cantidades q , en la fórmula original $P_{1/0}$. Como los subíndices no cambian basta escribir con abstracción de ellos y del tipo de promedio.

P es antitética respecto de los factores de V/Q
o más brevemente P es (AF) de V/Q .

19.5 Son pues antitéticas respecto de los factores p y q , (AF), las fórmulas siguientes:

$${}^{\text{ad}}_0 p_{1/0}, \text{ es (AF) de } \frac{V_{1/0}}{{}^{\text{ad}}_0 q_{1/0}} \quad \text{o sea, } \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}, \text{ es (AF) de, } \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{1}{1}.$$

$$\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

$${}^{00} a_{p1/0}, \text{ es (AF) de } \frac{V_{1/0}}{{}^{00} a_{q1/0}} = V_{1/0} \cdot {}^{00} h_{q0/1};$$

$${}^{00} h_{p1/0}, \text{ es (AF) de, } \frac{V_{1/0}}{{}^{00} h_{q1/0}} = V_{1/0} \cdot {}^{00} a_{q0/1}$$

$${}^{01} a_{p1/0}, \text{ es (AF) de } \frac{V_{1/0}}{{}^{01} a_{q1/0}} = V_{1/0} \cdot {}^{01} h_{q0/1};$$

$${}^{01} h_{p1/0}, \text{ es (AF) de } \frac{V_{1/0}}{{}^{01} q_{1/0}} = V_{1/0} \cdot {}^{01} a_{q0/1}$$

$${}^{10} a_{p1/0}, \text{ es (AF) de } \frac{V_{1/0}}{{}^{10} a_{q1/0}} = V_{1/0} \cdot {}^{10} h_{q0/1};$$

$${}^{10} h_{p1/0}, \text{ es (AF) de } \frac{V_{1/0}}{{}^{10} q_{1/0}} = V_{1/0} \cdot {}^{10} a_{q0/1}$$

$${}^{11} a_{p1/0}, \text{ es (AF) de } \frac{V_{1/0}}{{}^{11} a_{q1/0}} = V_{1/0} \cdot {}^{11} h_{q0/1};$$

$${}^{11} h_{p1/0}, \text{ es (AF) de } \frac{V_{1/0}}{{}^{11} q_{1/0}} = V_{1/0} \cdot {}^{11} a_{q0/1}$$

$$00^{g_P} 1/0, \text{ es (AF) de, } \frac{V_{1/0}}{00^{g_Q} 1/0} = V_{1/0} \cdot 00^{g_Q} 0/1 ;$$

$$10^{g_P} 1/0, \text{ es (AF) de, } \frac{V_{1/0}}{10^{g_Q} 1/0} = V_{1/0} \cdot 10^{g_Q} 0/1$$

$$01^{g_P} 1/0, \text{ es (AF) de, } \frac{V_{1/0}}{01^{g_Q} 1/0} = V_{1/0} \cdot 01^{g_Q} 0/1 ;$$

$$11^{g_P} 1/0, \text{ es (AF) de, } \frac{V_{1/0}}{11^{g_Q} 1/0} = V_{1/0} \cdot 11^{g_Q} 0/1$$

Haciendo abstracción de los factores de ponderación, que no cambian el pasar de una fórmula a su antitética, simplificamos el detalle precedente escribiendo:

$$ad_{f^P} 1/0 \text{ es (AF) de } V_{1/0} \cdot ad_{f^Q} 0/1$$

$$ap_{f^P} 1/0 \text{ es (AF) de } V_{1/0} \cdot h_{f^Q} 0/1$$

$$g_{f^P} 1/0 \text{ es (AF) de } V_{1/0} \cdot g_{f^Q} 0/1$$

$$h_{f^P} 1/0 \text{ es (AF) de } V_{1/0} \cdot a_{f^Q} 0/1$$

De todas las fórmulas señaladas merecen especial consideración las aditivas que coinciden con dos de las aritméticas y armónicas:

$$00^{a_P} 1/0 = 10^{h_P} 1/0 = 0^{ad_P} 1/0 = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

fórmula ésta que tiene como antitética respecto de los factores p y q , a :

$$01^{a_P} 1/0 = 11^{h_P} 1/0 = 1^{ad_P} 1/0 = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

RECTIFICACION DE FORMULAS:

20.1.- Con las pruebas de reversión se han alcanzado dos importantes resultados. En primer lugar saber cuales fórmulas satisfacen esas pruebas: la de la media geométrica, la mediana, el modo y la aditiva satisfacen la prueba 1ra. o de inversión de la base y ninguna de las fórmulas a la prueba 2da. de inversión de los factores p y q. En segundo lugar se han obtenido mediante la prueba 1ra. las antitéticas respecto del tiempo o de la inversión de la base, y mediante la prueba 2da., las antitéticas respecto de la inversión de los factores p y q.

Ahora nos ocuparemos de una tercera aplicación de esas pruebas: la de rectificar las fórmulas es decir, obtener de cada una de las fórmulas que no satisfacen una de las pruebas otra fórmula que la satisfice.

Esto se consigue fácilmente llevando a cabo un cruzamiento, es decir promediando dos fórmulas antitéticas. Si una fórmula dada no satisface la prueba 1ra., -inversión de la base- su antitética respecto al tiempo, tampoco la satisface; pero ambas fallan como si estuvieran en sentido opuesto de modo que "cruzándolas", -tomando un promedio geométrico- se tendrá una fórmula que verificará la prueba. Esto será cierto en cualquier caso, sea que las fórmulas cruzadas sean de medias aritméticas, geométricas, armónicas, mediana, modo ó aditivas.

Si el cruzamiento se hace mediante un promedio geométrico de las fórmulas antitéticas, la fórmula resultante verificará la prueba pero si se hace mediante un promedio aritmético o armónico, no ocurre lo mismo.

Con el simple artificio del cruzamiento geométrico, se puede rectificar, entonces, cualquier fórmula para conseguir que se verifique sea una o ambas pruebas de inversión.

Así, considerando la media aritmética simple $\frac{1}{N} \sum$ p_1/p_0 , su antitética respecto del tiempo es la media armónica $N/\sum p_0/p_1$. Ninguna de esas fórmulas satisface la prueba 1ra. de inversión de la base. Pero la falla de una en un sentido es exactamente correspondida por la falla de la otra en sentido opuesto y se observa que la del cruzamiento geométrico $\sqrt{(\sum p_1/p_0)(\sum p_0/p_1)}$, satisface la prueba.

20.2.- Si $P_{1/0}$ representa a una fórmula de las señaladas para los Números Índices de precios de la época 1 respecto de la época 0, su antitética respecto del tiempo es $1/P_{0/1}$. Por lo tanto la fórmula obtenida mediante el cruzamiento geométrico, se expresa

$$\sqrt{\frac{P_{1/0}}{P_{0/1}}}$$

Que verifica la prueba 1ra. de inversión de la base se ve fácilmente pues la permutación de los subíndices convierte esa fórmula en

$$\sqrt{\frac{P_{0/1}}{P_{1/0}}}$$

y multiplicando ambas da como resultado la unidad, tal como lo requiere la prueba

$$\sqrt{\frac{P_{1/0}}{P_{0/1}}} \sqrt{\frac{P_{0/1}}{P_{1/0}}} = 1$$

En particular cruzando las fórmulas antitéticas aditivas se tiene

$$\sqrt{\frac{ad_{P_{1/0}}}{ad_{P_{1/0}}}, \frac{ad_{P_{1/0}}}{ad_{P_{1/0}}}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}}$$

Esta es la fórmula que Fisher denomina ideal, y viene a ser un promedio geométrico de la fórmula de Laspeyres (ponderación con elementos de la época base) y de la fórmula de Paasche (ponderación con elementos de la época actual).

20.3. Veamos ahora la rectificación correspondiente a la prueba 2da. (de inversión de los factores p y q) mediante un cruzamiento geométrico de las fórmulas antitéticas respecto de los factores p y q.

Se tiene como en el caso anterior si $P_{1/0}$ representa al número índice original, que $V_{1/0}/Q_{1/0}$ es la correspondiente antitética. Por lo tanto la fórmula obtenida con el cruzamiento geométrico de ambas da el índice de precios.

$$\sqrt{\frac{P_{1/0} V_{1/0}}{Q_{1/0}}}$$

el cual satisface la prueba 2da. En efecto, al permutar los factores p (precios) y q (cantidad) se transforma el índice de precios $P_{1/0}$ en el índice de cantidades $Q_{1/0}$; y viceversa, obteniéndose en consecuencia este índice de cantidades.

$$\sqrt{\frac{Q_{1/0} V_{1/0}}{P_{1/0}}}$$

En consecuencia el producto de ambos índices da como resultado el del índice del valor monetario $V_{1/0}$ que exige la prueba 2da.

$$\sqrt{\frac{P_{1/0} V_{1/0}}{Q_{1/0}}} \sqrt{\frac{Q_{1/0} V_{1/0}}{P_{1/0}}} = V_{1/0}$$

Entre todas las fórmulas analizadas merece especial consideración las aditivas antitéticas respecto de los factores que al cruzarlas geométricamente dan:

$$\sqrt{\frac{ad_{p \sim 0}^{1/0}}{ad_{0 \sim 1/0}^{1/0}}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

también la fórmula ideal de Fisher.

20.4.- Con el proceso del cruzamiento geométrico de fórmulas antitéticas se aumenta el número de fórmulas disponibles para el cálculo de Números Índices que Fisher denomina primarias pues las utiliza para hallar otras.

El cruce de fórmulas antitéticas respecto del tiempo da fórmulas reversibles respecto del tiempo, es decir que satisfacen la prueba lra. Por ejemplo, siendo antitéticas respecto del tiempo

$$ad_{00}^{ap \sim 1/0} \quad y \quad ad_{11}^{ap \sim 0/1} \quad \text{se tiene}$$

$$.1 \quad \sqrt{\frac{ad_{00}^{ap \sim 1/0}}{ad_{11}^{ap \sim 0/1}}} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0} \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \sum p_1 q_1 \frac{p_0}{p_1}}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

y análogamente con las medias geométricas antitéticas $g_{00}^{p \sim 1/0}$ $g_{11}^{p \sim 1/0}$

$$.2 \quad \sqrt{\frac{g_{00}^{p \sim 1/0}}{g_{11}^{p \sim 1/0}}} = \sqrt{\pi \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \frac{p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{p_1 q_1}{\sum p_1 q_1}}$$

De manera análoga el cruce de fórmulas antitéticas respecto de los factores p, q, como $ad_{10}^{ap \sim 1/0}$ con $ad_{10}^{aq \sim 1/0}$

$$.3 \quad \sqrt{\frac{ad_{10}^{ap \sim 1/0} \quad v_{1/0}}{ad_{10}^{aq \sim 1/0}}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0} \sum p_1 q_1 \sum q_1 p_0}{\sum p_1 q_0 \sum p_0 q_0 \sum q_1 p_0 \frac{q_1}{q_0}}}$$

y también con las medias geométricas $g_{00}^{p \sim 1/0}$ y $v_{1/0}$ $g_{00}^{q \sim 1/0}$

$$.4 \quad \sqrt{\frac{g_{00}^{p \sim 1/0} \cdot v_{1/0} \cdot g_{00}^{q \sim 1/0}}{g_{00}^{p \sim 1/0} \cdot v_{1/0} \cdot g_{00}^{q \sim 1/0}}} = \sqrt{\pi \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \frac{p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \pi \left(\frac{q_0}{q_1} \right) \frac{q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}}$$

con las armónicas

$$h_{10}^{p \sim 1/0} ; h_{11}^{p \sim 1/0}$$

$$.5 \quad \sqrt{\frac{h_{10}^{p \sim 1/0} \quad h_{11}^{p \sim 1/0}}{h_{10}^{p \sim 1/0} \quad h_{11}^{p \sim 1/0}}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_1 q_0 \frac{p_0}{p_1}} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_1 \frac{p_0}{p_1}}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

Ejemplos estos que pueden multiplicarse con otras fórmulas antitéticas.-

Procedimiento general para la rectificación de las fórmulas de N.I.

21.1.- Se tienen así dos grupos de fórmulas que satisfacen pruebas de reversibilidad.

El grupo que simbolizaremos por (AT), obtenido cruzando geométricamente fórmulas antitéticas respecto del tiempo y que por lo tanto satisfacen la prueba de reversibilidad en el tiempo, RT,

.1 grupo (AT) de la forma $\sqrt{P_{1/0} \cdot \frac{1}{P_{0/1}}}$ satisface prueba (RT)

y el grupo que designaremos con (AF), obtenido cruzando geométricamente fórmulas antitéticas respecto de los factores p y q (precio y cantidad) y que por lo tanto satisface la prueba de reversibilidad de los factores p y q, (RF)

.2 grupo (AF) de la forma $\sqrt{P_{1/0} \frac{V_{1/0}}{Q_{1/0}}}$ satisface prueba (RF)

Pero si se quieren fórmulas que satisfagan ambas pruebas pueden hallar se tomando previamente las antitéticas respecto del tiempo entre las que satisfacen la prueba 2da., (RF) y cruzarlas luego geométricamente; o viceversa, tomando previamente las antitéticas respecto de los factores entre las que satisfacen la prueba 1ra., (RT), para luego también cruzarlas geométricamente.

21.2.- Por ejemplo: tomando una de las fórmulas del grupo (AT) (Antitéticas respecto del Tiempo) determinemos su antitética respecto de los factores p, q, así:

.3 $\sqrt{P_{1/0} \cdot \frac{1}{P_{0/1}}}$ es antitética respecto de los factores de:

$$\frac{V_{1/0}}{\sqrt{Q_{1/0} \frac{1}{Q_{0/1}}}} = V_{1/0} \sqrt{\frac{Q_{0/1}}{Q_{1/0}}}$$

y por lo tanto el cruce geométrico de ambas da:

.4 $\sqrt{V_{1/0} \sqrt{\frac{P_{1/0} Q_{0/1}}{P_{0/1} Q_{1/0}}}} =$

que es una fórmula que satisface las dos pruebas de reversibilidad. En efecto para la prueba 1ra. (RT) basta permutar los subíndices 1 y 0 y ver si el producto del N.I. progresivo por el N.I. regresivo de la unidad; se tiene en este caso, evidentemente:

$$.5 \quad \sqrt{V_{1/0} \sqrt{\frac{P_{1/0} Q_{0/1}}{P_{0/1} Q_{1/0}}} \cdot \sqrt{V_{0/1} \sqrt{\frac{P_{0/1} Q_{0/1}}{P_{1/0} Q_{1/0}}} = 1$$

Para la prueba 2da. (RF), basta permutar la p , por la q , (precios por cantidades) con lo cual la fórmula del N.I. de precios se convierte en una fórmula del N.I. de cantidades, conservando los mismos subíndices, debiendo el producto de ambos índices dar el N.I. de los valores monetarios. Para la fórmula (.4) se tiene entonces:

$$\sqrt{V_{1/0} \sqrt{\frac{P_{1/0} Q_{0/1}}{P_{0/1} Q_{1/0}}} \cdot \sqrt{V_{1/0} \sqrt{\frac{Q_{1/0} P_{0/1}}{Q_{0/1} P_{1/0}}} = V_{1/0}$$

verificándose por lo tanto la prueba 2da.

21.3.- Procediendo de manera análoga con una fórmula del grupo (AF) (Antitética respecto de los Factores) determinamos su antitética respecto del tiempo, así:

$$1. \quad \sqrt{\frac{P_{1/0} V_{1/0}}{Q_{1/0}}} \text{ es antitética respecto del tiempo, de}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{P_{0/1} V_{0/1}}{Q_{0/1}}}} = \sqrt{\frac{Q_{0/1}}{P_{0/1} V_{0/1}}}$$

y por lo tanto el cruce geométrico de ambas da la fórmula:

$$.2 \quad \sqrt[4]{\frac{P_{1/0} V_{1/0} Q_{0/1}}{Q_{1/0} V_{0/1} P_{0/1}}} = \sqrt[4]{V_{1/0}^2 \frac{P_{1/0} Q_{0/1}}{P_{0/1} Q_{1/0}}} = \sqrt{V_{1/0} \sqrt{\frac{P_{1/0} Q_{0/1}}{P_{0/1} Q_{1/0}}}}$$

es la misma indicada en (19.2.4)

21.4.- Dado pues, un N.I. de precios $P_{1/0}$ ó mejor dicho, una fórmula para calcular un cierto tipo de N.I. de precios, tenemos una fórmula o procedimiento matemático que sirve para rectificar de modo tal que satisfaga las dos pruebas de reversión.

