

ARGENTINA

REPUBLICA



ARGENTINA

SERVICIO ESTADISTICO NACIONAL

CURSO DE

MATEMATICAS PARA MUESTRISTAS

Profesor: Ing. PEDRO DOMINGUEZ

SEGUNDO TOMO

agosto - diciembre 1955

M.m.

18^a Conferencia

14/10/1955

9.7.- PROBABILIDADES TOTALES Y COMPUESTAS

9.7.1.- Sucesos compatibles e incompatibles

Dos sucesos se dicen mutuamente excluyentes o incompatibles, si la presentación de uno de ellos excluye la presentación del otro. Por ejemplo, al arrojar un dado pueden presentarse los siguientes puntos:

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

que son mutuamente excluyentes, ya que si se presenta uno de ellos, no pueden presentarse los demás.-

Dos o más sucesos son compatibles si es posible que se presenten simultáneamente. La obtención de 6 puntos con un primer dado y 6 puntos con un segundo dado son sucesos compatibles puesto que al arrojar dos dados es posible obtener 6 puntos en cada uno.-

9.7.2.- Notaciones

Designemos con U y V la presencia de dos sucesos dados y con $\bar{U}$ y $\bar{V}$ los correspondientes sucesos complementarios, vale decir, $\bar{U}$ simboliza la no presentación del suceso U , y lo mismo con $\bar{V}$. El resultado de n observaciones de estos sucesos pueden tabularse así:

Suceso	V	$\bar{V}$	Total
U	a_1	a_2	$a_1 + a_2$
$\bar{U}$	a_3	a_4	$a_3 + a_4$
Total	$a_1 + a_3$	$a_2 + a_4$	n

donde a_1 indica la frecuencia absoluta de la presentación simultánea

de U y V; a_2 , la frecuencia absoluta de la concurrencia de U y la ausencia de V, etc.-

Además, con $U V$ indicamos el suceso compuesto de que ocurran simultáneamente U y V; con :

$$U \dot{+} V$$

indicamos que al menos uno de los dos sucesos se presenten, es decir, se presente uno al menos de los siguientes sucesos:

$$U \bar{V} ; \bar{U} V ; U V$$

si U y V se excluyen mutuamente, es decir, la presencia de uno de ellos excluye la presentación del otro, entonces, el suceso $U \dot{+} V$ es igual al suceso por el cual se presenta o bien U o bien V, y se indica en este caso con

$$U + V$$

Los tres símbolos:

$$U V ; U + V ; U \dot{+} V$$

pueden por consiguiente ser leídos respectivamente así:

$$\text{ambos } U \text{ y } V ; U \text{ o } V ; U \text{ y/o } V$$

Este sistema de notación puede extenderse con facilidad a más de dos sucesos.-

De la definición de los símbolos anteriores se desprenden las siguientes relaciones:

$$I) \quad U \dot{+} V = U \bar{V} + \bar{U} V + U V$$

II) Si U y V son mutuamente excluyentes o incompatibles es:

$$U + V = U \bar{V} + \bar{U} V$$

si indicamos con:

$$H \{ U \} ; H \{ U V \} ; H \{ U \dot{+} V \} , \text{ etc.}$$

las correspondientes frecuencias, podremos escribir que

$$H \left\{ U \right\} = \frac{a_1 + a_2}{n}$$

$$H \left\{ U V \right\} = \frac{a_1}{n}$$

$$H \left\{ U + V \right\} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{n}$$

Con lo cual se puede construir la siguiente tabla de frecuencias

Suceso	V	$\bar{V}$	Distribución final
U	$H \left\{ UV \right\}$	$H \left\{ U\bar{V} \right\}$	$H \left\{ U \right\}$
$\bar{U}$	$H \left\{ \bar{U}V \right\}$	$H \left\{ \bar{U}\bar{V} \right\}$	$H \left\{ \bar{U} \right\}$
Distribución final	$H \left\{ V \right\}$	$H \left\{ \bar{V} \right\}$	1

De aquí deducimos que:

$$H \left\{ U \right\} + H \left\{ \bar{U} \right\} = \frac{a_1 + a_2}{n} + \frac{a_3 + a_4}{n} = 1$$

I) la frecuencia de un suceso más la de su complementario es igual a 1, es decir, la certeza.-

$$H \left\{ U \right\} = \frac{a_1 + a_2}{n} = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} = H \left\{ UV \right\} + H \left\{ U\bar{V} \right\}$$

II) Cualquier frecuencia final es igual a la suma de las frecuencias correspondientes a su fila o columna en el cuadro de frecuencias.-

$$H \left\{ U + V \right\} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{n} = \frac{a_1 + a_2}{n} + \frac{a_1 + a_3}{n} - \frac{a_1}{n}$$

$$\therefore H \left\{ U + V \right\} = H \left\{ U \right\} + H \left\{ V \right\} - H \left\{ UV \right\}$$

III) La frecuencia de la concurrencia de al menos de uno de los sucesos, es igual a la suma de las frecuencias finales menos la frecuencia del suceso compuesto.

$$H \{ U + V \} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{n} = \frac{n - a_4}{n} = 1 - \frac{a_4}{n}$$

$$\therefore H \{ U + V \} = 1 - H \{ \bar{U} \bar{V} \}$$

IV) La frecuencia de la concurrencia de al menos uno de los sucesos es igual a 1 menos la frecuencia de la concurrencia de ninguno de los sucesos.-

9.7.3. FRECUENCIAS CONDICIONALES

Sea $a_1 + a_2$ el número de veces que se presenta el suceso U ; ese número es solo una parte del número total de observaciones n . La frecuencia del suceso V en este número parcial de observaciones se indicará por $H \{ V / U \}$ y se lee: frecuencia condicional V , cuando se ha dado U . En la tabla de frecuencias anterior, se puede obtener las siguientes relaciones

$$H \{ V / U \} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

$$H \{ \bar{V} / U \} = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$$

$$H \{ U / V \} = \frac{a_1}{a_1 + a_3}$$

$$H \{ \bar{U} / V \} = \frac{a_3}{a_1 + a_3}$$

Considerando el suceso compuesto UV , se puede escribir que:

$$H \{ UV \} = \frac{a_1}{n} = \frac{a_1 + a_2}{n} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

o bien

$$H \{ U V \} = H \{ U \} \cdot H \{ V/U \}$$

$$\frac{a_1}{n} = \frac{a_1 + a_3}{n} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_3}$$

que nos indica que:

$$H \{ U V \} = H \{ V \} \cdot H \{ U/V \}$$

La frecuencia del suceso compuesto es igual a la frecuencia de uno de ellos multiplicada por la frecuencia condicional del otro, cuando el primero se ha presentado.-