Esa fórmula rectificadora reversibilizadora.

$$.1 \sqrt{v_{1/0} \sqrt{\frac{p_{1/0} q_{0/1}}{p_{0/1} q_{1/0}}}}$$

Supongamos que el N.I. de precios sea simplemente P_1/P_0 , se tendrá entonces:

$$p_{1/0} = \frac{p_1}{p_0} \quad q_{0/1} = \frac{q_0}{q_1} \quad v_{1/0} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}$$

$$p_{0/1} = \frac{p_0}{p_1} \quad q_{1/0} = \frac{q_1}{q_0}$$

al rectificarla tendremos:

$$\sqrt{\frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} \sqrt{\frac{p_1}{p_0} \frac{p_1}{p_0} \frac{q_0}{q_1} \frac{q_0}{q_1}}} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{p_0 q_0} \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}} = \sqrt{\frac{p_1^2}{p_0^2}} = \frac{p_1}{p_0}$$

Otro ejemplo más complejo; sea

$$ad_{0/1} p_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \quad \dots \quad ad_{0/1} q_{1/0} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} ; \quad v_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

$$ad_{1/0} p_{0/1} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} \quad ad_{1/0} q_{0/1} = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_1 p_1}$$

Luego

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_1 p_1} \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \frac{\sum q_0 p_0}{\sum q_1 p_0}}} = \\ & = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \sqrt{\frac{(\sum p_1 q_0)^2}{(\sum p_0 q_1)^2}}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{(\sum p_1 q_1)^2}{(\sum p_0 q_1)^2}} = \\ & = \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1} \end{aligned}$$

Otros métodos de cruzamiento

21.5.- Si bien hemos utilizado solamente el cruzamiento geométrico es decir, tomar como N.I. a un promedio geométrico de los N.I. antitéticos -con lo cual se conservan o se adquieren las propiedades de reversibilidad- puede ensayarse otros tipos de promedio como la media aritmética o la media armónica de dos N.I. antitéticos pero ya no se cumplirán las pruebas de reversibilidad pertinentes.

Por ejemplo, cruzando aritméticamente los N.I. aditivos, antitéticos respecto del tiempo (AT), se tiene:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ad_p}{0 \ 1/0} + \frac{ad_p}{1 \ 1/0} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \right)$$

Esta fórmula obtenida mediante el promedio aritmético simple de las fórmulas de Laspeyres y la de Paasche se atribuye a Drobisch y como puede comprobarse no satisface la prueba de reversibilidad en el tiempo, pues es:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} + \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0} \right) > 1$$

como se desprende del hecho de que la media aritmética supera a la media geométrica. En efecto si se reemplaza cada una de las medias aritméticas que aparecen como factor por la correlativa media geométrica, el producto daría exactamente 1.

Tampoco satisface el N.I. de Drobisch, la prueba de reversibilidad de los factores p, q, pues

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} + \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \right) > \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

también por ser: $1/2 (a + b) > \sqrt{ab}$

Cruzamiento de los factores de ponderación

22.6.- Pueden agregarse algunas fórmulas más para N.I. mediante el artificio de cruzar los pesos o factores de ponderación. Por ejemplo, utilizando en vez de los pesos del año base, $p_0 q_0$, $p'_0 q'_0$, $p''_0 q''_0$, o los del año actual $p_1 q_1$, $p'_1 q'_1$, $p''_1 q''_1$, utilizar un promedio de ambos como :

$$\sqrt{p_0 q_0 p_1 q_1} \quad ; \quad \sqrt{p'_0 q'_0 p'_1 q'_1} \quad ; \quad \sqrt{p''_0 q''_0 p''_1 q''_1}$$

$$\frac{p_0 q_0 + p_1 q_1}{2} ; \frac{p'_0 q'_0 + p'_1 q'_1}{2} ; \frac{p''_0 q''_0 + p''_1 q''_1}{2} ; \dots; \text{etc.}$$

o también cruzando las cantidades q para aplicar el método aditivo

$$\frac{p_0 q_0 + p_1 q_1}{p_0 + p_1} ; \frac{p'_0 q'_0 + p'_1 q'_1}{p'_0 + p'_1} ; \frac{p''_0 q''_0 + p''_1 q''_1}{p''_0 + p''_1} ; \dots$$

$$\sqrt{q_0 q_1} ; \sqrt{q'_0 q'_1} ; \sqrt{q''_0 q''_1} ; \dots$$

$$\frac{q_0 + q_1}{2} ; \frac{q'_0 + q'_1}{2} ; \frac{q''_0 + q''_1}{2} ; \dots \text{etc.}$$

obteniéndose como fórmulas de N.I.

$$\Pi \left(-\frac{p_1}{p_0} \right)^{\sqrt{p_0 q_0 p_1 q_1} / \sum \sqrt{p_0 q_0 p_1 q_1}} ; \frac{\sum \sqrt{p_0 q_0 p_1 q_1} \frac{p_1}{p_0}}{\sum \sqrt{p_0 q_0 p_1 q_1}} =$$

$$\frac{\sum \frac{p_0 q_0 + p_1 q_1}{2} \frac{p_1}{p_0}}{\sum \frac{p_0 q_0 + p_1 q_1}{2}} = \frac{\sum (p_0 q_0 + p_1 q_1) \frac{p_1}{p_0}}{\sum (p_0 q_0 + p_1 q_1)}$$

$$\frac{\sum p_1 \frac{p_0 q_0 + p_1 q_1}{p_0 + p_1}}{\sum p_0 \frac{p_0 q_0 + p_1 q_1}{p_0 + p_1}} ; \frac{\sum p_1 \frac{q_0 + q_1}{2}}{\sum p_0 \frac{q_0 + q_1}{2}} = \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1}$$

Si se tiene presente las desigualdades de Cauchy según las cuales si a, b, c, d , son números positivos, tales que $(a/b) < (c/d)$ se tiene:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad \text{pues} \quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{d}{b+d} \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{b+d} \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0.$$

resultan las desigualdades en sentido creciente o decreciente siguiente:

$$\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \leq \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \leq \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

y así mismo por ser valores medios comprendidos entre los valores extremos estarán comprendidos entre esos mismos límites es un simple promedio de las dos medias aditivas, (Laspeyres y Paasche) sea aritmético, geométrico o armónico.

ELECCION DE LA FORMULA

22.1 Hemos señalado tres características importantes respecto de las fórmulas para N.I.: 1º La existencia de dos pruebas de reversibilidad; 2º La presencia de un error sistemático o de una tendencia constante a desviarse en el mismo sentido y 3º La posibilidad de rectificación de las fórmulas, de modo que satisfagan una o ambas pruebas de reversibilidad.

El problema consiste ahora, en el cotejo de las diferentes fórmulas; inferir acerca de su precisión y seleccionar la que se considere mejor.

Para ese análisis Fisher las clasifica en los siete grupos siguientes:

- S : números índices de promedios simples y sus derivados
- Me : números índices basados en medianas, Me; modos, Mo y derivados.
- 2+ : números índices de promedios ponderados con error sistemático positivo, doble
- 2- : números índices de promedios ponderados con error sistemático negativo doble
- 1+ ; números índices de promedios ponderados con error sistemático positivo simple
- 1- : números índices de promedios ponderados con error sistemático negativo simple
- 0 : números índices de promedios ponderados sin error sistemático.

Estos grupos son mutuamente excluyentes con excepción de los N.I. basados en medianas, Me; o modos, Mo; simples y sus derivados que están incluidos en los dos primeros grupos, S, Me.

Evidentemente, a no ser que las dificultades de orden práctico obliguen a contentarse con una determinada fórmula, la mejor de ellas debe logicamente encontrarse entre las del grupo 0; pero no puede dejarse de contemplar el aspecto práctico.

22.2 Para la selección de la fórmula considera Fisher dos aspectos:

1º Que no se disponga de factores de ponderación y que, no obstante quiera construirse un N.I.

2º Que se disponga de los factores de ponderación.

Como ya lo hemos dicho los promedios llamados simples -que muchos dicen sin ponderación- son en realidad promedios en cada uno de los términos lleva el mismo factor de ponderación. Pero tratándose de

N.I. de precios o N.I. de cantidades, etc., en ningún caso figuran incluidos en el índice todos los artículos o bienes; por lo tanto la sola inclusión de un artículo en un número índice (N.I.), equivale a darle una cierta ponderación y la no-inclusión, equivale a asignarle como factor de ponderación o peso, el factor cero.

Hecha esa observación, se advierte que para el caso de no disponer de pesos numéricos (en realidad, de pesos numéricos diferentes para cada artículo) el campo de elección de la fórmula se restringe al de aquellas que se basan en los promedios simple y de entre ellas a las que satisfagan las condiciones de reversibilidad en el tiempo. Una vez elegido el tipo de fórmula -en este caso de promedios simples- se procede a una verdadera ponderación por de pronto al discernir los artículos o bienes que han de comprenderse en el N.I., pero además -y aquí equivale a la ponderación en el sentido que todos la entienden- al elegir la unidad de medida que servirá para fijar el precio o la cotización del artículo.

El conocido N.I. de Bradstreet, por ejemplo, se ha construido sobre la base de que la unidad de cantidad de cada uno de los bienes considerados es la medida representada por 1 libra (one pound) determinándose al N.I. mediante la suma de los precios por libra, de esos bienes. Es como si se reunieran en un cesto, canasta, o bolsa, una libra de cada uno de esos bienes y se calculara el precio de ese surtido especial (digase: surtido Bradstreet).

Una libra de carbón y una libra del metal fino; plata tienen en ese N.I. la misma importancia es decir, el mismo peso.

El resultado habría sido muy diferente si en lugar de considerar los precios por libra se hubieran tomado los precios de esos artículos tal como usualmente se cotizan en plaza: el precio de una tonelada de carbón y el precio de una onza de plata. Es de imaginar los efectos perturbadores de esa ponderación implícita, si entre los artículos llegara a figurar una libra de radium, artículo que se acostumbra cotizar por miligramo.

De hecho, la costumbre ha asignado inconscientemente una ponderación al elegir las unidades de cotización de cada artículo, de aquí que Fisher se incline a creer que en un método como el de Bradstreet, la mejor manera de construir el número índice (N.I. simple) sea el de sumar las cotizaciones tal cual se dan en las publicaciones periódicas pertinentes, sea por libras, onzas, toneladas, yardas, etc., indiscriminadamente; más bien que reducirlas a una misma unidad pues esto importa confundir la ponderación económica con la ponderación física.

22.3 Dando por resuelto el problema de elegir los bienes y sus unidades de cotización, Fisher aconseja preferentemente la fórmula de N.I. basada en promedios geométricos

$$^g P_{1/0} = \prod \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{1/n} = \sqrt[n]{\frac{p_1}{p_0} \frac{p'_1}{p'_0} \frac{p''_1}{p''_0} \dots}$$

o las fórmulas que resultan de un cruzamiento geométrico de las fórmulas antitéticas, aritméticas $^a P_{1/0}$ y armónica, $^h P_{1/0}$

$$\sqrt{a_{P1/0} \cdot h_{P1/0}} = \sqrt{\left(\sum \frac{p_1}{p_0}\right) \cdot \left(\sum \frac{p_0}{p_1}\right)^{-1}}$$

que dan, prácticamente, los mismos resultados numéricos, según se desprende del ejemplo: (N.I. de precios con base fija, pag. 211 de la obra de Fisher)

	1914	1915	1916	1917	1918
$g_{P1/0}$	95,77	96,79	121,37	166,65	180,12
$\sqrt{a_{P1/0} \cdot h_{P1/0}}$	95,75	96,80	121,38	166,60	179,09

22.4 - Supongamos ahora, que disponemos de una información completa tanto en lo que respecta a precios como cantidades y valor monetario, y se quiere elegir la fórmula de N.I., más conveniente,

Fisher excluye entonces a todas las fórmulas de N.I., simples y a sus derivadas, por cuanto las deficiencias proveniente de una falta de ponderación adecuada no pueden salvarse mediante cruzamientos o la rectificación.

Descarta también al grupo de fórmulas basadas en la mediana, Me , o en el modo, Mo , por su falta de sensibilidad a los pequeños cambios y su versatilidad cuando el número de artículos comprendidos no es grande.

Descarta las fórmulas con desvío o error sistemático doble o simple y las irreversibles.

Llega Fisher, finalmente, a su fórmula ideal

$$\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

que es la media geométrica de la fórmula de Laspeyres y de la fórmula de Paasche y que -de entre las que satisfacen las pruebas reversibilidad- es la más sencilla.

22.5 Fisher hizo una prueba numérica intensiva para verificar el comportamiento de las diversas fórmulas estudiadas y comparar sus resultados con el arrojado por su fórmula ideal. Fundándose en la magnitud de las diferencias observadas clasificó las fórmulas de números índices en categorías de la manera siguiente:

1º Sin valor o malas, entre las cuales incluye a las fórmulas basadas en el modo; en la media aritmética simple; en el método aditivo simple y sus cruzamientos.

2º Pobres ó mediocres, entre las cuales las basadas en la mediana; en la media armónica y geométrica, simples; en el cruzamiento de estas medias simples; y en las medias armónicas ponderadas.

3º Aceptables, como las medias geométricas ponderadas.

4º Buenas, como el cruzamiento geométrico de las fórmulas basadas en la media aritmética del tipo Paasch y la media armónica del tipo Laspeyres es decir: $\sqrt{\frac{a_p}{11} \frac{h_p}{1/0}}$;

5º Muy buenas, como el cruzamiento, $\sqrt{\frac{a_p}{10} \frac{h_p}{01}}$, de fórmulas basadas en la media aritmética y en la media armónica de ponderación mixta (ó ponderación híbrida según Fisher); la aditiva ponderada de Laspeyres, $\frac{a_p}{0 \frac{1}{0}}$ y la aditiva ponderada de Paasch, $\frac{a_p}{1 \frac{1}{0}}$

6º Excelentes, entre las cuales las obtenidas por el cruzamiento de factores antitéticos como $\sqrt{\frac{g_p}{01} \frac{g_p}{10}}$; las basadas en la media geométrica de ponderación cruzada geométricamente,

$$\pi(p_1 / p_0) \sqrt{\frac{p_0 q_0 p_1 q_1}{\sum \sqrt{p_0 q_0 p_1 q_1}}}$$

y también la fórmula obtenida por cruzamiento geométrico de,

$$\frac{\sum p_1 \frac{p_0 q_0 + p_1 q_1}{p_0 + p_1}}{\sum \frac{p_0 q_0 + p_1 q_1}{p_0 + p_1}} = \frac{\sum p_1 (p_0 q_0 + p_1 q_1) / (p_0 + p_1)}{\sum (p_0 q_0 + p_1 q_1) / (p_0 + p_1)}$$

con su factor antitético

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum q_1 (q_0 p_0 + q_1 p_1) / (q_0 + q_1)}{\sum (q_0 p_0 + q_1 p_1) / (q_0 + q_1)}$$

7º Superlati. como por ejemplo la fórmula de Drobisch,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a_p}{0 p_1 / 0} + \frac{a_p}{1 p_1 / 0} \right),$$

si bien no satisfaco ninguna de las pruebas de reversibilidad, la fórmula

MARSCHALL - EDGEWORTH

$$\frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_1 (q_0 + q_1)/2}{\sum (q_0 + q_1)/2}$$

que satisface solamente la prueba de reversibilidad en el tiempo (RT); y la fórmula de Walsh, de tipo aditivo y ponderación cruzada,

$$\frac{\sum p_1 \sqrt{q_0 q_1}}{\sum p_0 \sqrt{q_0 q_1}}$$

que satisface solamente la prueba (RT).

Con respecto a la fórmula ideal ha establecido Fisher empíricamente el máximo desvío, encontrando para cifras correspondientes a los años de la primera guerra mundial, (1914-1918) para las diferentes fórmulas:

1º.	Sin valor o malas	21,0 %
2º.	Pobres o mediocres	11,7 %
3º.	Aceptables	6,2 %
4º.	Buenas	3,7 %
5º.	Muy buenas	0,8 %
6º.	Excelentes	0,2 %
7º.	Superlativas	0,1 %

admitiendo como utilizables a un 40 % de las 134 fórmulas por él estudiadas.

22.6 Por otra parte Bruce D. Mudgett en su obra Index Numbers (N.I. 1951) resume la clasificación y calificación de Fisher, en las siguientes fórmulas:

$$1º) \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \quad , (\text{Laspeyres}) \quad \text{muy buena}$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}, \text{ (Paasch) } \quad \text{muy buena}$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \right), \text{ (Drobisch) } \quad \text{superlativa}$$

$$4^{\circ}) \quad \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \cdot \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \cdot \sum p_0 q_1}}, \text{ (Fisher, ideal) } \quad \text{superlativa}$$

$$5^{\circ}) \quad \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1}, \text{ (Marschall-Edgeworth) } \quad \text{superlativa}$$

$$6^{\circ}) \quad \frac{\sum p_1 \sqrt{q_0 q_1}}{\sum \sqrt{q_0 q_1}}, \text{ (Walsh) } \quad \text{superlativa}$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{\sum p_1 q_a}{\sum p_0 q_a}, \text{ (Young) } \quad \text{aceptable}$$

La fórmula 7^o) aditiva de ponderación constante fué propuesta por Arturo Young en 1812 y posteriormente por otros autores. En vez de basarse en la ponderación de la época base o en la de la época actual pareciera referirse, al valor relativo de cada clase de artículos en el intercambio total, sin particularizar el período.

PRUEBAS SUPLEMENTARIAS

22.7 Además de las mencionadas señala Fisher otras cuatro pruebas: (1) de proporcionalidad, según la cual un número índice debe coincidir con su precio relativo, si todos son iguales. (2) La determinabilidad, por la cual el número índice no debe ser indeterminado, ni cero, ni infinito. (3) Secesión o asociabilidad, (de entrada o salida), por la cual el número índice no debe afectarse si el precio relativo de uno o más artículos coincide con el promedio señalado por el N.I., sea que se incluyan o excluyan esos artículos y (4) Copmensurabilidad según la cual el número índice no debe depender de la unidad de medida en que se miden los precios.

La prueba (1) la satisfacen todos los promedios pues está implícitamente comprendida en su definición y se cuentan unas 35 fórmulas que satisfacen las tres primeras pruebas, pero de entre ellas, la del método aditivo simple no satisface la (4), de comensurabilidad.

La mayor parte de los factores antitéticos no cumplen la prueba (1) de proporcionalidad pero sí, las fórmulas de Laspeyres y de Paasch así como también sus factores antitéticos. La prueba (2) de determinabilidad la satisfacen entre otras, la fórmula ideal y todas las aditivas, pero la prueba (4) de comensurabilidad, no la satisfacen la mayor parte de las fórmulas cruzadas incluyendo a la ideal.

22.8 La fórmula ideal para la construcción de números índices, según el profesor Fisher, por ser la más sencilla entre las que cumplen las pruebas de reversibilidad es, como vimos:

$$\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

una media geométrica de la fórmula de Laspeyres (ponderación con las cantidades del año base) y de la fórmula de Paasch (ponderación con las cantidades del año dado o actual). Pero como hay otras fórmulas que arrojan prácticamente el mismo resultado numérico, -aún cuando no cumplen exactamente las pruebas de reversibilidad- Fisher las califica de superlativas y, en razón de su mayor sencillez se justifica su adopción. Como ejemplo, la que sigue en orden de preferencia a la ideal pone a la fórmula de Drobisch:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \right)$$

Pero es necesario convenir que casi nunca se tienen todos los elementos (precios y cantidades) que figuran en esas fórmulas a causa de faltas o deficiencias estadísticas y, en ese caso, reemplaza a la fórmula ideal por la de Laspeyres

$$\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

OBJECIONES A LA TEORIA DEL PROFESOR FISHER

23.1 La necesidad de que las fórmulas de N.I., verifiquen las pruebas de reversibilidad, es discutida por muchos autores y blanco de severas críticas, por parte de estadísticos de renombre y de autoridad. Así el profesor de la Universidad de Londres Arthur L. Bowley en lo que respecta a la prueba de reversibilidad en el tiempo (inversión de la base) señala que las cantidades q_0 , q'_0 , q''_0 , ... utilizadas para la ponderación pueden muy bien considerarse normales para la época base, pero anormales en la época dada o actual, lo cual importa una falta de simetría. (Por ejemplo: el número índice de los precios de consumo construido tomando como factores de ponderación las cantidades consumidas en el año 1943 (año base) pueden considerarse anormales para ponderar los precios actuales, de 1955).

Agrega así mismo, Bowley esta otra observación: si se estudia el costo de la vida en Francia e Inglaterra en 1905, se encuentra que el precio de surtidos de bienes necesario a un inglés vale en Francia un 11% más que en Inglaterra; pero respecto del surtido de bienes necesario a un francés, el mayor costo es solamente de un 6%. Evidentemente para un inglés que quiere emigrar, la primera valuación es la que más le importa.

Fisher declara al número índice publicado por "The Economist" y al publicado por "The Statist" (continuación estos del N.I. de precios mayoristas de Mr. A. Sauerbeck) como carentes de valor, por no estar ponderados y por que no satisfacen las pruebas de reversibilidad, pero como dice el profesor Bowley, la ponderación de tales índices es la que resulta del método (aprobado por el autor) que consiste en elegir los bienes o artículos que considera más representativos de los grupos más importantes; y en cuanto a la pruebas de reversibilidad es simplemente una opinión del autor que el problema de un número índice de precios sea un problema gemelo de las cantidades por el hecho de que la medida de los precios y de las cantidades se represente simétricamente en las fórmulas.

Por último dice que es cierto que la fórmula "ideal" es muy buena cuando se quiere ponderar los promedios y comparar dos épocas del índice. Lleva por lo demás 20 años de recomendación, pero otras fórmulas como las de los profesores Laspeyres, Paasch y Drobisch dan aproximadamente los mismos resultados.

23.2 Con respecto a la fórmula ideal de Fisher el profesor Wesley Mitchell observa que no se percibe cual es la parte atribuible a las variaciones de precio y la parte atribuible a la variación de las cantidades.

El profesor G. Udny Yule estima que es necesario tener en cuenta el objeto del número índice y reprocha al profesor Fisher que proponga la fórmula ideal cualquiera fuera el objeto del índice. "Supongamos -dice- por ejemplo, que se desee establecer salarios que año tras año permitan comprar la misma suma de bienes. Será necesario en ese caso, emplear un número índice basado cada año en el costo total de esos bienes. Pero ese número índice no satisface bien sea una u otra: de las pruebas del profesor Fisher, aún cuando no obstante es la solución correcta de la cuestión planteada.

Fisher ha reconocido que en ese caso sería necesario em-

clear una fórmula aditiva de ponderación constante, pero que ello no anulaba sus conclusiones ya que si las cantidades del año base y las del año actual fueran iguales, $q_0 = q_1 = q$, la fórmula ideal coincidiría con esa fórmula aditiva.

$$\sqrt{\frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \cdot \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q}} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q}$$

23.3 Hay finalmente una razón de orden práctico contra el número índice ideal de Fisher y es la imposibilidad de obtener estimaciones anuales serias, acerca de las cantidades utilizables como pesos. "Puede conseguirse acaso, buenas estimaciones de las cantidades anuales de materias primas ó semielaboradas (en los E.E.U.U.) pero para productos manufacturados ropas, metales etc., la mayor parte de los materiales de construcción y otros artículos es difícil contar con cifras fidedignas aún en las épocas censales y sería por lo tanto muy difícil sino imposible reunir cifras anuales aceptables; y si se pretende reemplazarlas por cifras groseramente aproximadas, se tiene -como adjunta al autor Dr. Mecker- una razón para eludir el trabajo, las dificultades y gastos necesarios para lograr una información imperfecta. Hay muchos países que no llevan ni están en condiciones de censar anualmente su producción por lo que de querer aplicar una fórmula como la ideal deben entrar en juego el costo y las dificultades como elemento para juzgar las ventajas de la fórmula.

Por otra parte una fórmula ideal en sentido estricto debiera tener todas las propiedades de un valor relativo individual digamos v.g. las del precio relativo de un único artículo, pero eso implica una contradicción pues todo promedio impone la pérdida de propiedades particulares. Pero no está prohibido abusar -como alguien dice- de los adjetivos y menos aún, si quien lo hace tiene autoridad para suplir los argumentos con una recomendación.

Prueba de circularidad

23.4 El mismo profesor Fisher en su libro ; El poder adquisitivo de la moneda, (The Purchasing Power of Money, Macmillan N.Y. 1911) había impuesto una condición más fuerte que la de reversibilidad en el tiempo al número índice; y es la condición de circularidad. Según ella, un número índice verifica la prueba de circularidad cuando da el mismo resultado si se lo calcula directamente respecto de una base inicial, como si se lo obtiene después de uno o más cambios de base. Por ejemplo: hemos visto que el número índice de precios relativos basados en el promedio geométrico satisface la prueba de reversibilidad (RT) entre dos épocas, es decir, si designamos con . a los pesos,

$$I = f^g_{1/0} \cdot f^g_{0/1} = \prod (p_1/p_0)^{f/\sum f} \cdot \prod (p_0/p_1)^{f/\sum f}$$

Si consideramos las tres épocas que designamos respectivamente con los números 0;3;5 la prueba de circularidad exige que sea

$$f^g_{5/0} = f^g_{5/3} \cdot f^g_{3/0}$$

es decir, que coincida el N.I. calculado directamente para el año o época 5 tomando como base la época 0, con el calculado indirectamente a través de la época base 3 intermedia.

Esa prueba se verifica con esos índices geométricos pues simplificando factores es:

$$\pi(P_5/P_0)^f/\Sigma = \pi(P_5/P_3)^f/\Sigma^f \cdot \pi(P_3/P_0)^f/\Sigma^f.$$

También cumple evidentemente, la prueba de circularidad el N.I. de Laspeyres y el de Paasche pues designando con $q, q', q'', \dots$ a los pesos, será para el mismo caso precedente.

$$\frac{\sum P_5 q}{\sum P_0 q} = \frac{\sum P_5 q}{\sum P_3 q} \cdot \frac{\sum P_3 q}{\sum P_0 q}$$

23.5 De la definición del concepto de circularidad se desprende que si las dos épocas extremas comparadas son idénticas, se tiene por ejemplo

$$1 = f^{P_{5/5}} = f^{P_{5/3}} \cdot f^{P_{3/0}} \cdot f^{P_{0/5}}$$

Evidentemente, si una fórmula satisface la prueba para una terna cualquiera de años, ha de satisfacerla para un número cualquiera de años, ya que cualquiera de los índices que relaciona dos años dados puede obtenerse pasando por una base intermedia. Por ejemplo, siendo

$$f^{P_{5/3}} = f^{P_{5/4}} \cdot f^{P_{4/3}}$$

al reemplazar en la igualdad anterior se tiene,

$$1 = f^{P_{5/4}} \cdot f^{P_{4/3}} \cdot f^{P_{3/0}} \cdot f^{P_{0/5}}$$

En consecuencia la prueba de circularidad es una generalización de la de reversibilidad en el tiempo, extendiéndola de dos a tres épocas.

Fisher denomina prueba triangular a la prueba de circularidad realizada con tres índices (tres épocas); y prueba binaria a la de dos. Considera que la prueba triangular pertenece a otro plano de consideraciones que el de la simple reversibilidad en el tiempo (RT)-, prueba binaria-, que conviene particularmente cuando se trata de dos épocas, y no de tres. "La condición triangular" -dice- "introduce un elemento exterior y no representado en el número índice".

Cuando estudiamos un conjunto de n años, cada par de años tendrá su propio número índice dependiendo de los precios y cantidades pertinentes totalmente ajenos a los de cualquier otro año; se necesita-

rán en consecuencia tantos números índices como combinaciones puedan formarse con los n años tomados dos a dos, o sea, $n(n-1)/2$ excluyen los inversos que pueden obtenerse como aplicación de la prueba de reversibilidad (RT). El índice se limita pues, a la comparación de los dos años a los que se refiere y no puede, en consecuencia, imponérsele la condición de circularidad.

No obstante para que los números índices de la variación de los precios sea útil, es necesario que permitan comparar directamente los niveles de precios de dos años cualesquiera, y es raro que ello pueda hacerse sin recurrir a un cambio de base.

Entre las 134 fórmulas estudiadas por Fisher hay diez que satisfacen la prueba de circularidad: las basadas en la media geométrica simple y en el método aditivo simple que se descartan y en las medias geométricas y en las del método aditivo pero de ponderación constante. Pero es evidente que mantener inalterados los pesos para comparar niveles de precio entre épocas que difieren en 10, 100 y más años no es teóricamente correcto, planteándose el problema de contemplar los dos aspectos el de la circularidad y el de la ponderación.

El profesor Fisher somete a prueba sus índices y concluye que para todos los calificados como buenos, el error es pequeño. Su fórmula ideal que no satisface la prueba triangular y menos aún la de circularidad general sometido a pruebas triangulares, cuadrangulares, pentagonales y hexagonales, demuestra apartarse muy poco de ella.

Cabe, sin embargo, recurrir también a las fórmulas de ponderación constante que verifican la prueba de circularidad; pues para mantener la eficiencia del número índice todos, por lo general, concuerdan en que el sistema de ponderación debe reajustarse cada tanto.

Números índices de base fija y de base móvil

24.1.- La aplicación de los números índices que con mayor frecuencia interesa, es para interpretar el pasado inmediato y su relación con el presente. La inflación monetaria, por ejemplo, crea serios problemas a diversos y numerosos sectores de la población: a los asalariados que deben enfrentar un mayor costo de la vida; lo mismo puede decirse de los jubilados, pensionados, retirados y en general de todos aquellos cuyos únicos ingresos representan una suma fija en dinero y no están en condiciones de volver a la actividad o compensar de alguna manera el menor valor adquisitivo de la moneda. Afecta, también a los que han confiado en depósito sus ahorros o contratado seguros de vida pues el menor poder de compra de los capitales que perciben los defrauda en sus previsiones; a los acreedores que perciben sumas que no les permiten reponer los bienes que componen el capital de su negocio; a los comerciantes que para continuar como tales necesitan aumentar los precios basándose por lo menos - es decir, con abstracción de la posible restricción que el aumento pueda ocasionar en las ventas- en el costo de reposición de los diferentes artículos; etc...

Los párrafos precedentes se refieren principalmente, por otra parte, a la mejor manera de medir la variación de precios o de producción entre dos épocas o dos lugares (cotejo binario) sobreentendiéndose que los lugares o épocas son próximos pues las comparaciones son tanto más discutibles cuanto mayores las distancias de tiempo y espacio.

Merece citarse al respecto, la iniciativa de la "Ford Motor Company" que quiso hace años - según dice Mudge en su obra - adoptar una política de salarios procurando a sus empleados el mismo tenor de vida donde quiera que tuvieran que vivir, fuera en los E.E.U.U., en Detroit, Londres, Berlín, Buenos Aires, Varsovia, etc., en las numerosas agencias que tiene repartidas por el mundo. El problema de cotejar números índices correspondientes a lugares tan distantes implica enfrentar diferencias no solamente de origen geográfico, sino otras más importantes basadas en los hábitos de vida; sistemas políticos diferentes; recursos diferentes; producción y técnica diferentes; y clases sociales y económicas, también diferentes.