9.7.4.- FORMULA DE LAS PROBABILIDADES TOTALES

Indicaremos con $p(U)$ la probabilidad que tiene el suceso U de presentarse, lo mismo, será $p(V)$ la probabilidad de V ; con ellas podremos construir el siguiente cuadro:

Sucesos	V	$\bar{V}$	Probabilidades finales
U	$p(UV)$	$p(U\bar{V})$	$p(U)$
$\bar{U}$	$p(\bar{U}V)$	$p(\bar{U}\bar{V})$	$p(\bar{U})$
Probabilidades finales	$p(V)$	$p(\bar{V})$	1

de aquí obtenemos:

$$p(U + V) = p(U) + p(V) - p(UV)$$

Si los sucesos U y V se excluyen mutuamente es:

$$p(U + V) = p(U) + p(V)$$

I) La probabilidad de la concurrencia de uno o de otro de los dos sucesos mutuamente excluyentes o incompatibles, es igual a la suma de las probabilidades de la concurrencia de cada suceso separadamente.

La presencia de los sucesos U y $\bar{U}$ es la certeza, de modo que:

$$p(U + \bar{U}) = p(U) + p(\bar{U}) = 1$$

$$p(U) + p(\bar{U}) = 1$$

la suma de la probabilidad de un suceso y la de su complementario es 1.-

La condición necesaria y suficiente para la presentación de U es la presentación de los sucesos UV y $U\bar{V}$, es decir:

$$U = UV + U\bar{V}$$

$$p(U) = p(UV) + p(U\bar{V})$$

Se obtiene la probabilidad final de un suceso, sumando las probabilidades correspondientes a la fila o columna del mismo.

Además:

$$p(U + V) = 1 - p(\bar{U}\bar{V})$$

La probabilidad de que al menos uno de los dos sucesos se presente es igual a 1 menos la probabilidad de que no se presenta ninguno.-

La fórmula de la suma puede generalizarse para más de dos sucesos, en efecto, si W es un tercer suceso, podemos escribir que:

$$U + V + W = U + (V + W)$$

$$\begin{aligned} \therefore p(U + V + W) &= p\left[U + (V + W)\right] = \\ &= p(U) + p(V + W) - p[U(V + W)] \end{aligned}$$

pero de acuerdo a la fórmula de la suma para dos sucesos, es:

$$\begin{aligned} U(V + W) &= UV + UW \\ \therefore p[U(V + W)] &= p(UV + UW) = \\ &= p(UV) + p(UW) - p(UVW) \end{aligned}$$

Luego es:

204

$$p(U \dot{+} V \dot{+} W) = p(U) + p(V) + p(W) - p(UV) - p(UW) - p(VW) + p(UVW)$$

y en general:

$$p(U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \dots \dot{+} U_m) = \sum_{i=1}^m p(U_i) - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m p(U_i U_j) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-2} \sum_{k=1}^m p(U_i U_j U_k) - \dots (-1)^{m-1} p(U_1 U_2 \dots U_m)$$

de donde sacamos que:

$$p(U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \dots \dot{+} U_m) = \sum_{i=1}^m p(U_i)$$

para los sucesos incompatibles, ya que para ellos es:

$$p(U_i U_j U_k \dots U_m) = 0$$

para $i \neq j \neq k \neq \dots \neq m$

lo que no dice que:

La probabilidad de la aparición de m sucesos, tales que cada dos sean mutuamente excluyentes o incompatibles, es igual a la suma de las probabilidades de las concurrencias de cada suceso separadamente.-

Ejemplo:

Arrojando dos dados Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos inferior a 5 ?

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de obtener 2, 3 y 4 puntos. Como

$$p(2) = \frac{1}{36} ; \quad p(3) = \frac{2}{36} ; \quad p(4) = \frac{3}{36}$$

$$p(<5) = p(2) + p(3) + p(4)$$

$$p(<5) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36}$$

$$\therefore p(<5) = \frac{6}{36}$$

$p(<5) = \frac{1}{6}$

M.m.

19^a Conferencia

17/10/1955

9.7.5.- FORMULA DE LAS PROBABILIDADES COMPUESTAS

Designaremos con $p(V/U)$ a la probabilidad condicional de V cuando se ha producido el suceso U . De acuerdo con las formulas de multiplicación de las frecuencias condicionales dadas en 9.7.3., podemos escribir:

$$p(U \cap V) = p(U) \cdot p(V/U) \quad (1)$$

y

$$p(U \cap V) = p(V) \cdot p(U/V) \quad (2)$$

Para $p(U) \neq 0$ y $p(V) \neq 0$, se puede escribir

que

$$p(V/U) = \frac{p(U \cap V)}{p(U)}$$

y

$$p(U/V) = \frac{p(U \cap V)}{p(V)}$$

Con las relaciones anteriores y las que corresponden a las probabilidades condicionales, dadas U y $\bar{U}$; teniendo en cuenta además, la tabla de 9.7.4, obtenemos:

Sucesos	V	$\bar{V}$	Total
U	$p(U) \cdot p(V/U)$	$p(U) \cdot p(\bar{V}/U)$	$p(U)$
$\bar{U}$	$p(\bar{U}) \cdot p(V/\bar{U})$	$p(\bar{U}) \cdot p(\bar{V}/\bar{U})$	$p(\bar{U})$
Total	$p(V)$	$p(\bar{V})$	1

Dividiendo las dos filas que corresponden a U y $\bar{U}$, por las probabilidades correspondientes: $p(U)$ y $p(\bar{U})$, se obtiene la tabla de las distribuciones condicionales de V , dados U y $\bar{U}$, que disponemos en la siguiente tabla:

	Sucesos	V	$\bar{V}$	Total
Distribuciones	U	$p(V/U)$	$p(\bar{V}/U)$	1
Condicionales	$\bar{U}$	$p(V/\bar{U})$	$p(\bar{V}/\bar{U})$	1
Distribución marginal		$p(V)$	$p(\bar{V})$	1

Análogamente, puede ser construida una tabla de distribuciones condicionales de $\bar{U}$, dadas V y $\bar{V}$.

$$\text{si} \quad p(V/U) \neq p(V/\bar{U}) \quad (3)$$

los sucesos U y V son estocásticamente dependientes. La relación de las frecuencias 9.7.2, indica que la frecuencia del suceso V entre las observaciones en las cuales el suceso U se verifica, es diferente de la frecuencia de V entre las observaciones para las cuales no se presenta U , es decir, ocurre $\bar{U}$.

$$\text{si} \quad p(V/U) = p(V/\bar{U}) \quad (4)$$

se dice entonces que V es estocásticamente independiente de U , lo cual indica que V tiene la misma probabilidad de aparecer, ya sea que aparezca antes U o que no aparezca.

De la relación (4) obtenemos que:

$$p(V/U) = p(V/\bar{U}) = p(V) \quad (5)$$

Teniendo presente (1) y (5) es:

$$p(UV) = p(U) \cdot p(V) \quad (6)$$

lo cual indica que: si U y V son dos sucesos estocásticamente independientes, las distribuciones condicionales son iguales a las correspondientes distribuciones marginales, y en (6) se obtiene:

La probabilidad del suceso compuesto UV es igual al producto de las probabilidades de los sucesos componentes.

Generalizando estas fórmulas a más de un suceso podemos decir que:

1) si los sucesos son estocásticamente dependientes es:

$$p(U_1 U_2 \dots U_m) = p(U_1) \cdot p(U_2/U_1) \dots \dots \dots p(U_m/U_1 U_2 \dots U_{m-1}) \quad (7)$$

2) si los sucesos son estocásticamente independientes es:

$$p(U_1 U_2 \dots U_m) = p(U_1) \cdot p(U_2) \dots \dots \dots p(U_m) \quad (8)$$

Ejemplo I: Calcular la probabilidad de sacar rey, caballo y sota, en este orden, en tres extracciones consecutivas de una baraja ordinaria de 52 cartas, sin devolver las cartas extraídas.

Es un ejemplo de probabilidades compuestas para sucesos dependientes.

si p_1 es la probabilidad de sacar un rey;
 p_2 " " " " " " " caballo, una vez que ha sacado un rey;
 p_3 " " " " " " " una sota, una vez que han sacado un rey y un caballo; la posibilidad de sacar rey, caballo y sota es $p_1 p_2 p_3$.

Como en la baraja hay 4 reyes, es:

$$p_1 = \frac{4}{52}$$

Una vez sacado el rey, quedan 51 cartas, entre las cuales hay 4 caballos, de modo que será

$$p_2 = \frac{4}{51}$$

y análogamente, será $p_3 = \frac{4}{50}$ la probabilidad de sacar una sota, luego

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{4^3}{52 \cdot 51 \cdot 50}$$

Ej. II: Una urna contiene 3 bolas rojas y 3 verdes, y una persona saca 3 bolas al azar. A continuación introduce 3 bolas azules y vuelve a sacar 3 bolas al azar. Demostrar que no se puede apostar ventajosamente 10 contra 1 a que las últimas bolas serán de distinto color.-

Introducidas las 3 bolas azules, la composición de la urna podrá ser:

Sucesos	Rojas	Verdes	Azules
a	3	-	3
b	2	1	3
c	1	2	3
d	-	3	3

Casos a: Probabilidad de sacar bola verde es: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; la de sacar otra verde: $\frac{2}{5}$ y la de sacar una tercera es: $\frac{1}{4}$

$$p_a = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

Análogamente, las probabilidades para:

Caso b: $p_b = \frac{3}{20}$

Caso c: $p_c = \frac{3}{20}$

Caso d: $p_d = \frac{1}{20}$

Solamente en los casos b) y c) podrán obtenerse 3 colores distintos.

tos en la segunda tirada. En el caso b) la probabilidad de que así ocurra en la segunda tirada es $\frac{6}{20}$ y la probabilidad compuesta es:

$$\frac{6}{20} \cdot \frac{3}{20}$$

y la misma será para el caso c).

La probabilidad requerida es la suma de las probabilidades correspondientes a los casos b) y c), es decir:

$$2 \times \frac{6}{20} \times \frac{3}{20} = \frac{9}{100}$$

luego los casos favorables son 9 y los adversos 81. La persona que saque los bolas podrá apostar 10 contra 1 a favor de no sacar 3 bolas de distinta color y con una pequeña ventaja para su parte.-

9.7.6.-

PROBABILIDAD TOTAL Y COMPUESTA

— N^o 1 —

La lotería de números contiene 90 de éstos, del 1 al 90, de los cuales se sacan 5. Se apuesta a que salga un número determinado en una extracción igualmente determinada, o simplemente a que salga; también se apuesta a que salgan dos números (ambo); o tres (terno), etc.
(Knopf. N^o 1, pag. 55)

La probabilidad de que aparezcan un cierto número en el primer lugar es $\frac{1}{90}$.

En efecto, si el número debe aparecer en el tercer lugar, no ha de salir ni en la primera ni en la segunda extracción. Para no aparecer en el primer lugar, la probabilidad es $\frac{89}{90}$ y del mismo modo la correspondiente a que no salga en el segundo es $\frac{88}{89}$, y la de que entonces salga en el tercer lugar es $\frac{1}{88}$; por lo tanto, la probabilidad de que dicho número se presente en la tercera extracción es:

$$\frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{90}$$

Se deduce que la probabilidad de que un determinado número salga en lugar también determinado es siempre igual a

$$\frac{1}{90}$$

La probabilidad de que un cierto número aparezca en una cualquiera de las cinco extracciones es igual a $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.

La probabilidad de la presencia del primer número en la primera extracción es $\frac{1}{90}$; la de que aparezca en la segunda el segundo número es $\frac{1}{90}$.

mero $\frac{1}{89}$ y la correspondiente a la extracción del tercero, $\frac{1}{88}$ en tercer lugar, $\frac{1}{88}$. La probabilidad de sacar en las tres primeras jugadas los tres números en una sucesión determinada, es:

$$\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88}$$

Se demuestra de manera análoga a la empleada en el caso de un solo número que la probabilidad de sacarlos 3 números en tres cualesquiera de las cinco extracciones es igual a la anterior. Así por ejemplo, la probabilidad de que el primer número salga en primer lugar, el segundo en segundo y el tercero en quinto es:

$$\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{1}{86} = \frac{1}{90 \cdot 89 \cdot 88}$$

puesto que en el tercero y cuarto lugar, el tercer número no debe aparecer.