Problema similar es el de cotejar los cambios del nivel de precios entre épocas muy distantes. Se tiene una noción más o menos clara de la inflación si comparamos lo que pagamos hoy con lo que pagamos ayer, o en este año con respecto al anterior; pero el cotejo va perdiendo sentido a medida que se retrocede en el tiempo y se plantea el problema de saber si existe un método para medir esas diferencias que permita cierta confianza en las comparaciones.

24.2.- La cuestión está estrechamente ligada al problema de la elección de la base, pues cada período base es en cierto sentido la norma para fijar el nivel del período que se compara. De aquí que para que los cotejos conserven la mayor significación posible se propugne para los índices la proximidad de los períodos de comparación, y, en

particular los índices de base recurrente en los que, los elementos de cada período sirven de base para el número índice del período sucesivo.

Es evidente que si los factores de ponderación varían muy poco entre los dos períodos (o entre dos lugares) como puede serlo de un año al otro, el número índice de ponderación constante (entre los dos períodos), es aceptable como medida de la variación de precios. En ese caso utilizando el criterio de Laspeyres de ponderar con elementos del año que se toma como base podemos calcular los números índices para los sucesivos años 1, 2, 3, ..., n siguientes.

$$P_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}; \quad P_{2/1} = \frac{\sum p_2 q_1}{\sum p_1 q_1}; \quad P_{3/1} = \frac{\sum p_3 q_2}{\sum p_2 q_2}; \dots$$

etc.

La comparación de cada dos períodos sucesivos es, así, de mayor significación pues poca influencia cabe asignar entre dos años consecutivos a la variación de las cantidades q . Puede, por otra parte, considerarse la fórmula de Paasch o la de Young, utilizando factores de ponderación intermedios a los de la época base o de comparación.

Pero si se quiere realizar comparaciones entre años distantes utilizando la serie de números índices de base recurrente, nos vemos obligados a concatenarlos, efectuando multiplicaciones sucesivas. Así, para obtener el número índice $P'_{2/0}$

$$P'_{2/0} = P_{1/0} \cdot P_{2/1} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_2 q_1}{\sum p_1 q_1}$$

y análogamente:

$$P'_{3/0} = P'_{2/0} \cdot P_{3/2} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_2 q_1}{\sum p_1 q_1} \cdot \frac{\sum p_3 q_2}{\sum p_2 q_2}$$

$$P'_{4/0} = P'_{3/0} \cdot P_{4/3} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_2 q_1}{\sum p_1 q_1} \cdot \frac{\sum p_3 q_2}{\sum p_2 q_2} \cdot \frac{\sum p_4 q_3}{\sum p_3 q_3};$$

y en general

$$P'_{n/0} = P'_{(n-1)/0} \cdot P_{n/(n-1)}$$

Si hiciéramos el cálculo directo del número índice que relaciona las

dos épocas 3 y 0, tendríamos:

$$P_{3/0} = \frac{\sum p_3 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

resultado que, evidentemente, no coincide con el obtenido por concatenación, $P'_{3/0}$, pues intervienen cantidades de las diferentes épocas intermedias 1; 2 y 3.

Se critica al índice encadenado - no obstante su mayor significado- como de técnica complicada para la generalidad de los que han de utilizarlo pero también se ha dicho que el automóvil es de construcción bien complicada pero no por eso renuncian a manejarlo los que no tienen idea de como hacerlo. La cuestión es disponer de un buen número índice.

24.3.- Si la fórmula del número índice cumpliera la prueba de circularidad, no habría entonces diferencia entre la serie de índices obtenidos directamente con la base fija P_1 y los obtenidos concatenando los de base móvil, P' . v.g.

$$P_{1/0} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} ; P_{2/0} = \frac{\sum p_2 q}{\sum p_0 q} ; P_{3/0} = \frac{\sum p_3 q}{\sum p_0 q} ; \dots$$

$$P'_{1/0} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} = P_{1/0} ; P'_{2/0} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \frac{\sum p_2 q}{\sum p_1 q} = P_{2/0} ;$$

$$; P'_{3/0} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \frac{\sum p_2 q}{\sum p_1 q} \frac{\sum p_3 q}{\sum p_2 q} = P_{3/0}$$

Pero no verificándose la prueba de circularidad la concatenación de los índices de base móvil introduce diferencias tanto más apreciables cuanto mayores sean las distancias en el tiempo de las épocas o períodos relacionados.

Los números índices de base fija vician, evidentemente las comparaciones entre épocas distantes y pueden inducir a error si se los utiliza para basar una política de salarios conformándolos al nivel de precios, a causa de la alteración del sistema de vida; los descubrimientos o invenciones; mejoramientos técnicos; agotamiento de ciertos recursos y surgimiento de otros, etc..

Se puede en consecuencia utilizar alguna de las fórmulas analizadas y consideradas superlativas por Fisher para el número índice

que relaciona cada dos épocas consecutivas, obteniendo v.g. la serie:

$$P_{1/0}^{-} ; P_{2/1}^{-} ; P_{3/2}^{-} ; P_{4/3}^{-} ; \dots$$

y mediante estos índices de base móvil, obtener al concatenarlos:

$$P_{1/0}^{-} = P_{1/0}^{-}$$

$$P_{2/0}^{-} = P_{1/0}^{-} P_{2/1}^{-}$$

$$P_{3/0}^{-} = P_{1/0}^{-} P_{2/1}^{-} P_{3/2}^{-}$$

$$P_{4/0}^{-} = P_{1/0}^{-} P_{2/1}^{-} P_{3/2}^{-} P_{4/3}^{-}$$

- - - - -

y estos números índices son más precisos en lo que respecta al cambio de precios y, cantidades que los obtenidos con la base fija, pero en realidad permiten más bien apreciar la dirección del cambio de precios y no la magnitud de ese cambio.

24.4.- El economista inglés Alfred Marshall (1887) abogó por los números índices encadenados como el mejor procedimiento para las comparaciones de épocas muy distantes, apoyado en ese punto de vista por el economista - también inglés- F. Y. Edgeworth (1887). El americano Wesley Mitchell apunta tres objeciones a ese número índice encadenado: 1º Los errores se acumulan, probablemente; 2º la interpretación del resultado final es más fácil con el sistema de base fija y 3º el resultado tiende a apartarse del de base fija. Estos defectos parecerían condenar al número índice en cadena pero Mitchell concluye que es conveniente utilizar los dos sistemas de cálculo para que si la diferencia que ambos acusan es muy notable, se indague la causa.

No obstante estas discusiones, el economista francés F. Divisia ha dado una justificación lógica del método de los números índices encadenados diciendo que el problema consiste en descomponer el valor monetario total.

$$.1 \quad V = \sum p \cdot q$$

en el producto de dos factores

$$.2 \quad V = P \cdot Q = \sum p \cdot q ,$$

de los cuales P puede considerarse como representante del nivel ge-

moral de precios y Q como el valor físico total o cantidades totales.

La diferencial total de V, se expresa por:

$$dV = P \cdot dQ + Q \cdot dP = \sum (p \cdot dq + q \cdot dp)$$

Y dividiendo los tres miembros por los correlativos de la (.2)

$$.3 \quad \frac{dV}{V} = \frac{dQ}{Q} + \frac{dP}{P} = \frac{\sum p \cdot dq}{\sum p \cdot q} + \frac{\sum q \cdot dp}{\sum q \cdot p}$$

Esta igualdad nos conduce a plantear las ecuaciones.

$$.4 \quad \frac{dQ}{Q} = \frac{\sum p \cdot dq}{\sum p \cdot q} ; \quad \frac{dP}{P} = \frac{\sum q \cdot dp}{\sum q \cdot p}$$

La integral de la primera expresión puede llamarse un índice del volumen físico o de las cantidades y la integral de la segunda expresión, un índice de precios.

24.5.- Como la cantidad de bienes y servicios (considerados para el índice) pagados en la unidad de tiempo (v.g. el año) en el mercado varía de una época a otra y son por lo tanto función del tiempo t y el precio de venta es también función del tiempo, t ; podemos indicarlo escribiendo:

$$.1 \quad q \equiv q(t) ; p \equiv p(t) \quad \therefore dp = dp(t) = p'(t) dt$$

con lo cual la ecuación diferencial del índice de precios - por ejemplo - se expresa.

$$.2 \quad \frac{dP}{P} = \frac{\sum q(t) p'(t) dt}{\sum q(t) p(t)} = \Pi(t) dt.$$

Para tener el número índice de precios de la época t , respecto de la época t_0 , integremos respecto a t entre esos límites:

$$\int_{t_0}^t \frac{dP}{P} = \int_{t_0}^t \Pi(t) dt = \ln P \Big|_{t_0}^t = \ln P - \ln P_0 = \ln \frac{P}{P_0}$$

obteniéndose en consecuencia al pasar de los logaritmos a los números.

$$.3 \quad \frac{P_t}{P_0} = e^{\int_{t_0}^t \Pi(t) dt}.$$

Esta expresión del número índice de precios es una integral que no puede efectuarse sino se conocen las variaciones de las cantidades p y q en función de una de ellas en todo el intervalo t_0, t ; es el valor de una integral curvilínea.

Sean n el número de bienes o de artículos; $q, q', q'', \dots$ y $p, p', p'', \dots$ respectivamente las cantidades pagadas en la unidad de tiempo y los precios correspondientes. Todos esos números son funciones del tiempo y determinan un punto (en el hiperespacio de $2n$ dimensiones) que se desplaza y determina una curva, C . A cada una de las épocas $t_1, t_2, t_3, \dots$ le corresponde un punto (lo que equivale a decir un juego de valores particulares de q y p) de la curva. El índice calculado no es otra cosa que la integral curvilínea a lo largo de esa curva C .

Conduce esto a la importante noción de coordenadas de un conjunto económico que tiene importancia real desde el punto de vista de los métodos y de la filosofía de la ciencia económica. Veamos una consecuencia práctica inmediata.

24.6 Del hecho que el índice sea una integral curvilínea sigue lo siguiente: Supongamos que se conocen las cantidades de bienes y servicios vendidos en el año 1800 así como también sus precios y lo mismo con respecto al año 1900. Queremos calcular el valor de la moneda en 1900 respecto de 1800. Ese es justamente el objeto de los números índices.

Pues bien -dice Divisia- los datos de que disponemos no permiten resolver el problema. En efecto el valor de la integral curvilínea no depende solamente del valor de las variables en 1800 y en 1900, sino también de todos sus valores intermedios. Este resultado aparentemente contradictorio no lo es en cuanto se lo somete a un breve análisis. Refiriéndose al costo de la vida en la época del rey de Francia, Francisco I^o (1515-1547) y en la época actual -M. de Foville en su obra "La moneda"- calcula el valor actual del rescate de Francisco I^o a consecuencia de su captura en Pavía y llama al índice que ha utilizado índice histórico. La teoría expuesta (de Divisia) muestra que el cálculo de M. de Foville es erróneo, pues no hace intervenir los valores intermedios. Pues, en realidad, el rescate de Francisco I^o pudo servir para comprar armaduras y ballestas; para pagar a los Suizos. Pero si hoy hubiera de pagarse un tal rescate no serviría para comprar armaduras ni ballestas, sino cañones de tiro rápido, submarinos, ametralladoras, aviones, etc.

No puede en consecuencia procederse de otro modo que por cotejos infinitamente próximos, es decir se calculará en que se ha convertido el rescate v.g. diez años después; luego otro diez años y así sucesivamente hasta la actualidad. El resultado así hallado dependerá de todas las situaciones intermedias.

Por lo tanto -concluye Divisia- el número índice debe lógicamente ser de base variable de una época a otra.

27.4 Veamos ahora como puede pasarse de las ecuaciones diferenciales precedentes a conocidas fórmulas de números índices:

Si admitimos que las cantidades $q = q(t)$ son directamente proporcionales a las de la época base q_0 , será

$$q(t) = \lambda q_0 ; \quad \lambda = \text{constante}$$

y en consecuencia, para reemplazar en (24.5.2) tendremos:

$$\eta(t) dt = \frac{\sum q(t) p'(t) dt}{\sum q(t) p(t)} = \frac{\sum \lambda q_0 p'(t) dt}{\sum \lambda q_0 p(t)} = \frac{\sum q_0 dp(t)}{\sum q_0 p(t)}$$

o también

$$\eta(t) = \frac{d\left(\sum q_0 p(t)\right)}{\sum q_0 p(t)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \eta(t) dt &= \int_{t_0}^t \frac{d\left(\sum q_0 p(t)\right)}{\sum q_0 p(t)} = \ln \sum q_0 p(t) \Big|_{t_0}^t \\ &= \ln \sum q_0 p(t) - \ln \sum q_0 p(t_0) \\ &= \ln \frac{\sum q_0 p(t)}{\sum q_0 p(t_0)} = \ln \frac{\sum q_0 p_t}{\sum q_0 p_0} \end{aligned}$$

Escribiendo p_t por $p(t)$ y p_0 por $p(t_0)$

El número índice (24.5.3) adquiere entonces la forma

$$\frac{P_t}{P_0} = e^{\ln \frac{\sum q_0 p_t}{\sum q_0 p_0}}$$

y atendiendo a la definición de los logaritmos naturales o de base e,

$$\frac{P_t}{P_0} = \frac{\sum q_0 p_t}{\sum q_0 p_0}$$

expresión que coincide con la fórmula de Laspeyres. De la misma manera puede obtenerse la de Paasch.

24.8 Así mismo si descomponemos los valores monetarios $\sum q(t) p'(t) dt$

de la expresión (substituyendo por comodidad de notación $q(t)$ por q y $p(t)$ por p).

$$\eta(t) dt = \frac{\sum q(t) p'(t) dt}{\sum q(t) p(t)} = \frac{\sum q(t) dp(t)}{\sum q(t) p(t)} = \frac{\sum q dp}{\sum q \cdot p};$$

en grupos diferentes que distinguimos con $\sum_1, \sum_2, \sum_3, \dots$ será

$$\eta(t) dt = \frac{\sum_1 q dp + \sum_2 q dp + \sum_3 q dp + \dots}{\sum q p}$$

Descomponiendo el segundo miembro en tantos quebrados como grupos tendremos

$$\eta(t) dt = \frac{\sum_1 q dp}{\sum_1 q p} \left(\frac{\sum_1 q p}{\sum q p} \right) + \frac{\sum_2 q dp}{\sum_2 q p} \left(\frac{\sum_2 q p}{\sum q p} \right) + \frac{\sum_3 q dp}{\sum_3 q p} \left(\frac{\sum_3 q p}{\sum q p} \right) + \dots$$

Designando respectivamente por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, a los factores que aparecen entre paréntesis para los grupos $\sum_1, \sum_2, \sum_3, \dots$ y teniendo presente que según (24.4.4) para el índice global es

$$\frac{dP}{P} = \frac{\sum q \cdot dp}{\sum q p}$$

se puede escribir

$$\eta(t) dt = \frac{dP}{P} = \frac{dP_1}{P_1} \alpha_1 + \frac{dP_2}{P_2} \alpha_2 + \frac{dP_3}{P_3} \alpha_3 + \dots$$

siendo, evidentemente

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots = \frac{\sum_1 q p}{\sum q p} + \frac{\sum_2 q p}{\sum q p} + \frac{\sum_3 q p}{\sum q p} + \dots = \frac{\sum q p}{\sum q p}$$

Si consideramos que los valores α_1 , son constantes, por ejemplo se tiene

$$\int_{t_0}^t \eta(t) dt = \int_{t_0}^t \frac{dP}{P} = \alpha_1 \int_{t_0}^t \frac{dP_1}{P_1} + \alpha_2 \int_{t_0}^t \frac{dP_2}{P_2} + \alpha_3 \int_{t_0}^t \frac{dP_3}{P_3} + \dots$$

$$= \ln \frac{P}{P_0} = \alpha_1 \ln \frac{P_1}{P_0} + \alpha_2 \ln \frac{P_2}{P_0} + \alpha_3 \ln \frac{P_3}{P_0} + \dots$$

y pasando de logaritmos a números

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{P_2}{P_0} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{P_3}{P_0} \right)^{\alpha_3} \dots$$

se llega al número índice basado en el promedio geométrico.