Ahora: si los tres números pueden salir en las cinco extracciones sin ordenación determinada, es evidente que tal cosa puede suceder de tantas maneras como son las permutaciones de 5 elementos, cuando dos son iguales entre sí. Dicho número de permutaciones es $\frac{5!}{2!}$, y

por lo tanto, la probabilidad de extracción de un terno es igual a

$$P_3 = \frac{5!}{2!} \cdot \frac{1}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11.748}$$

$$\text{--- } N^{\circ} \quad 2 \quad \text{---}$$

Cual es la probabilidad de que extrayendo dos cartas de una baraja que consta de 40, la primera sea un as y la segunda un dos? (J. González Galé: pag. 8 N^o 13)

Es una probabilidad compuesta, en la cual el primer acontecimiento influye sobre el segundo. Siendo 40 las cartas y 4 los ases, la probabilidad de sacar uno de ellos, en la primera extracción es:

$$\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Entre las 39 cartas restantes hay 4 dos. La probabilidad de sacar un dos en la segunda extracción es:

$$\frac{4}{39}$$

y la probabilidad compuesta que se busca

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{39} = \frac{2}{195}$$

OBSERVACION:

Si no interesa el orden de extracción, la probabilidad

por lo tanto debe aumentar. En la primera extracción, puede salir un 1 ó un 2; hay ocho casos favorables sobre 40 posibles, luego, la probabilidad simple es:

$$\frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

Quedan 39 cartas: son los casos posibles; Los casos favorables son 4 pues si salió un as en la primera extracción debemos sacar un 2 en la segunda, y si salió un 2 en la primera, hemos de sacar un as en la segunda. Luego, esta probabilidad simple es $\frac{4}{39}$. Y la probabilidad compuesta es:

$$P^1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{195}$$

$$P^1 > 2 P \quad \text{pues } P^1 = \frac{4}{195} \text{ y } P = \frac{2}{195}$$

lo cual es lógico, pues la indiferencia duplica la probabilidad; (indiferencia en cuanto al orden de la extracción).-

— N^o 3 —

Se tiran dos dados dos veces consecutivas cual es la probabilidad de que los puntos sacados sumen 6 la primera vez y 5 la segunda ?.
(González Galé: pag. 9)

1) Número de casos posibles

$$6 \times 6 = 36$$

2) Número de casos favorables

En el primer tiro los dados deben sumar 6, lo que se obtiene en las siguientes condiciones:

Primer dado	1	2	3	4	5
Segundo dado	5	4	3	2	1
Puntos	6	6	6	6	6

Vale decir, obtenemos 6 en 5 casos. La primera probabilidad simple es:

$$P_1 = \frac{5}{36}$$

En el segundo tiro deben sumar 5 los puntos de ambos dados, lo que se consigue de las cuatro maneras siguientes:

Primer dado	1	2	3	4
Segundo dado	4	3	2	1
Puntos	5	5	5	5

Luego, la segunda probabilidad simple es:

$$P_2 = \frac{4}{36}$$

y la probabilidad buscada es:

$$P = P_1 \cdot P_2 = \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{324}$$

puesto que la probabilidad es compuesta y el primer acontecimiento no influye sobre el segundo.-

OBSERVACION:

Si no interesa el orden en que se obtienen los 6 y los 5 puntos, la probabilidad se duplica de acuerdo con lo dicho al analizar el problema 2.-

— N^o 4 —

Cuál es la probabilidad de sacar tres bolillas azules seguidas, de una urna que contiene 5 azules, 9 rojas y 2 blancas, sin reponer la bolilla extraída?

(González Galé: pag. 9 N^o V).-

Es una probabilidad compuesta en la que cada acontecimiento influye en el siguiente. Hay en total 16 bolillas y de ellas 5 son azules; la probabilidad de sacar una primera bolilla azul es:

$$P_1 = \frac{5}{16}$$

Habiéndose extraído la primera bolilla, de las 15 restantes sólo 4 son azules. La probabilidad de que la segunda sea azul es:

$$P_2 = \frac{4}{15}$$

Análogamente, la probabilidad de obtener una tercera bolilla azul es:

$$P_3 = \frac{3}{14}$$

La probabilidad de que sean azules las tres, es:

$$P = p_1 p_2 p_3 = \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14}$$

$$P = \frac{1}{56}$$

Se tienen dos urnas; la primera contiene 5 bolillas blancas y 3 rojas; la segunda, 7 blancas y 4 rojas.Cuál es la probabilidad de sacar, de primera intención, una bolilla roja de cada urna?
(González Galé: pag. 10, N^o VI).-

En la primera urna, sobre 8 bolillas hay 3 rojas; la probabilidad de sacar una bolilla roja es:

$$P_1 = \frac{3}{8}$$

En la segunda urna, hay 11 bolillas en total y 4 rojas; la probabilidad es:

$$P_2 = \frac{4}{11}$$

y como ambos hechos se complementan, la probabilidad buscada es:

$$P = p_1 p_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{11} = \frac{3}{22}$$

$$P = \frac{3}{22}$$

— N^o 6 —

Si dadas las dos urnas del ejemplo anterior se vierte el contenido de una en la otra cuál es la probabilidad de sacar dos bolillas rojas consecutivas?

(González Galé: pag. 10, N^o VII)

sobre 19 bolillas hay 7 rojas; la probabilidad de sacar la primera bolilla roja es:

$$p_1 = \frac{7}{19}$$

sacada ésta, quedan 18 bolillas y entre ellas 6 rojas, luego la probabilidad de sacar la segunda, habiendo salido la primera, es:

$$p_2 = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

y la probabilidad pedida es:

$$P' = p_1 p_2 = \frac{7}{19} \cdot \frac{1}{3}$$

$$P' = \frac{7}{57}$$

que comparada con la del problema n^o 6 da

$$\frac{3}{22} > \frac{7}{57}$$

es decir

$$P > P'$$

— N^o 7 —

Hay 5 urnas idénticas; dos de ellas, de igual contenido, con 3 bolillas rojas y 5 blancas, y las otras tres teniendo cada una, 4 rojas y 3 blancas. Cuál es la probabilidad de que elegida una urna al azar salga una bolilla roja?

(González Galé, pag. N^o VIII)

Separaremos las urnas en 2 grupos, de acuerdo con su composición. La probabilidad de que la urna elegida pertenezca al primer grupo es $\frac{2}{5}$, y será $\frac{3}{5}$ de que pertenezca al segundo grupo. La

probabilidad de extraer una bolilla roja de cada urna del primer grupo es $\frac{3}{8}$, y de cada urna del segundo grupo será $\frac{4}{7}$.

Las probabilidades respectivas de extraer una bolilla roja del primero y del segundo grupo de urnas son:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20} \quad \text{y} \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

Como lo mismo da que pertenezca a uno o a otro grupo, y como si sale del primero no puede salir del segundo, la probabilidad buscada es:

$$\frac{3}{20} + \frac{12}{35} = \frac{69}{140}$$

$P = \frac{69}{140}$

20a Conferencia
21/10/1955
M.m.

9. 8.- ESPERANZA MATEMATICA Y VALOR MEDIO

9. 8. 1.- Magnitudes aleatorias - Variables aleatorias

Definición: Se llama variable casual, aleatoria o estocástica a una variable X que puede tomar los valores $X_1, X_2, \dots, X_r$, según que se verifique uno de los sucesos incompatibles $A_1, A_2, \dots, A_r$ de probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_r$ respectivamente, siendo

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1$$

Ejemplo I) Al arrojar un dado:

Variable E , valores $X_1, X_2, \dots, X_6$
1 2 6

probabilidades $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$

II) Al arrojar dos dados:

$X_1 :$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_1 :$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

III) En el juego de cara o cruz: si gana 1 \$ por cara y 0 por cruz es:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 \quad 0 \\ p_1 &= \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. 8. 2.- Valor probable o esperanza matemática

Definición: Esperanza matemática de una ganancia fortuita o valor medio teórico de una-variable casual a la expresión:

$$E(X) = \sum_{i=1}^r p_i \cdot X_i$$

En el juego es

$$p_a - q\bar{a} = E(\text{esperanza})$$

a ganancia y $\bar{a}$ pérdida
p prob. " y q prob."

Si el juego es equitativo:

$$p_a = q\bar{a}$$

9.8.3.- Sistema de variables casuales

a) Dos variables X, Y que toman los siguientes valores:
para X : $x_1, x_2, \dots, x_h$

de probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_h$

para Y $y_1, y_2 \dots y_k$
 probabilidades $q_1, q_2 \dots q_k$
 pares de valores $(x_1, y_1) \dots (x_1, y_k), \dots (x_h, y_k)$
 probabilidades $p_{11}, p_{1k}, \dots, p_{hk}$

Si X es independiente de Y

será $p_{\alpha\beta} = p_{\alpha} q_{\beta}$

donde: $\alpha = 1, 2 \dots h$; $\beta = 1, 2 \dots k$

Si X es dependiente de Y

será: $p_{11} + p_{12} + p_{13} + \dots + p_{1k} = q_1$

En general será:

$$p_{\alpha 1} + p_{\alpha 2} + \dots + p_{\alpha k} = p_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2 \dots h)$$

$$p_{1\beta} + p_{2\beta} + \dots + p_{h\beta} = q_{\beta} \quad (\beta = 1, 2 \dots k)$$

de modo que:

$$\sum p_{\alpha\beta} = p_1 + p_2 + \dots + p_h = q_1 + q_2 + \dots + q_k = 1$$

9.8.4.- Suma de dos variables casuales

Suma de dos variables casuales X e Y, es una tercera variable casual suceptible de adquirir la totalidad $h \cdot k$ de los pares de valores $x_{\alpha} + y_{\beta}$ con probabilidad $p_{\alpha\beta}$

9.8.5.- Producto de dos variables casuales

Es una tercera variable casual XY que, toma los $h \cdot k$ valores $x_{\alpha} \cdot y_{\beta}$ con probabilidad $p_{\alpha\beta}$

9.8.6.- Valor medio de la suma da variables casuales

Teorema: El valor medio o esperanza matemática de una suma de variables estocásticas es la suma de las esperanzas matemáticas de ellas.-

$$T) E(X + Y + Z + \dots + T) = E(X) + E(Y) + E(Z) + \dots + E(T)$$

Sean las variables

X Y

tal que X toma los valores: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

de probabilidades: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$

e Y: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$

de probabilidades: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$

Como los sucesos son independientes es:

$$= p_{1j} = p_1 q_j$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= p_1 q_1 x_1 y_1 + p_1 q_2 x_1 y_2 + \dots + p_1 q_n x_1 y_n + \dots \\ &\quad + p_2 q_1 x_2 y_1 + p_2 q_2 x_2 y_2 + \dots + p_2 q_n x_2 y_n + \dots \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + p_n q_1 x_n y_1 + p_n q_2 x_n y_2 + \dots + p_n q_n x_n y_n \\ &= p_1 x_1 (q_1 y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_n y_n) + \\ &\quad + p_2 x_2 (q_1 y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_n y_n) + \dots \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + p_n x_n (q_1 y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_n y_n) = \\ &= (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) (q_1 y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_n y_n) \\ &= E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

Generalizando para n variables estocásticas es:

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \dots E(X_n)$$

Ejemplos: I) Medidas de dos segmentos consecutivos:

X e Y de una misma recta

Medidas $x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n$ valor medio $E(X)$,

$y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n$ " " $E(Y)$

Valor más probable del segmento total: $E(X) + E(Y)$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

II) Si los segmentos son iguales:

Medidas $2x_1 \ 2x_2 \ \dots \ 2x_n$

$$\therefore E(2X) = 2E(X)$$

III) Area de un rectángulo de lados X e Y

Medidas: $x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \quad E(X)$
 $y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n \quad E(Y)$
 Area $(x_1 \ y_1); (x_2 \ y_2); \dots; (x_n \ y_n) \quad E(XY)$

$$\therefore \text{Area} = E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

-9.9.8. - Momentos,

$$\text{Corolario: I) } E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$$

$$\text{Si } X_1 = X_2 = X$$

$$\therefore E(X^2) \neq [E(X)]^2$$

pues si se considera a un cuadrado de lado X , del que se ha efectuado 5 medidas:

$$1, 1, 1, 0,9, 1,1$$

$$E(X) = 1; \quad E(X^2) = 1,004; \quad [E(X)]^2 = 1$$

$$\text{y es } E(X^2) \neq [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2$$

y en general

$$E(X^r) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^r$$

Se obtienen así los momentos de orden 1, 2, ..., r , respecto al origen, de la variable estocástica X .

Cuando X está elevado a 0, se tiene:

$$E(X^0) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^0 = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

el momento de orden 0.