Mediante oportunas y convenientes hipótesis pueden obtenerse las diversas fórmulas de números índices vistas, habiéndose señalado las de estos dos últimos párrafos a título ilustrativo.

Aplicaciones de los números índices.

25.1. Para el uso consciente de los números índices debe estudiarse como han sido contruidos y saber así que es lo que expresan y que grado de confianza merecen. Como es natural, no depende ello solamente de los tipos de promedio utilizados, ni de los artículos que se hubieran incluido - si se trata de v.g. de precios- sino también de otras consideraciones según que lo que nos interese sea un Número Índice de precios; un N.I. del costo de la vida; del consumo familiar; del poder adquisitivo de la moneda, etc., atendiendo a la finalidad perseguida.

Suponiendo que haya interés especial en el nivel de precios, uno de los problemas que debe resolverse es el de establecer el número de artículos que ha de considerarse y la mejor receta parece ser la de que cuanto mayor sea el número de artículos y cuanto más representativos, mejor será el número índice. La comprobación puede hacerse mediante una distribución de frecuencia de los precios cuyo histograma pueda considerarse como una buena aproximación de una curva de distribución ideal o típica. El número de artículos debe ser pues, lo suficiente para revelar esa tipicidad (problema estadístico de las curvas de frecuencia; el histograma como aproximación de la curva normal da los errores ó alguna otra de las del repertorio de Pearson; distribución logarítmica, etc.) Como medidas de esa clase están los números índices de la División de Estadística del Trabajo de Los E.E.U.U. que se basan en 404 artículos, que merecen por ello más confianza que los de Bradstreet que se basan solamente en 96, aún cuando estos reúnan ciertas condiciones especiales. Pero no por eso deben menospreciarse los números índices que comprenden a un reducido número de artículos según se desprende de los estudios realizados por Wesley Mitchell, quien ha comprobado, en muchos casos, un comportamiento similar ó inoperado entre números índices contruidos con pocos artículos y los contruidos con varios centenares de ellos. La duda parece surgir cuando se trata de cortos períodos de tiempo, hasta un año, en cuyo caso deben preferirse los números índices que comprenden a un mayor número de artículos siempre -bien entendido- que sean los más representativos del movimiento general.

Para otros fines pueden aceptarse los números índices de un corto número de precios y en particular, si se quiere un N.I. son-sible con el objeto de prever los movimientos generales de precios y no como medida cierta de los cambios del nivel de precios. Índices así, los contruyo el Banco de la Reserva Federal de N.Y.: primeramente el número índice se basaba en 12 artículos fundamentales (materias primas) y luego en 20 artículos. Análogos son los Números Índices de Precios Mayorista del profesor Warren M. Persons (de la Universidad de Howard), basados en solamente una serie de 10 precios con el objeto de reflejar las fluctuaciones del mercado y las fases de prosperidad y depresión de los ciclos económicos.

25.2. Para los números índices de precios mayoristas deben considerarse artículos de producción y de consumo, y en diferentes etapas de su elaboración, media y final, asignando a cada grupo una ponderación de acuerdo a su importancia relativa juzgándola por la venta de mercaderías que los comprenden.

Los precios de las materias primas son, en general, más sensibles a la situación comercial y sus movimientos preceden a los de los

artículos manufacturados, siendo mas violentas sus fluctuaciones por el hecho de que el juego de la oferta y de la demanda actua más libremente respecto de las materias primas.

Pero además los precios de los artículos manufacturados son más estables, por cuanto involucran una considerable proporción de otros factores determinantes del costo, como los gastos generales y la mano de obra que no varían tan facilmente.

Existen así mismo, otras características diferenciales entre productos agrícolas; animales; forestales; minerales; en lo que respecta al comportamiento de los respectivos precios. Los agrícolas -por ejemplo- están notablemente influenciados por el estado del tiempo y condiciones de la cosecha.

Si en la construcción del N.I. de precios mayoristas se da -en consecuencia- preponderancia a las materias primas se obtiene un N.I., demasiado sensible y variable, e inversamente si se la da la preponderancia a los productos elaborados el N.I. resultará más bien lento o poco sensible.

Un número índice de la primera clase acusará fluctuaciones más fuertes que otro de la segunda. Se ha comprobado además, que no existe coincidencia en la fase y amplitud de las fluctuaciones de los precios de productos agrarios, mineros, industriales, bienes destinados a la producción, y los destinados al consumo; de aquí que, considerando también el grado de variabilidad de los precios de ciertos grupos de bienes ó mercancías, pueden elegirse entre estos para construir un N.I. sensible, de modo que sus movimientos sirvan de señas ó síntoma que anticipen las variaciones conjunturales del nivel general de precios, ligadas a las del N.I. sensible, pero que se manifiestan con cierto retardo.

Número índice de precios mayoristas.

25.3. Una síntesis informativa de como ha evolucionado la construcción de un número índice de importancia puede servir para la mejor comprensión del análisis genérico que hemos realizado hasta ahora.

Nos guiamos por la obra de Mudgett (Index Numbers) que examina los índices que publica el Gobierno Federal de los E.U. El Índice de precios mayoristas y el Índice de precios de consumo ambos de la División estadounidense de estadísticas del Trabajo. (U. S. Bureau of Labor Statistics).

El N.I. de precios mayoristas es uno de los más antiguos y de los más ampliamente utilizados. El primer paso fue dado en 1890 por el Sonado Americano designando una Comisión de Salarios, Precios y Transportes con el propósito, entre otros, de hallar una respuesta a la cuestión de si los salarios ó los precios, habían disminuido desde la conclusión de la Guerra Civil. La Comisión eligió al profesor Roland Falkner, de la Universidad de Pennsylvania para la labor técnica de dirigir y supervisar el relevamiento de precios y la construcción de un índice de precios. Se reunieron los datos de precios mayoristas hasta remontarse al año 1840. Los precios se extrajeron de los libros de comerciantes ó industriales y de publicaciones de carácter comercial, calculándose precios anuales medios. Finalmente se tenían 90 series de precios relativos desde 1840 a 1859; y 223 series desde 1860 a 1891, construyéndose un número índice como promedio de esos precios I.t.p. XXV.

Falkner utilizó promedios ponderados, recurriendo para ello al escaso material informativo de que disponía respecto de los gastos de familias; pero su índice más importante, para ese período, fué un promedio simple de precios relativos. Precedentes de esta fórmula fueron: el del índice del Economista de Londres (London Economist index) publicado por primera vez en 1869; y el Número Índice de Sauerbeck publicado primeramente en Londres en 1886.

El informe del Senado fué el comienzo de lo que actualmente es acaso el mayor cúmulo de datos sobre precios, de que dispone la División estadounidense de estadísticas del trabajo (Bureau of Labor Statistics). El segundo paso de importancia, se dió cuando el Departamento del Trabajo de los E.E.U.U. al terminarse la década en 1890, pidió al profesor Falkner que pusiera el índice de la Comisión del Senado, al día. Su informe en el Boletín 27 (1900) del Departamento del Trabajo de los E.E.U.U. presenta datos de precios a intervalos trimestrales desde enero 1890 a julio de 1899; 6 índices por grupos y para todos los artículos combinados para los mismos intervalos. Los índices publicados fueron promedios simples de precios relativos. El informe publica 142 series de precios y 99 series de precios relativos para el período mencionado. El período base comprendió los precios de nueve trimestres, enero de 1890 a enero de 1892 inclusive de modo que centrara en enero de 1891 que era donde terminaba exactamente la serie de la Comisión del Senado. Falkner hizo uso del personal del Departamento del Trabajo de los E.E.U.U. para recoger sus datos.

25.4. Al estudio de Falkner siguió la publicación periódica de precios mayoristas y la de un Número Índice de precios mayoristas (1902) Primeramente los precios se registraban por mes desde 1890 a 1891 inclusive; pero los índices por grupos de artículos y un índice para todos los artículos se construyeron solamente por año y como promedios simples de precios relativos con un amplio período base que abarcaba los años 1890 a 1899. Había en total 251 series de precios relativos que cubrían todo el período y 10 más que cubrían parte del período.

El método iniciado en 1902 se continuó hasta 1913 inclusive como promedio simple de precios relativos con la base en los años 1890-1899. En 1908 surgió un problema nuevo; fué necesario eliminar 11 series de precios y agregar 11 nuevas series (pero no en substitución de las eliminadas). El procedimiento adoptado comprendió dos pasos: primeramente, para el grupo en el cual se incluían los nuevos bienes se calculó el índice del grupo del año 1908 tomando a 1907 como base. Comprendía la lista completa de los nuevos y viejos bienes para esos dos años, pero como es lógico no figuraban los viejos que debían ser eliminados. Se lo multiplicó luego por el anterior índice del grupo del año 1907 con base en 1890-99, calculado con la vieja lista de bienes interpretando al resultado como el índice del grupo de bienes para el año 1908 con base en 1890-99. El mismo procedimiento se aplicó al conjunto de índices. Es evidente que el cálculo se ha basado en el principio de los índices encadenados y que por lo tanto se lo aceptó como medio para solucionar el problema del cambio de lista de bienes. Este paso fué significativo para el futuro pues la División utilizó el método del índice encadenado como parte fundamental de su técnica de cálculo los hasta tiempos relativamente recientes.

25.5. Al término de ese período, en 1913, la División de estadísticas del trabajo llevaba algo más de 250 series de precios de datos mensuales que se extendían hasta 1890 y que habían sido utilizados en la construcción de su índice de precios mayoristas. El informe de 1913, señala que el índice anual desde 1890 a 1913 comprende una lista que varía entre 251 y 261 bienes, en todos esos años. Esos índices se consignan con base anual o mensual desde 1890 y fueron publicados anualmente en los informes de la División sobre precios mayoristas. Más adelante en un apéndice se prolongó el índice anual retrocediendo hasta 1860, utilizando para ello los datos de la Comisión del Senado para los años anteriores a 1890.

Hay otro aspecto que señalar acerca del cambio de orientación en el tratamiento de los números índices por parte de la División de estadísticas del trabajo. Desde los primeros años de este siglo se venían publicando otros números índices de precios mayoristas y entre los más notables, los de Dun y Bradstreet. El Nivel de Precios fué prolijamente contrastado con varios de los índices que pretendían medir ese Nivel de Precios y no es de extrañar que las diferencias observadas entre sus resultados llamaran la atención. Aún cuando todos los índices acusaban un mismo movimiento general del nivel de precios existían diferencias entre ellos y nada más natural que la División gubernamental tomara nota de las críticas, algunas de las cuales dirigidas contra los procedimientos técnicos. Surgió cierta duda sobre si era adecuado un promedio simple de precios relativos y se invitó al profesor Wesley Mitchell para que estudiara los números índices de la División y aconsejara cambios, si ellos fueran necesarios. Hubo dos grandes cambios para el futuro del índice, como resultado del estudio del profesor Mitchell. Ambos se refirieron a la fórmula. Se introdujeron factores de ponderación y se descartó la fórmula del promedio simple de relativos adoptándose la fórmula aditiva (o agregativa) en la que el índice, (aditivo de ponderación fija) se convirtió en un cociente de dos sumas de valores: el valor de un cesto ó canasta bienes valuada con los dos conjuntos de precios, el del año base y el del año dado ó actual. Mitchell insistió especialmente en sus conclusiones finales, en el que llamó "Aditivo ponderado de precios actuales (the weighted aggregate of actual prices) como medida preferible para medir la variación media de la cantidad de moneda requerida para comprar bienes"

Mitchell señaló la necesidad de ponderar los índices y se decidió que como peso de un bien debiera tomarse la cantidad física del bien comprada en un determinado año, reuniendo cifras del año 1907, que era el período más reciente con amplia información disponible procedente del censo de manufacturas pues los censos se realizaban solamente cada 5 años. Esos factores de ponderación se utilizaron hasta 1921, afirmándose la política de utilizar un índice aditivo de ponderación fija. $\sum P_1 q_a / \sum P_0 q_a$.

25.6. En 1921 se revieron los pesos y se amplió notablemente la lista de bienes. La División había expresado la idea de rever cada 10 años la información. Desde 1914 los pesos se basaron en las cantidades compradas en 1909. En 1919 se obtuvieron nuevos pesos del Censo de Manufacturas y de otras fuentes a las que recurriría previamente la División y fueron una razón de importancia para la revisión que se hizo en 1921. Se pensó entonces en ampliar la lista de bienes hasta incluir 404 ítems contra 327 de los años precedentes y sin alterar

la política básica. En las 404 series de precios resultantes, puede estar representado un solo artículo por diversas cotizaciones correspondientes a calidades diferentes ó a mercados diferentes y el precio de cada artículo se multiplica por el factor de ponderación que está representado por la cantidad comprada (o vendida) en 1919. Ejemplo:

<u>artículo ó bien</u>	precio medio por libra en 1919.	ventas en 1919 libras.	
	p	q	p.q
Algodón mediano. N.Orleans.	0,319	3807000000	1214400000
Algodón superfino. N. York.	0,325	1903000000	618600000

Estas operaciones se hacen en las 404 series de precios y la suma de la última columna, $\sum p q$, da el número índice para el período fijado, que este caso es el año 1919. Estas sumas se expresan tomando como base las del año 1913, que se equiparan a 100.

El índice se basa pues en los precios mayoristas de un mismo conjunto de artículos. El grupo es siempre el mismo pero su costo total varía al variar los precios. Se han hallado los subtotales para nueve grupos de bienes ó artículos y se publican los números índices correspondientes a cada grupo y el índice general. Los grupos de referencia son: (1) Productos agrícolas; (2) Alimentos; (3) Tejidos y ropa; (4) Combustibles y alumbrados; (5) Metales y productos metálicos; (6) Materiales de construcción; (7) Productos químicos y drogas. (8) Ajuar. (9) Varios.

25.7. El número índice se mantuvo con base fija y calculada por el método aditivo de ponderación fija, con la misma base del año 1913 pero con los nuevos pesos de 1919 y la lista de artículos más amplia, durante los años 1921 a 1926, reconstruyéndose los números índices de los años anteriores para formar una serie ininterrumpida con los nuevos índices futuros.

Las diferencias de tratamiento en el período 1921-26, respecto de los períodos anteriores fueron esencialmente dos: la revisión de los pesos; 2ª ampliación de la lista de artículos. Puesto que los pesos, la lista de artículos y la fórmula se conservaban en todo el período, el índice ganaba una cierta estabilidad de forma y de contenido. Pero hubieron de rehacerse los índices para el pasado hasta llegar a 1890 para hacer comparables todos los términos de la serie. Esa necesidad de rehacer cálculos no puede evitarse si se agregan nuevos ítems ó cuando a consecuencia de haberse conseguido ciertos precios de años anteriores, se decide hacerlos figurar en el índice.

25.8. Para el período siguiente 1927-1936 se volvió a cambiar nuevamente de forma y contenido el número índice: la lista de bienes, la base y los pesos.

En 1927 la lista se amplió de 404 a 550 artículos y en 1931 se la llevó a 784 series, cambios que implicaron dos conjuntos de cálculos: primamente se rehizo la valuación de la lista de bienes de 1926 a 1923, y se calcularon nuevos índices para incluir los nuevos datos. Luego, con la lista de los 784 artículos de 1931, se rehicieron todos los índices mensuales hasta llegar a 1926.

Para los nuevos índices iniciados en 1927 se trasladó la base a 1926 para que las comparaciones actuales fueran más significativas. Los repetidos cambios de pesos y del número de artículos practicados desde 1913 exigieron que para la construcción del índice modificado se utilizara el procedimiento del índice encadenado, construyendo índices de bases recurrentes ó sucesivas con el objeto de encadenar ó empalmar los índices de los dos períodos consecutivos en que se producían cambios. Se utilizó el empalme en 1908 al cambiar notablemente la lista de artículos y repetidamente desde que se adoptó la fórmula aditiva en 1914. Así cuando se presentaba un cambio de pesos ó de bienes se calculaban dos suma de valores monetarios $\sum p.q.$ para los períodos en cuestión; uno basado en los pesos y lista de bienes comunes al año precedente y otra con los pesos y lista de bienes comunes a los años siguientes. Este es el ejemplo típico del principio del índice encadenado extensamente aplicado por la División de estadística del trabajo durante el período 1927-1936, introduciendo nuevos pesos cada dos años.