9.8.9.- Desviaciones:

Definición: Dada una variable casual X llamaremos desviación, a la diferencia entre cada valor de ella y su esperanza matemática, que es un número fijo para cada variable.

Variable X : $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$

Esperanza: $E (X)$.

Desviaciones: $x_1 - E (X); x_2 - E (X); \dots x_n - E (X)$

Esta serie constituye una nueva variable casual cuyos valores tendrán las mismas probabilidades

$p_1, p_2 \dots p_n$ que los x_i .

Propiedad fundamental:

La esperanza matemática de las desviaciones es igual a cero,

$$E \left[X - E (X) \right] = \left[x_1 - E (X) \right] p_1 + \left[x_2 - E (X) \right] p_2 + \dots + \dots + \left[x_n - E (X) \right] p_n =$$

$$= (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n) - E (X) \left[p_1 + p_2 + \dots + p_n \right] = E (X) - E (X) \cdot 1$$

pues $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

$$\therefore E \left[X - E (X) \right] = 0$$

9.8.10.- Valor medio del cuadrado

Teorema: La esperanza matemática del cuadrado de la suma de un número finito de variables estocásticas independientes, cuyas esperanzas matemáticas sean todas nulas, es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de los cuadrados de dichas variables.

$$T) E (X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 = E (X_1^2) + E (X_2^2) + \dots + E (X_n^2)$$

$$E (X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 = E (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 + 2 X_1 X_2 + 2 X_1 X_3 + \dots)$$

$$+ \dots + 2 E(X_{n-1} X_n) = E(X_1^2) + E(X_2^2) + \dots + E(X_n^2) + \dots \\ \dots + 2 E(X_1 X_2) + 2 E(X_1 X_3) + \dots + 2 E(X_{n-1} X_n)$$

pero $E(X_i X_j) = E(X_i) E(X_j) = 0$

pues $E(X_i) = E(X_j) = 0$ por hipótesis

$$\therefore E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \sum E(X_i^2)$$

9.8.11.- Desviación

Se llama desviación de una variable casual X a la diferencia

$$Y = X - E(X)$$

entre un valor genérico de la X y el valor medio de la misma o esperanza matemática.

Corolario: Si X e Y son dos variables casuales independientes y a y b son sus respectivas esperanzas matemáticas, se verifica que

$$E\left[(x - a)(y - b)\right] = E(x - a) \cdot E(y - b) = 0$$

En general,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i - a_i)(X_j - a_j) = 0$$

Corolario: Si $E(X) = a$

$$E(x - a)^2 = E(x^2) + E(a^2) - 2a E(x)$$

$$= E(x^2) + a^2 - 2a^2 = \underline{E(x^2) - a^2}$$

9.8.12.- Dispersión (Desviación cuadrática media; Desviación típica; Desviación standard; variancia)

Definición: Se llama dispersión de una variable casual a la esperanza matemática del cuadrado de sus derivaciones; se la representa por

σ^2 .

$$\sigma^2 = E\left[X - E(X)\right]^2$$

Propiedad fundamental: Dadas n variables casuales independientes, la dispersión de su suma es igual a la suma de las dispersiones de cada una.

Sea X la variable aleatoria que toma los valores,

$x_1, x_2, \dots, x_n$ y sean $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ sus dispersiones,

donde

$$\sigma_1^2 = E \left[x_1 - E(x_1) \right]^2$$

$$\sigma_2^2 = E \left[x_2 - E(x_2) \right]^2$$

.....

$$\sigma_n^2 = E \left[x_n - E(x_n) \right]^2$$

∴ por definición

$$\sigma_x^2 = E \left[x_1 - E(x_1) + x_2 - E(x_2) + \dots + x_n - E(x_n) \right]^2$$

$$= E \left\{ \left[x_1 - E(x_1) \right]^2 + \left[x_2 - E(x_2) \right]^2 + \dots + \left[x_n - E(x_n) \right]^2 + \dots \right. \\ \left. + 2 \left[x_1 - E(x_1) \right] \left[x_2 - E(x_2) \right] + \dots + 2 \left[x_{n-1} - E(x_{n-1}) \right] \right. \\ \left. \left[x_n - E(x_n) \right] \right\} =$$

$$\sigma_x^2 = E \left[x_1 - E(x_1) \right]^2 + E \left[x_2 - E(x_2) \right]^2 + \dots + E \left[x_n - E(x_n) \right]^2 + \\ + 2 E \left[x_1 - E(x_1) \right] \left[x_2 - E(x_2) \right] + \dots + 2 E \left[x_{n-1} - E(x_{n-1}) \right] \left[x_n - E(x_n) \right]$$

pero

$$2 E \left[x_1 - E(x_1) \right] \left[x_{1+1} - E(x_{1+1}) \right] = \\ = 2 E \left[x_1 - E(x_1) \right] \cdot E \left[x_{1+1} - E(x_{1+1}) \right] = 0$$

por hipótesis,

$$\therefore \sigma_x^2 = E \left[x_1 - E(x_1) \right]^2 + E \left[x_2 - E(x_2) \right]^2 + \dots + E \left[x_n - E(x_n) \right]^2$$

es decir,

$$\sigma_x^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

9.8.13.- Teorema de Bienaymé - Tchebycheff

Sean

$$y_i = x_i - E(x)$$

Las desviaciones que toma una variable estocástica X con respecto a su esperanza matemática; y sean p_i las correspondientes probabilidades.

Supongamos dispuestas esas desviaciones en orden creciente de valores absolutos. Por definición

$$\sigma_x^2 = p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2 + \dots + p_n y_n^2 \quad (1)$$

de las y_i , algunas $y_1, y_2, \dots, y_\alpha$, pueden ser inferiores, en valor absoluto, a una constante $\underline{\epsilon}$ fijada; otras, $y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \dots, y_n$, serán en valor absoluto mayores o iguales a $\underline{\epsilon}$.

No se excluye que algunas de estas y_i , divididas en dos clases, puedan faltar, en cuyo caso podrá α igualarse a 0 ó a n .

Si en (1) en lugar de $y_1^2, y_2^2, \dots, y_\alpha^2$ ponemos cero, y en lugar de $y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \dots, y_n$ ponemos $\underline{\epsilon}^2$, será

$$\underline{\epsilon}^2 (p_{\alpha+1} + p_{\alpha+2} + \dots + p_n) \leq \sigma_x^2$$

$$p_{\alpha+1} + p_{\alpha+2} + \dots + p_n \leq \frac{\sigma_x^2}{\underline{\epsilon}^2}$$

lo que nos dice que, la probabilidad de tener desviaciones no menores que $\underline{\epsilon}$, es igual o menor que $\frac{\sigma_x^2}{\underline{\epsilon}^2}$; designando esta probabilidad con P' .

es
$$P' \leq \frac{\sigma_x^2}{\underline{\epsilon}^2}$$

y la probabilidad de tener desviaciones menores que $\underline{\epsilon}$ es

$$P = 1 - P' \geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{\underline{\epsilon}^2}$$

vale decir, la probabilidad de una desviación comprendida entre

$$- \varepsilon y + \varepsilon -$$

$$\text{Haciendo } \frac{\varepsilon}{\sigma_x} = t \quad \therefore \varepsilon = t \sigma_x$$

resulta

$$P \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

Dados $E(x)$ valor medio de una variable casual y σ_x la desviación cuadrática media o típica, la probabilidad de que un valor de la variable esté contenido en el intervalo,

$$\left[E(x) + t \sigma_x; E(x) - t \sigma_x \right]$$

donde t es un número cualquiera (> 1), es mayor o igual a $1 - \frac{1}{t^2}$

9.8.14.- Observación:

El razonamiento subsiste para potencias superiores a 2 de las desviaciones y_1 , en efecto, para los momentos de orden 4, cuya expresión es:

$$\sum_{i=1}^n p_i y_i^4 = E(y^4)$$

la probabilidad de una desviación no superior aritméticamente a $t \sigma$, para $t > 1$, es

$$P \geq 1 - \frac{E(y^4)}{t^4} = 1 - \frac{E(y^4)}{t^4 \sigma_x^4}$$

cuyos valores a una potencia par son debidos a Medolaghi, que halló los valores:

$$P \geq 1 - \frac{\frac{E(y^4)}{\sigma_x^4}}{t^4 - 2t^2 + \frac{E(y^4)}{\sigma_x^4}}$$

A Cantelli se le debe una generalización de la fórmula para los momentos de orden r

$$\sum_{i=1}^n p_i y_i^r = E(y^r)$$

$$P \geq 1 - \frac{E(y^r)}{\varepsilon^r} = 1 - \frac{E(y^r)}{t^r \sigma_x^r}$$

ampliándola al caso de la desviación de la variable X con respecto a un número real m , resultando que:

$$P = P \left[|X - m| \leq \varepsilon \right] \geq 1 - \frac{E(X - m)^r}{\varepsilon^r}$$

siendo $|X - m| \leq \varepsilon$

y probando además que si

$$\varepsilon^r \leq E(X - m)^r \quad \text{y} \quad |X - m| \neq b$$

siendo b un número positivo, es

$$P \leq \frac{b^r - E(X - m)^r}{b^r - \varepsilon^r}$$

Una generalización de teorema de Bienaymé-Tchebycheff en el campo continuo, ha sido hecha por Beretta.

9.9.- BIBLIOGRAFIA:

- 1.- S.S. WILKS: Análisis Estadístico Elemental. Traduc. de Sixto Ríos y José Royo. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid 1952.
- 2.- HARRY FREEMAN: Matemáticas para Actuarios. Traducción de Enrique Cansado y L.Bravo Gala. Ed. Aguilar. Madrid 1951.
- 3.- E.BOREL Y R.DELTHEIL: Probabilités; Erreurs. Colletion Armand Colin. París 1950
- 4.- OTTO KNOPF: "Cálculo de Probabilidades". Ed. Labor - Buenos Aires 1948.
- 5.- J.V. USPENSKY: Matemáticas de las Probabilidades. Traducción de C.Prélat. Ed. Nigar. Nuenos Aires 1947.
- 6.- J.GONZALEZ GALE: Probabilidades y Diferencias Finitas. Ed. Ateneo Buenos Aires 1948.
- 7.- J.L.COOLIDGE: An Introduction tu Mathematical Probability. Ed. Clarendon Press. Oxford 1925.
- 8.- PAUL LEVY: Calcul des Pro abilités. Ed. Gauthiers. Villars; Pa rís 1925.
- 9.- F.N. DAVID: Probability Theory for Statistical - Methods. Ed. Cambridge at the University Press. Londres 1951.
- 10.- A.HAED: Statistical Theory with Engineering Applications. Ed. ...

10.- ECUACIONES ALGEBRAICAS

10.1.- Noticia Histórica

Es muy difícil hallar los orígenes de esta rama de la Matemática por la carencia casi absoluta de los viejos libros en los cuales los antiguos pueblos civilizados han dejado las huellas de su saber. Aún cuando las distintas ramas de esta ciencia tienen una estrecha dependencia entre sí, sin embargo su aparición y su desarrollo no han sido simultáneos.

La Geometría y la Astronomía ya estaban en pleno desarrollo cuando todavía nada se sabía del Álgebra.

Los primeros elementos de esta ciencia se los encuentra en los libros de EUCLIDES (365? - 275 a. de J.C.). No hay lugar a dudas que ARQUIMIDES (287? - 212 a. de J.C.) y APOLONIO (260? - 200? a. J.C.) manejaban hábilmente el cálculo algebraico, pero como al genio griego repugnaba la simplificación simbólica necesaria para el álgebra, su cultivo no encontró suficientes adeptos para su desarrollo. DIOFANTO, de Alejandría (325 - 400 d. de J.C.) fué el primero que publicó un tratado de Álgebra en trece libros, en los que se hallaba la solución en números enteros de las ecuaciones indeterminadas de primer grado a dos variables, llamadas más tarde ecuaciones diofánticas. Hasta hace algunos años eran los griegos los creadores del Álgebra, pero las últimas excavaciones efectuadas en Babilonia mostraron desde 1929 que los sacerdotes babilónicos cultivaron el Álgebra antes que los griegos, como lo prueban los documentos matemáticos hallados, consistentes en tablillas de arcilla, y guardaron celosamente sus conocimientos. Estos documentos cubren unos dos mil años, desde la primera dinastía babilónica (2186 - 1961 a. de J.C.) hasta casi el principio de la Era Cristiana y la mayoría de ellos pertenecen al período comprendido entre 2000 - 1200 a. de J.C. Los babilónicos llegaron a dar soluciones empíricas de la ecuación cúbica de la forma

$x^3 - px^2 + q = 0$, además los algebristas babilónicos resolvían ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas y ecuaciones simultáneas de segundo grado del tipo $xy = 600$; $(ax + by)^2 + cx + dy = e$ para 55 grupos de valores especiales de a ; b , c , d , y e .