25.9. En 1937 se volvió al índice de base fija: método aditivo de ponderación fija. La época base fué el año 1926 y los pesos un promedio estimado de las cantidades vendidas en 1929-30-31. El nuevo índice desde 1937, solucionó el problema de los factores de ponderación no permitiendo cambiarlos sino aproximadamente por décadas, y rehaciéndose los índices hacia atrás. En lo que respecta a la lista de bienes, no fué posible liberarse de la admisión de nuevos artículos y de prescindir cada tanto, de algunos según pierden ó ganan importancia en el mercado. En 1948 el índice comprendía 850 series de precios sin que haya trascondido los detalles de la concatenación de los índices.

I.t.p. XXV.

INDICE DE LOS PRECIOS DE CONSUMO.-

26.1.- Este índice es el que sigue en importancia al de precios mayoristas que publica la División de estadísticas del trabajo de los E.E.U.U. que recién desde 1921 elaboró de manera continua el índice de precios de consumo aplicando la técnica y métodos desarrollados para el índice de precios mayoristas. Probablemente no hay otro índice en los E.E.U.U. más ampliamente utilizado y cuyas variaciones se sigan con mayor interés. Otros índices anteriormente contruídos durante la 1ra. guerra Mundial se utilizaron en las negociaciones de salarios cuando los precios de guerra iban en aumento y el índice permanente que luego se estableció fué ~~de~~ de esos días un factor constantemente observado en los ajustamientos de salarios en gran escala. En la 2da. Guerra Mundial se reconoció que a este índice como una medida del aumento de los precios de consumo entre enero de 1941 y mayo de 1942 y la Junta Nacional de Trabajos de Guerra (National War Labor Board), lo adoptó como base para el reajuste de salarios en todas las industrias. El índice tuvo otras aplicaciones: (1) como base para determinar salarios reales; (2) como guía de la política económica general en materias tales como control de precios ó control de alquileres; (3) en cotejos internacionales; (4) en el ajustamiento de subsidios de ayuda, desocupación y otras compensaciones y (5) como medida general del nivel precios en contratos de largos plazos.-

26.2.- Estudios del costo de la vida en sectores particulares de la industria ó en ciertas localidades de los E.E.U.U. precedieron por muchos años a los índices sobre consumo. En 1890 se publicó una encuesta de 3260 familias de las industrias del hierro, acero y conexas; y en 1891 una encuesta de 5284 familias de las industrias de algodón, lana y vidrio. Esos primeros estudios fijaron normas. El 18º informe anual del Comisario de Trabajo de los E.U. (U.S. Comisioner of Labor) de los años 1901-02, contiene un estudio de 25,440 familias de los principales centros industriales de 33 estados. Aún cuando tales estudios preceden esencialmente a todo índice general de precios de consumo pues dan origen (1) a las listas de bienes comprados por los consumidores y (2) a las cantidades e importos gastados en esos bienes, no fueron seguidos de inmediato por la construcción de esos índices, sino cuando la División de Estadísticas del trabajo inició un índice del costo de alimento de 1903.- Durante la 1er. Guerra Mundial los reajustes de salarios especialmente en centros de rápido desarrollo en tiempos de guerra como en el de las construcciones navales se complicaron con los desusados aumentos de los precios minoristas. Uno de los argumentos más fuertes de los trabajadores en demanda de más altos salarios fué que el mayor costo debía cubrirse con salarios, pues sino los trabajadores serían sacrificados en el esfuerzo de guerra en términos de un menor tenor de vida que presumiblemente disminuiría su eficiencia. Se construyeron durante ese período varios índices del costo de la vida según la denominación que se les dió.-

26.3.- Los índices de las épocas de guerra tuvieron como consecuencia sentar un firme precedente del reajuste de salarios basado en las variaciones del costo del consumo. La norma fué en realidad, aplicada en un período de precios crecientes y podría esperarse que los trabajadores presionarían tales reajustes solamente durante la suba de precios. Consecuente con esa lógica el paso próximo consistió en la obtención continuada y regular de índices del costo de la

vida lo cual requería una información y estudios al día de los gastos familiares. La División organizó una encuesta de gastos entre las familias de trabajadores durante los años 1917-1919.-

Esa encuesta fué la base del primer índice del costo de la vida ó índices de precios de consumo construidos permanentemente por la División de estadísticas de trabajo. Comprendía 12,000 familias (raza blanca) de 92 ciudades, y ciudades menores de 42 estados. El promedio de números de personas por familia fue de 4.9 para el grupo total; el gasto anual medio por familia fué de \$ 1434, y el ingreso anual medio de \$ 1513. Esos promedios fueron de importancia para la construcción del índice pues la lista de bienes y las cantidades que servirían para la ponderación, deben necesariamente basarse en promedios. Como para cada ~~grupo de~~ construyó un solo índice, no era justamente aplicable a todas las condiciones necesariamente diversas de todas las familias. Debió aplicarse a una familia tipo del grupo, determinada mediante alguna forma de promedio. La información recogida en esa encuesta fué la base de la primer publicación regular del índice del costo de la vida por la División.-

26.4.- En cierto modo ese primer índice regularmente publicado fijó normas que se han mantenido sin modificación hasta el presente si bien hubo importantes cambios en lo que respecta a la precisión de las cifras pero no a la forma. El índice ha sido siempre del tipo aditivo ponderado, elección hecha por influencia de Mitchell y su estudio de 1915 y esa misma fórmula utilizada también para toda clase de índices no tanto por el prestigio creciente de Mitchell como por la enorme difusión del boletín que dirigía entre los interesados en números índices.-

Otro aspecto del índice del costo de la vida se refiere a la clase de costo de la vida que debía medirse. Desde un comienzo midió el costo de la vida de los sectores de menor ingreso en unas pocas grandes ciudades. Como generalmente se hace el índice está proyectado para asalariados y empleados de modestos ingresos que trabajan en grandes ciudades.

Sectores de menores ingresos, pero no de los más bajos ingresos, fué motivo de discusión durante los períodos de los altos precios de guerra, pues fueron específicamente los trabajadores de menores salarios de los centros en que se desarrollaban las industrias entonces los que crearon el problema del reajuste de salarios. Se concentró la atención en las más grandes ciudades y en las industrias primarias de importancia comprendidas evidentemente en el área del Ier. índice de 1917-1919, publicándose índices para 32 ciudades. Esta modalidad no ha sido alterada hasta el presente si bien se han agregado dos ciudades.-

El índice comenzó entonces, como índice aditivo ponderado de familias de ingresos módicos de las áreas industriales más importantes y grandes ciudades de los E.E.U.U. y se ha continuado así durante las tres primeras décadas de su existencia.-

26.5.- La primer publicación permanente de un índice del costo de la vida por la división arranca de 1921. El índice se extendió retrospectivamente por intervalos anuales a veces hasta 1917 y otras hasta 1914 apareciendo ~~corrientemente~~ cada trimestre, con los índices por grupos de bienes y por ciudades. Desde un comienzo los gastos totales de familia se clasificaban en 6 grupos y se construyeron índices parciales, uno para cada grupo de bienes y un índice global,

para cada una de las 32 ciudades. Así se continúa aún haciendo índices para los 6 grupos de bienes y las mismas 32 ciudades pero se han agregado dos ciudades más.-

El cuadro que figura señala la relación entre los índices básicos, índices de grupos de bienes por ciudad, (City Groups Indexes) y los índices compuestos para cada ciudad y para los E.E.U.U. construido con los índices básicos.-

Índices de grupos de bienes por ciudad é índices compuestos

Grupo de bienes	número de orden de la ciudad							E.E.U.U.
	1	2	3		30	31	32	
Alimentos								
Ropa								
Alquiler								
Comb. y luz								
Menaje ó (artículos de hogar)								
Varios	↓	↓	↓		↓	↓	↓	
Todos los bie- nes	↓	↓	↓		↓	↓	↓	

Como se ha dicho, los índices básicos son los índices del grupo de bienes de cada ciudad que ocupan la parte central del cuadro. Las flechas señalan la fuente de los varios índices compuestos: (1) índices de cada grupo de bienes para los E.E.U.U. (índices nacionales) se construyen combinando los de las diferentes ciudades para cada grupo cifras sobre una misma línea horizontal y (2) El índice de todos los bienes para cada ciudad y para los E.E.U.U. se construye combinando los varios índices de grupos correspondientes a esa ciudad o E.E.U.U. (cifras contenidas en la misma columna).-

El método de construcción comprende entonces tres partes:

- 1º Construcción de índices para cada grupo de bienes en cada ciudad.-
- 2º Construcción del grupo de índices para los E.E.U.U.
- 3º Construcción de índices para el conjunto de bienes para cada ciudad y para los E.E.U.U.

26.6.- Los índices se construyen con la fórmula aditiva de ponderación fija

$$P_{k/o} = \frac{\sum P_k q}{\sum P_o q}$$

indicando con o la época base (año 1913); con k la época actual y con q las cantidades provenientes de la encuesta 1917-19 de los gastos de familia.

Cada vez que hubo necesidad de cambiar la lista de bienes o los factores de ponderación se recurrió al principio del índice encadenado ya descripto al tratar de los precios mayoristas

El grueso del trabajo reside en el cálculo de los términos $\sum p_k q$ (para $k = 0, 1, 2, \dots$). La lista de bienes apropiada al sector económico cuyo costo de la vida quiere medirse se obtuvo de la encuesta 1917-19, seleccionando los bienes más representativos. La primera lista comprendía 165 bienes y servicios diferentes, además del alquiler.

El primer índice de grupo por ciudad se obtuvo como cociente de dos sumas: $(\sum p_k q) / (\sum p_0 q)$ y con los 32 índices así obtenidos se construyó el correspondiente a los E.E.U.U. (si bien utilizando para los alimentos como precios p_k al precio medio de 51 ciudades) obteniéndose la suma.

$$\sum_{i=1}^{32} \sum p_k q.$$

que corresponde a las 32 ciudades y proceder luego a la división por

$$\sum_{i=1}^{32} \sum p_0 q.$$

Se comprende fácilmente el procedimiento utilizado y no merece la pena extenderse en otros detalles.

26.7. En 1931 se propusieron nuevos métodos de ponderación los índices en tanto se pudieron conseguir nueva información respecto a los gastos de familia, pues por el tiempo transcurrido desde 1917-19 los hábitos de consumo habrán cambiado notablemente.

Algunos bienes eran nuevos -rayón por ejemplo, ciertos artículos eléctricos- y una gran variedad de bienes de consumo eran ahora accesibles y adquiridos por obreros y empleados. Otros bienes fueron substituidos por los cambios de moda y de costumbre.

La encuesta realizada en 1934-36 da los detalles de todos los gastos de familia para un total de 14,469 familias contra 12,096 que comprendía la encuesta de 1917-19. No obstante algunas otras diferencias de la encuesta hay cotejos interesantes. Por ejemplo:

DISTRIBUCION PORCENTUAL DE LOS GASTOS POR FAMILIA

EN LAS DOS ENCUESTAS. (E.E.U.U.)

Grupo de bienes :	Encuesta 1917-19	Encuesta 1934 - 36
Alimentos	37,5	34.0
Ropas	15,5	10.3
Alquileres.	13.6	17.5
Combustibles, electricidad y hielo	4.8	6.7
Artículos de hogar.	4,4	4,0
Seguros y otros ahorros	7.2	0.7
Varios.	26.0	26.8
	100.0	100.0

26.8 El índice de precios de consumo fue publicado dos veces por año desde 1925 a 1935 y trimestralmente después desde 1935 hasta septiembre de 1940 haciéndoselo luego sobre la base de la publicación mensual.

Se revisó la lista de bienes, a raíz de la encuesta que proporcionó nueva información sobre los gastos de familia y es interesante comparar su contenido primitivo con el nuevo.

NUMERO DE BIENES Y SERVICIOS EN LOS INDICES DE PRECIOS DE CONSUMO

Grupo de bienes	Indice 1919	Primitivo 1939	Nuevo indice 1939
Alimentos	42	84	54
Ropas	61	63	48
Combustibles, electricidad y hielo. .	6	6	10
Artículos de hogar.	31	35	33
Varios.	35	33	60
I.t.p. XXVI	165	202	198

Después de 1941 muchos de los bienes que se habían incluido en el índice de precios de consumo en la revisión de 1940 comenzaron a desaparecer del mercado por haberse detenido su producción, para facilitar el esfuerzo nacional en la producción de artículos de guerra. En diciembre de 1942, la alteración de los hábitos de consumo fueron tales que debieron suprimirse los bienes siguientes.

Automóviles	Aspiradoras
Elásticos metálicos para cama	Enaguas de seda
Máquinas de coser	Máquinas de lavar
Medias de seda	Colchones de muelles interiores
Radios	Estufas de gas
Refrigeradores	Artículos de seda
Sofás	

Si aumentó la ponderación de los gastos por reparación de automóviles, uso de transportes públicos y viajes en ómnibus; artículos de rayón; se disminuyó por el menor consumo de nafta, aceite y "fuel-oil".

La composición de los alimentos se revisó en marzo de 1943, para tener en cuenta el racionamiento impuesto a causa de la guerra.

Todo esto debió como es natural, reverse una vez terminada la 2da. Guerra Mundial.

LINEAMIENTOS PARA EL INDICE DEL COSTO DE LA VIDA

26.9 Resumiendo conceptos referentes al índice que mide variaciones del costo de la vida señalamos dos aspectos esenciales: Uno es la diferencia de precios de los varios artículos comprendidos en el consumo familiar y el otro es la ponderación del precio de cada artículo o grupo de artículos de modo que esté representado debidamente el costo de la vida en su conjunto. Es evidente -como se ha dicho- que el costo de un sobretodo pesará más en el presupuesto familiar que el precio de un par de zapatos ó de un sombrero, pero un sobretodo dura varios años en tanto que muchas personas compran zapatos y sombreros cada año al extremo de que estos artículos sobrepasen entre sobretodo y sobretodo, al costo del primero.

Para determinar las bases de ponderación se realizan las encuestas familiares acerca de los gastos realizados en un año, agrupadas comúnmente en alimentación, indumentaria, vivienda, menaje, artículos para el hogar, luz y combustibles y otros, en planillas preparadas especialmente en las que pueden detallarse los artículos, su número, costo, etc., para cada una de las personas que integran la familia

Los agentes ó enumeradores ejercitados visitan los hogares de los trabajadores -por ejemplo- entrevistando a las dueñas de casa y otros miembros de la familia para conseguir la información más completa posible; ingresos y gastos de esa familia.

Esas planillas se vuelcan en otras para hallar las cantidades medias consumidas por familia de cada uno de los artículos mencionados en el presupuesto familiar y constituyen el peso apropiado de los diversos artículos.

Obtenidos los pesos se averiguan luego los precios de los varios bienes y sus cambios en el tiempo. El número de artículos es a veces tan grande que no es factible conseguirlo para todos siendo necesario proceder a una selección representativa de cada uno de los grupos principales.

Los precios se consiguen v.g. con detalles suministrados por comerciantes minoristas representativos, con los que se ha convenido esa información. Artículos como carbón de leña, gas, electricidad etc., se averiguan expresamente ó son comunicados por las mismas empresas proveedoras, estando a veces fijados legalmente.

Los negocios elegidos conviene que estén diseminados por la zona investigada.

Para otros precios se envían agentes especiales a averiguarlos y en última instancia se los estima por similitud con otros artículos.

Se obtendrán así los cambios de costos de grupos de bienes que pueden ponderarse de acuerdo con la importancia relativa que ellos tengan en el presupuesto familiar, a fin de obtener el índice de costos buscados.

Salarios reales o Poder adquisitivo de los salarios

27.1.- Como importante aplicación de los números índices nos ocuparemos del poder de compra o poder adquisitivo de los salarios resumiendo en parte, el conceptuoso informe de la Oficina Internacional del Trabajo: "International Comparisons of Real Wages": "A Study of Methods"; (Comparaciones Internacionales de Salarios Reales, un estudio de los métodos aplicables). Ginebra 1954.

La estructura del mundo actual se caracteriza por marcadas diferencias del poder adquisitivo de los salarios a través del tiempo y del espacio. El cotejo de salarios reales permite medir el bienestar material y progreso de los trabajadores; es útil para el análisis de la economía y una guía para quienes deciden en política social y económica.

Las comparaciones en el tiempo del movimiento de los salarios en un mismo país reflejan el progreso material. Los números índices de los salarios sirven para relacionar salarios y ocupación, producción y consumo en los análisis del ciclo económico y de las causas que generan la prosperidad y depresión, y formular la teoría económica.

La comparación entre países del movimiento de los salarios en el tiempo es igualmente importante; se utiliza para analizar el flujo internacional de bienes y población; y la determinación de políticas de salarios, precios y tarifas así como para medir el progreso relativo del trabajo en los diferentes países.

La comparación de salarios reales entre diversos lugares da objetividad al cotejo pues los salarios nominales (salarios monetarios) ocultan su poder de compra (poder adquisitivo) por lo que sirve para proyectar y prever el futuro económico.

Información sobre los salarios reales interesan para el estudio de las relaciones económicas internacionales, política de balances de pagos; importaciones y exportaciones; competencia internacional; valuación de las fuentes de materias primas y mercados de productos terminados; en problemas de estabilización y circulación monetaria.

También interesa para el estudio de la productividad y grado de ocupación. Finalmente, todo país, al considerar su política social y bienestar de su población, se interesa en la comparación del nivel de los salarios reales con los de otros países.

Tales cotejos pueden medir el progreso alcanzado o previsto.

27.2.- Los salarios reales son una primera aproximación del nivel de vida, pero son conceptualmente diferentes. Como nivel de vida puede considerarse al representado por el total de bienes y servicios consumidos en su más amplio sentido. Pero como algunos bienes y servicios no se compran, sino que los proporciona libremente la naturaleza y otros son intangibles, el concepto de nivel de vida no pueda ser un concepto exclusivamente monetario.

El Departamento de Agricultura de los E.E.U.U. ha construido Números Índices del Nivel de Vida comprendiendo a factores no monetarios como la proporción de granjas provistas de electricidad o de automóvil. Se han considerado también factores como la educación y la oportunidad de aprovechar las horas libres.

El concepto monetario que más se aproxima al del nivel de vida es el de los ingresos reales, que se relaciona con el costo de los bienes y servicios que los individuos o familias, pueden adquirir.

Los ingresos reales no se corresponden necesariamente con el sa

larío real, y puede medirse la diferencia entre ambos, estadísticamente. Por ejemplo: (Anuario de Estadísticas del Trabajo 1953-54):

País	Fecha	Distribución porcentual de los ingresos en la familia		
		Ganancias del jefe de familia	Otras ganancias	Otros ingresos
Canadá	1937-38	92,4 %	4,0 %	3,6 %
Suiza	1952	85,8	4,7	9,5
Japón	1953	77,3	14,2	8,5
India (Bombay)	1944-45	66,9	19,9	13,2
Bélgica	1948-49	65,4	8,8	25,8
Yugoslavia (Servia)	1952	49,4	36,5	14,1

Como puede observarse el ingreso de las familias, es notablemente diferente tanto en lo que respecta a las ganancias individuales como las correspondientes a la familia.

Puesto que los elementos que se incluyen en los "otros ingresos de familia como los procedentes de inversiones, ventas de artefactos producidos en el hogar en horas extras, etc., solamente pueden manifestarse en los estudios del nivel de vida familiar y no figuran incluidos en las estadísticas de remuneraciones, es evidente, entonces, que no pueden generalmente comprenderse en las comparaciones de salarios reales.

El salario real mide aproximadamente el nivel de vida, pero es esencialmente una medida de los bienes y servicios que pueden adquirirse con la remuneración del trabajo.

27.3.- Un primer distinguo entre los salarios monetarios es el de remuneración de personas y remuneración de actividades. Si se desea comparar la remuneración de las personas en diferentes países, la cifra más representativa es un promedio general de remuneraciones obtenido con abstracción de las actividades. Pero tales cotejos no siempre interesan y se prefieren las de salarios correspondientes a un mismo trabajo.

Los salarios están, de hecho, vinculados a la actividad en que el asalariado se desempeña, puesto que constituyen la remuneración del trabajo realizado. En tanto que los salarios se establecen generalmente por ocupaciones, evidencian también diferencias según la industria.

Para comparar remuneración por actividades es pues esencial elegir actividades similares, y como la estructura ocupacional en las industrias varía comúnmente de un país a otro, cabe que el cotejo de salarios medios comprenda a dos elementos: diferencias en la remuneración de actividades específicas (ocupaciones) y diferencias en las proporciones con que esas ocupaciones están representadas en las industrias de

cada uno de los países comparados. Si la comparación se refiere a remuneraciones del mismo trabajo en diferentes países (o períodos de tiempo) el salario debiera ser el de ocupaciones específicas.

27.4.- Sean por actividades o por personas es necesario precisar los diferentes tipos de salario que miden remuneraciones conceptualmente diferentes. Para ocupaciones individuales suele darse en forma de tasa, un tanto por hora, por día, etc., y para industrias o unidades económicas más amplias, en forma de salario medio.

Las tasas de salario (salarios por hora, por día, etc.) miden remuneraciones nominales o potenciales del trabajador, pero los salarios deben ser remuneraciones efectivas, actuales o percibidas. Las diferencias de tratamiento de esos conceptos en los diferentes países deben ser analizadas aún cuando parezca que las cifras miden lo mismo. Se da el caso de el caso salarios o tasas mínimas o básicas o para determinados grados de especialidad, antigüedad, etc., en cada ocupación. Los salarios pueden limitarse a lo pagado por período de tiempo más extras por horas extraordinarias: o pueden incluir pagos en especie.

27.5.- La unidad de tiempo utilizada para medir los ingresos influye notablemente en los resultados. En el caso de un tanto por pieza o a destajo, no hay problema pues el monto ganado a destajo puede reducirse a un salario por semana, por mes o por año, o dividirlo por el número de horas trabajado para obtener el promedio por pieza y por hora. No parece muy claro el cálculo del pago a destajo sobre la base de una hora normal de trabajo, o día normal. El mismo problema se presenta cuando las remuneraciones adicionales o incentivos constituyen una parte apreciable de la ganancia total; en tal caso la remuneración puede considerarse como suma de dos componentes: una por pieza y otra por tiempo, tomando en cuenta la incidencia por pieza de la remuneración total. En general se trata de evitar que las comparaciones internacionales se hagan sobre la base de trabajo a destajo o con incentivos para un país, y sobre la base de períodos de tiempo en otro, pues la diferencia en la forma de pago implica a menudo diferencias en la naturaleza (o intensidad) del trabajo.

Los salarios tasados por tiempo pueden computarse sobre una base normal o tiempo estricto. Comúnmente representa la remuneración total pagada en un cierto período de tiempo dividido por el número de horas, días o semanas efectivamente trabajadas. La influencia de la remuneración por tiempo extra, se extiende así hasta cierto punto al promedio horario o por hora. La influencia de elementos como el sub-empleo, licencias y desocupación temporaria se manifiesta fuertemente en el cálculo de las remuneraciones anuales y con menos intensidad en las estadísticas de salarios para más cortos períodos de tiempo.

La hora parece ser la unidad de referencia menos afectada por los elementos extraños al salario que entran en las estadísticas de remuneraciones. En tanto que los ingresos anuales por todo concepto representa la mejor aproximación a los niveles de vida, y al salario anual la estimación más precisa, el salario real en sentido estricto, definido como el poder adquisitivo de los salarios expresados en moneda de bienes y servicios específicos- es la medida más indicada para las comparaciones entre países, sobre la base de la unidad patrón de medida de la remuneración de la clase trabajadora en casi todo el mundo: la hora.

Puede ~~ser ciertamente~~, que países con más bajo salario real por hora, mantenga más alto nivel de vida, trabajando más horas; pero ese factor no entra en las comparaciones de salarios reales como tal, y no afectan el poder adquisitivo de la unidad de trabajo más frecuentemente hallada en el mercado: la hora.

27.6.- Ingresos marginales: La ganancia efectiva del trabajador puede ser aumentada con pagos especiales (v.g. subsidios de familia) que aumentan su poder adquisitivo, o mediante pagos en especie que liberan al salario para gastar en otros bienes y servicios. Como la naturaleza y preponderancia de esas entradas marginales varían ampliamente de país a país, pueden afectar seriamente los cotejos de salarios reales. Así, en muchos países los mineros del carbón reciben libre de cargo o a bajo costo, carbón; los trabajadores con familia numerosa reciben aumentos substanciales como subsidio familiar; en otras partes existen subsidios por casamiento, nacimientos, etc.; el pago de las vacaciones está ya generalizado. A veces, esos subsidios están ligados al salario pero el Estado los reconoce a todos los residentes o ciudadanos calificados del país.

Así mismo existen beneficios sociales ampliamente distribuidos a toda la población: entre ellos los servicios sanitarios, policiales, bomberos, etc., en tanto que los subsidios familiares pueden computarse fácilmente en un porcentaje del salario medio, en muchos casos es virtualmente imposible prorratear los servicios sanitarios o policiales entre los asalariados, aislados de los demás habitantes.

Finalmente existen beneficios diferidos como las jubilaciones y pensiones, voluntarias, ordinarias y por invalidez. Esta clase de beneficios son, en toda época, más bien de valor potencial que de valor actual para las personas actualmente ocupadas aún cuando sería posible calcular el valor descontado actuarialmente de esos beneficios y aplicar parte de ellos al ingreso corriente. Estos beneficios varían notablemente de país a país y pueden en consecuencia distorsionar los cotejos.

Baste pensar, tomando como ejemplo lo ocurrido en nuestro país con la enorme depreciación monetaria, el haber incluido para computar en el nivel de vida el costo actuarial de los beneficios prometidos en los regímenes jubilatorios, muy superiores desde el punto de vista numérico a los estimados con los descuentos jubilatorios vigentes en el año 1943 y reducidos luego esos beneficios sensiblemente a una décima parte, como consecuencia de la depreciación aludida.

En resumen, las ganancias del trabajo utilizadas en las comparaciones de salarios reales debieran comprender, en lo posible, los ingresos marginales directamente asociados a los salarios y expresables en términos monetarios, como los subsidios familiares; pagos en especie y valor estimado de las vacaciones y feriados; y no debieran comprender los servicios generales a toda la población, como los policiales o sanitarios, etc. .

27.7.- Al lado de los ingresos marginales que mejoran el poder adquisitivo inmediato hay ciertas deducciones que lo aminoran; y si bien son a veces importantes no resulta prácticamente posible considerarlas en los cotejos de salarios reales.

Las dos deducciones más frecuentes son las contribuciones para la seguridad social y el impuesto directo a los réditos. En muchos casos son retenidos por los empleadores y pueden computarse sobre los sueldos; pero a veces no es así y muchos impuestos de carácter social han sido deliberadamente implantados para redistribuir los ingresos de poder adquisitivo; o son solamente una parte de lo necesario para financiar ciertos servicios. Es imposible a veces, tener en cuenta esos factores sin un conocimiento de la base impositiva y de la distribución de la renta nacional.

28.1.- Comparar los salarios de diferentes países o de diferentes épocas, exige una serie de salarios monetarios relativos. Para convertirlos en salarios reales relativos, debe calcularse un índice de precios o de costos para estimar el poder adquisitivo relativo o poder de compra relativo entre los países o épocas considerados.

La variedad de los datos referentes a los salarios y las posibles diferencias de concepto crean problemas previos a la comparación de salarios reales. Hay mayor acuerdo sobre la información que se requiere para los precios de consumo así como sobre las definiciones y métodos estadísticos aplicables, pues los problemas teóricos que plantea han sido muy estudiados desde hace más de un siglo, como hemos visto.

Si los asalariados y sus familias de todos los países, consumieran los mismos bienes y servicios en las mismas proporciones; y si ese patrón de consumo no variara con el tiempo, la determinación del poder adquisitivo de los varios destinos del salario, sería relativamente simple. El precio de un cierto surtido (o de una cesta o canasta como suele decirse) de bienes y servicios, adecuadamente ponderados, podría calcularse para cada país (o para cada período de tiempo) y los resultados compararse directamente con la serie de salarios monetarios para establecer su poder adquisitivo. Si por ejemplo el trabajador del país A, que recibe 6 \$ por hora, paga 12 \$ por el surtido y el de otro país B, que recibe 10 \$, lo compra por 24, resulta que el salario real es un 20 % mayor en A que en B pues :

$$\frac{6}{12} \div \frac{10}{24} = \frac{144}{120} = 1,20$$

28.2.- El problema surge del hecho que los trabajadores de los diferentes países (o de las diferentes épocas) consumen diferentes bienes y servicios en proporciones que no responden a patrón fijo alguno.

Teóricamente puede resolverse aproximadamente el problema considerando que las comparaciones por lapsos muy pequeños son válidas pues a los consumidores les resulta prácticamente indiferente la variación de consumo y es razonable admitir que el verdadero número índice de precios está comprendido entre el que resulta adoptando para su construcción la fórmula de Laspeyres y la de Paasch.

La composición del surtido de bienes y servicios, para un país dado, puede variar notablemente en un lapso grande y en consecuencia surge la cuestión de cual surtido considerar. La experiencia ha demostrado que tanto la clase de bienes y servicios elegidos y las proporciones relativas con que están representados en el consumo en diferentes situaciones pueden afectar notablemente las conclusiones de la compara-

ción de los salarios reales.

Frente a la variedad de patrones de consumo entre los países y las épocas, se han desarrollado tres métodos principales para obtener el índice de precios necesario para el estudio de los salarios reales: precio relativo de consumo que se limite a los precios de una misma lista que fija la clase y la cantidad de los bienes y servicios; costo relativo de consumo, en el que la identidad de la clase de bienes y servicios se mantiene pero se procede a un ajuste de las cantidades (subjetivamente) cuando el consumo entre los países o las fechas, es diferente; y el método de costo relativo de equivalentes niveles de vida en los cuales los diferentes bienes y servicios se consideran equivalentes bien sea sobre una base de carácter subjetivo o apoyada en una inferencia de carácter estadístico.

28.3.- En el método del precio relativo de consumo (valor monetario relativo del consumo) se comparan precios, artículo por artículo, para idénticas cantidades de idénticos bienes y servicios. Los precios se ponderan con las cantidades de bienes y servicios consumidos, para obtener una media relativa de precios de consumo o una media de precios relativos de consumo:

$$\frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} = \frac{\sum p_0 q (p_1 / p_0)}{\sum p_0 q}$$

Para fechas o lugares no muy distantes, los índices nacionales de precios de consumo son generalmente de este tipo pues poco varían los bienes y servicios consumidos; pero cuando son muy distantes, las ponderaciones deben reverse periódicamente y construir índices separados de modo tal que se obtenga una larga secuencia de números índices basados en los precios relativos de consumo. Para comparaciones entre lugares, sin embargo, no hay la continuidad entre un país y otro como puede admitirse respecto del tiempo dentro de un mismo país.

En el método del precio relativo de consumo se comparan precios de idénticos bienes, pero se ajustan las cantidades. Por ejemplo, si se comparan países que consumen dos variedades de un mismo artículo, pero en proporciones diferentes. En tal caso pueden combinarse las variedades para componer el número índice asignando una misma ponderación al artículo genérico, pero esa técnica es solamente aplicable si las diferencias no son muy pronunciadas.

En cuanto al método del costo relativo de equivalentes niveles de vida consiste en calcular cual sería el costo del nivel del país A, en el país B y viceversa; pero más bien sirve para medir diferencias de niveles de vida que para los salarios reales.

28.4.- En conclusión: El salario real, como algo diferente del nivel de vida o costo del trabajo, se define al poder adquisitivo del salario monetario en término de bienes y servicios consumidos por el asalariado. Para los cotejos internacionales el concepto más adecuado de salario es

el promedio de ganancia horaria (por hora) en ocupaciones específicas. En principio, tal ganancia debe comprender los pagos en moneda y en especie y los beneficios complementarios directamente asociados a los salarios y expresables en moneda; y deben excluirse los elementos que constituyen una deducción clara del poder adquisitivo. Prácticamente las cifras deben incluir los beneficios más relevantes (subsidios familiares, aguinaldos, pagos en especie, etc.) pero es muy difícil ajustar satisfactoriamente los impuestos y las contribuciones de seguridad social.

En cuanto a los precios, la mejor medida es el precio relativo de consumo del tipo de Laspeyres o de ponderación constante elegida según el propósito. El cociente del Número Índice de salarios al Número Índice de precios dará el Número Índice de salarios reales.

A título de simple ejemplo consignamos los resultados que se desprenden de cifras publicadas en las Síntesis de Estadística Mensual del Ministerio de Asuntos Técnicos:

Años	N.I. de salarios de obreros oficiales	N.I. del Nivel de precios	N.I. de los Sala- rios reales
	S %	P %	S / P %
1943	100	100	100*
1945	103.9	119.4	87.0
1949	294.0	236.2	124.5
1950	337.9	296.9	113.8
1955	599.0	679.7	88.1

BIBLIOGRAFIA

En el texto se hace alusión incidental a algunas obras, pero aquí consignamos aquellas que hemos utilizado preponderantemente para desarrollar el curso, en el orden de importancia con que nos hemos servido de ellas:

IRVING FISHER: The Making of Index Numbers. (A Study of Their Varieties, Tests, and Reliability) 2nd., Edition, N.Y. 1923

WESLEY C. MITCHELL: The Making and Using of Index Numbers. Bulletin of the U.S. Bureau of Labor Statistics. Nº 173 .
Washington -1915

BRUCE D. MUDGETT: Index Numbers, N.Y. 1951

- FREDERICK CECIL MILLS: Métodos Estadísticos Aplicados a la Economía y los Negocios. (Versión española)
Madrid 1935.
- JULES LEJEUNE: Les Méthodes de construction des "Index Numbers",
Paris 1935.
- MAURICE OLIVIER : Les Nombres Indices de la Variation des Prix,
Paris 1927.
- ALBINO UGGE : I Numeri Indici dei Prezzi, (Corso di Lezioni)
Milano 1946
- GUGLIELMO TAGLIACARNE: Il calcolo dei Numeri Indici dei Prezzi.
- ERNESTO CIANCI: La dinamica dei Prezzi.
- GAETANO ZINGALI: Alimentazioni - Consumi - Bilanci di Famiglia.
- MARIO SAIBANTE: Indici dello Stato e del Progresso economico,
(Tratato Elementare di Statistica diretto da
CORRADO GINI) Milano 1935
- ALFRED COWLESS: Common - Stock Indexes . 2nd. Edition.
Bloomington - Indiana 1939

TEORIA Y PRACTICA DE LOS NUMEROS INDICES

Indice analítico

INTRODUCCION (Pág. 1 a 8)

1.1- Concepto de número índice. 1.2- Precio como relación de cambio. 1.3- Dimensiones de la Física. 1.4- Dimensión de los precios. 1.5- Unidad común para expresar los precios 1.6- Propiedades operatorias de las dimensiones 1.7- Dimensión de productos y cocientes de precios 1.8- Precios relativos 1.9- Ejemplos.

PRELIMINARES DE METODOLOGIA ESTADISTICA (Pag. 9 a 11)

2.1- Clasificaciones de la Metodología Estadística 2.2- Cuadro numérico de distribución de una variable estadística discreta 2.3- Simplificación de las distribuciones mediante el clase-intervalo ó intervalo de clase 2.4- Distribución de variables estadísticas continuas.

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA (Pág.12 a 15.)

3.1. Representación por segmentos. 3.2- Representación por áreas rectangulares. Histograma. 3.3- Histograma de variables discretas. 3.4- Histogramas con clase -intervalo diferentes. 3.5- Polígono de frecuencia. 3.6- Polígono de frecuencias acumuladas. Ojiva.

PROMEDIOS (Pag. 16 a 18)

4.1- Media aritmética simple. 4.2- Arreglamiento de las observaciones para el cálculo de la media aritmética. 4.3- Media aritmética de una variable continua presentada como tablas de frecuencias. 4.4- Item de una variable discreta con clase-intervalo. 4.5- Dimensión de la media aritmética.

METODO ABREVIADO PARA EL CALCULO DE LA MEDIA ARITMETICA (Pag.19 a 25)

5.1- Cambio de origen y de escala de la variable 5.2- Ventajas del procedimiento de cálculo con el origen y la escala auxiliares. 5.3- El Modo ó valor modal 5.4- Modo teórico en las distribuciones de frecuencia. 5.5- Procedimiento gráfico simple para determinarlo. 5.6- Interpretación analítica del procedimiento. 5.7- Ejemplo numérico con clase-intervalos iguales. 5.8- Ejemplo numérico con clase intervalos desiguales. 5.9- Regla empírica que rige el Modo, la Media y la Mediana.

MEDIDAS DE VARIABILIDAD O DISPERSION (Pag. 26 a 30)

6.1- Medidas más simples: Campo de variabilidad (Range) y Desvío Medio Desvío Mediano. Ejemplo numérico. 6.2- El desvío medio cuadrático ó Desvío tipo. Ejemplo con cálculo directo. 6.3- Coeficiente de variabilidad ó de variación 6.4- Distancia intercuartil.

METODO ABREVIADO PARA EL CALCULO DEL DESVIO MEDIO CUADRATICO Y DEL DESVIO MEDIO (Pág. 31 a 34)

7.1- Expresión del desvío medio cuadrático mediante el uso del origen y escala auxiliares para la variable. 7.2- Ejemplo numérico con una tabla de frecuencias. 7.3- Simplificaciones análogas para el cálculo del desvío medio y ejemplo numérico con la tabla de frecuencias.

VALORES MEDIOS (Pág. 35 a 39)

8.1- Medias proporciones clásicas. 8.2- Condiciones que las caracterizan. 8.3- Construcción geométrica de las medias clásicas y su relación. 8.4- Progresiones clásicas. 8.5- Generalización de las tres medias clásicas. 8.6- Idem agrupando los valores de la variable. 8.7 Frecuencias absolutas y relativas. 8.8- Factor de ponderación, peso de las observaciones. Interpretaciones de la media aritmética ponderada con la balanza.

PROPIEDADES DE LAS MEDIAS (Pág. 40 a 43)

9.1- Expresión general de valores medios. 9.2- Caracter monotorio de los valores medios atendiendo a su orden. 9.3- Obtención particular de la media geométrica como valor medio de orden cero. 9.4- Media de orden - . 9.5- Demostración del caracter creciente de las medias con su orden.

DESVIOS MEDIOS Y MEDIDAS DE POSICION (Pág. 44 a 50)

10.1- Expresión general de desvíos medios. 10.2- Definición de valores medios por la condición de hacer mínimos los desvíos medios. 10.3- Caso particular de la media aritmética que hace mínimo la suma del cuadrado de los desvíos. 10.4- Demostración de que la mediana hace mínimo la suma de las diferencias numéricas de los desvíos. 10.5- Demostración de que el Modo hace mínimo a la suma de las potencias de los desvíos cuando dicha potencia tiende a cero. 10.6- Media de los valores extremos de la variable.

MEDIAS HOMOGENEAS, TRASLATIVAS Y ASOCIATIVAS (Pág. 49 a 55)

11.1- Medidas de posición, modo, mediana, media aritmética y media de los extremos. 11.2- Propiedad homogénea de las medias. 11.3- Propiedad asociativa de las medias. 11.4- Uso de la propiedad asociativa para la incorporación de un nuevo grupo de observaciones. 11.5- Propiedad traslativa de las medias. 11.6- La media aritmética como única media que goza de las tres propiedades.

EL PROBLEMA DE MEDIR LA VARIACION DE LOS PRECIOS Y LA PRODUCCION (Pág. 56 a 59)

12.1- Información estática y dinámica con valores medios. 12.2- Técnica de los números índices. 12.3- Problemas que se enfrentan con números índices. 12.4- Similitud con problemas biométricos demográficos: mortalidad, nupcialidad, etc. 12.5- Problemas económicos que exigen números índices. 12.6- Aplicaciones que dieron origen a los números índices. 12.8- Criterio con que debe construirse un N.I. según Mitchell.

13.1- Ejemplo de utilización de N.I. 13.2- Números Índices simples compuestos. Índices de precios; los 6 tipos analizados por Fisher 13.3 Índices de tipo aditivo ó agregativo simple. 13.4- Deficiencias del tipo aditivo simple. 13.5- Método de la media aritmética simple de precios relativos. 13.6- Método de la media geométrica simple de precios relativos. 13.7- Método de las medianas y del Modo. (Pág. 60 a 64)

MÉTODOS DE PONDERACIÓN DE LOS NÚMEROS ÍNDICES (Pág. 65 a 69)

14.1- Necesidad de ponderar los precios relativos para obtener el N.I. 14.3- Factores de ponderación: precios, cantidades, etc. 14.4- Ponderación en el método aditivo (Laspeyres y Paasch). 14.5- Idem en el método del promedio aritmético de precios relativos (Paalgrave)

15.1- Ponderación en el método del promedio geométrico de precios relativos. 15.2- Ponderación en el método del promedio armónico de precios relativos. 15.3- Coincidencia de métodos aditivos, aritméticos y armónicos. Método de la mediana y del modo. 15.4- Números Índices para el Volumen Físico ó Cantidades de Bienes: adaptación de la fórmulas de los diferentes métodos. (Pág. 70 a 73)

PRUEBAS DE REVERSIBILIDAD (Pág. 74 a 78)

16.1- Diferentes pruebas de reversibilidad. 16.2- Reversibilidad en el tiempo (RT) ó permutación de las épocas base y actual. N.I. progresivo y N.I. regresivo. 16.3- Posible contradicción entre índices que no cumplen la prueba de (RT). 16.4- Medias que satisfacen ó no la prueba de (RT). 16.5- El método aditivo y la prueba (RT). 16.6- Reversibilidad de los factores. (RF) (precio y cantidad)

ERRORES SISTEMÁTICOS DE LAS FÓRMULAS PARA NÚMEROS ÍNDICES (P'g.79 a 83)

17.1- Pruebas mayores de reversibilidad (RT) y (RF). Condiciones que exigen las pruebas. 17.2- Error conjunto: error sistemático; error casual ó desvío errático ó casual. 17.3- Error sistemático inherente al sistema de ponderación. 17.4- Efecto del cambio de ponderación en las fórmulas.

18.1- La desigualdad de Jensen para detectar el error sistemático. 18.2- Aplicación al promedio aritmético ponderado de precios relativos. 18.3- Errores sistemáticos que dependen del sentido de variación de valores monetarios, precio, y cantidades. 18.4- Desigualdades obtenidas como aplicación de la prueba de reversibilidad: con los productos de Índices progresivos y regresivos. 18.5- Clasificación de Fisher de los N.I. progresivos atendiendo a que el error de Ponderación y el Error del tipo de promedio se manifiesta en el mismo ó contrario sentido. El pentadente o tenedor de cinco dientes. (Pág. 83 a 87)

FÓRMULAS ANTITÉTICAS (pág. 88 a 93)

19.1- Fórmulas directas e indirectas para el cálculo de N.I. 19.2- Fórmulas antitéticas respecto del tiempo (AT). 19.3- Detalle de fórmulas (AT). 19.4- Antitéticas respecto de los factores (AF). 19.5- Detalle de fórmulas (AF)

RECTIFICACIÓN DE FORMULAS (Pág. 94 a 96)

20.1- Cruzamiento geométrico de fórmulas. 20.2- Obtención de la fórmula Ideal de Fisher. 20.3- Rectificación de la prueba segunda (RF). 20.4- Obtención de fórmulas (RT) cruzando fórmulas (AT).

PROCEDIMIENTO GENERAL PARA LA RECTIFICACIÓN (Pág. 97 a 102)

21.1- Fórmulas que satisfacen las dos pruebas de reversibilidad (RT) y (AF). 21.2- Rectificación de fórmulas del grupo (AT) para que se cumpla la reversibilidad de dos factores (RF). 21.3- Idem de fórmulas (AF) para que verifiquen la reversibilidad en el tiempo (RT). 21.4- Fórmula "reversibilizadora" ó rectificadora general. 21.5- Fórmulas obtenidas por otros métodos de cruzamiento. 21.6- Cruzamiento de los factores de ponderación.

ELECCION DE LA FORMULA (Pág. 103 a 109)

22.1- Clasificación de Fisher. 22.2- Caso en que no se dispone de factores de ponderación. 22.3- Fórmula aconsejable. 22.4- Caso en que se dispone de información completa. 22.5- Calificación de las fórmulas atendiendo a su diferencia con la ideal de Fisher. 22.6- Resumen de Mudgett de las fórmulas analizadas por Fisher. 22.7- Pruebas suplementarias de los N.I. 22.8- Consejo sobre las fórmulas aplicables.

OBJECCIONES A LA TEORÍA DEL PROFESOR FISHER (Pág. 110 a 113)

23.1- Cuestionabilidad de las pruebas de reversión. 23.2- Observación del profesor Yule. 23.3- Inconveniente práctico de la fórmula ideal. 23.4- Prueba de circularidad. 23.5- Pruebas ternarias y binarias de circularidad. Fórmulas que la satisfacen.

NUMEROS INDICES DE BASE FIJA Y DE BASE MOVIL

24.1- Problemas que crea la inflación monetaria. 24.2- Índice de base móvil. 24.3- Índices concatenados. 24.4- Apologías de los índices encadenados. 24.5- Justificación teórica de División. 24.6- Índice histórico de Foville. 24.7 y 24.8- N.I. como Integrales curvilíneas.

APLICACIONES DE LOS NUMEROS INDICES (N.I.) (Pág. 123 a 128)

25.1- Uso consciente de los números índices. 25.2- Sensibilidad de los números índices. 25.3- El número índice de precios mayoristas de los E.E.U.U.: Método aplicado inicialmente. 25.4- Reformas introducidas. Problema del cambio de lista de bienes. 25.5- Estudio de Wesley Mitchell y cambios aconsejados. 25.6- Revisión de los factores de ponderación. 25.7- Reconstrucción de los índices para hacer comparables los términos de toda la serie. 25.8- Cambio de los factores de ponderación cada dos años en el período 1927-1936. 25.9- Vuelta al número Índice del método aditivo y ponderación fija por décadas.

INDICE DE LOS PRECIOS DE CONSUMO (Pág. 129 a 135)

26.1- Origen del índice publicado por la División de Estadística del Trabajo de los E.E.U.U. 26.2- Antecedentes en estudios del costo de la vida. 26.3- Encuestas de 1917-19. 26.4 Costo de la vida de los hogares de menor ingreso. 26.5- Índices parciales y globales de los diferentes bienes. 26.6- Ajustes sucesivos de los índices. 26.7- Gastos de familias/en-
cuestas 1917-19 y 1934-36. 26.8- Revisión de la lista de bienes. 26.9-
Lineamientos para el índice del costo de la vida.

SALARIOS REALES O PODER ADQUISITIVO DE LOS SALARIOS (Pág. 136 a 140)

27.1- Utilidad de la comparación de salarios reales. 27.2- Medida aproxima-
da del nivel de vida. 27.3- Distingo entre la remuneración de persona-
y de actividades. 27.4- Remuneraciones nominales o potenciales y efecti-
vas. 27.5- Unidad de tiempo para medir remuneraciones. 27.6- Ingresos,
marginales. 27.7- Deducciones para seguridad social e impuestos.

28.1- Salarios relativos. 28.2- Problema de la diferencia de consumo.
28.3- Precio relativo de consumo y costo relativo de equivalentes nive-
les de vida 28.4- Poder adquisitivo del salario monetario de bienes y
servicios consumidos por el asalariado. (Pág. 140 a 142)

BIBLIOGRAFIA (Pág. 142 y 143)