Son los hindúes los continuadores de los algebristas griegos sucesores de Diofanto. A diferencia de los griegos los hindúes no eran amantes de las demostraciones pero eran excelentes calculistas, y tienen un rasgo interesante; hallaban con facilidad las soluciones de la ecuación diofántica mucho mejor que las de las ecuaciones determinadas, contrariamente a lo que sucede hoy día.

En el siglo VI después de J.C. Brahmagupta (598 d. de J.C.) en la India publica un libro que contiene conocimientos de Aritmética, Álgebra y Geometría. La ciencia india se remonta a épocas anteriores a este matemático, pues por el grado de los conocimientos que contiene su libro se ve que los hindúes conocían la ciencia de los griegos, aún cuando no llegaron a superar a Diofanto.

El libro de este matemático hindú es comentado mucho más tarde, en el siglo XII, por su compatriota BHASCARA (1114) que halla las soluciones de la ecuación de segundo grado y empíricamente

las de $x^2 + y^2 = z^2$ para números enteros.

Los árabes, tradujeron al árabe y al persa el álgebra hindú, que bajo esta forma penetra en Europa. Hacia el año 820, su matemático máximo MOHAMMED IBN MUSA AL-KHOWARIZMI de Bagdad y Damasco, (795 - 850) compuso, por orden del califa AL MAMUN, el primer tratado de álgebra que apareció entre los árabes, llamado al-jabr w'almuqabala, que significa "restauración y reducción". Por adaptaciones posteriores de los traductores del árabe, degeneró esta palabra en AIGEBRA nombre con que se ha aplicado a esta disciplina en la actualidad. Por influencia de los árabes, se introdujo en Europa esta rama, hallándose se en la Edad Media a GERBERT (930 - 1003), más tarde Papa SILVESTRE II que estudió el Álgebra Árabe, continuando esta orientación, LEONARDO DE PISA (1175 - 1250) más conocido por Fibonacci en Italia.

Hasta Fibonacci, el Álgebra se limitaba a la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado; se debe al matemático italiano NICOLAS TARTAGLIA (1500 - 1659) de Brescia, la solución de la ecuación cúbica, cuya demostración publicó más tarde CARDAN (1501 - 1576) y que con su discípulo FERRARI (1522 - 1565) le cabe la gloria de hallar las soluciones de la ecuación de cuarto grado.

Se debe al algebrista francés FRANCISCO VIÈTE (1540 - 1603) la genial idea del simbolismo algebraico, que marca el comienzo del Álgebra moderna, cuyos signos la distinguen de sus antecesores y la proveen de un potente recurso de demostración. Contribuyeron a perfeccionar el simbolismo de Viète los matemáticos MIGUEL STIEFFEL (1486 - 1567); THOMAS HARRIOT (1568 - 1621) y JUAN NEPER (1550 - 1617) con sus logaritmos.

Dejando a un lado las obras de GALILEO, CAVALIERI, DES CARTES, PASCAL, FERMAT, WALLIS, LEIBNITZ, y NEWTON que han contribuido poderosamente a desarrollar esta disciplina con sus geniales creaciones, terminaremos estas citas históricas mencionando a DAUSS (1777 - 1855) en Alemania y CAUCHY (1789 - 1857) en Francia como los dos más ilustres matemáticos de su siglo, que con sus obras, abrieron un camino a una brillante pléyade de matemáticos posteriores como BEZOUT, CRAMER, LAPLACE, LAGRANGE, JACOBI, CAYLEY, SILVESTRE, JOACHIMSTHAL, HERMITE, etc.

10.2.- Generalidades

10.2.1.- Definiciones.

Se llama ecuación algebraica y entera a una expresión de la forma $f(x) = 0$ en la que $f(x)$ es un polinomio entero en x .

Se dice que a es una raíz de una ecuación $f(x) = 0$ si al reemplazar x por a , el polinomio $f(x)$ se anula, es decir, que

$$f(a) = 0$$

En otros términos, decir que a es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, equivale a expresar que el polinomio $f(x)$ es divisible por el binomio $x - a$.

Admitiremos sin demostrar el siguiente:

10.2.2.- Teorema de d'Alembert: Una ecuación algebraica de grado m tiene al menos una raíz real o imaginaria.

10.2.3.- Teorema: Un polinomio entero de grado m puede ser descompuesto en m factores de primer grado (reales o imaginarios) y la descomposición solo es posible de una sola manera.

Sea el polinomio:

$$f(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

de acuerdo al teorema de d'Alembert, $f(x)$ tiene al menos una raíz a , real o imaginaria, luego es $f(x)$ divisible por $(x-a)$, obteniéndose:

$$f(x) = (x-a)f_1(x)$$

$f_1(x)$ es un polinomio de grado $(m-1)$ cuyo primer término es $A_m x^{m-1}$.

Según el teorema de d'Alembert $f_1(x)$ tiene al menos una raíz b , obteniéndose :

$$f_1(x) = (x-b)f_2(x)$$

a su vez, $f_2(x)$ es un polinomio de grado $(m-2)$ cuyo primer término es $A_m x^{m-2}$. Siguiendo este proceso obtenemos sucesivamente expresiones análogas, hasta

$$f_{m-1}(x) = (x-l)f_m(x)$$

siendo $f_m(x) = A_m$ una constante.

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades es:

$$f(x) = A_m(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l)$$

Esta descomposición puede hacerse de una sola manera. En efecto, supongamos que $f(x)$ puede descomponerse de las dos maneras siguientes:

$$f(x) = A_m(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l) \quad (1)$$

$$f(x) = A'_m(x-a')(x-b')(x-c') \dots (x-l') \quad (2)$$

dado que tanto (1) como (2) se anulan para $x = a$, se puede escribir:

$$A'_m(a-a')(a-b')(a-c') \dots (a-l') = 0$$

Como $A'_m \neq 0$ pues de lo contrario el polinomio dado no es de grado m , para que esta condición de anularse la expresión anterior se cumpla, deberá ser:

$$a = a' \quad \text{o} \quad a = b' \quad \text{o} \quad a = c' \quad \dots \quad \text{o} \quad a = l'$$

Lo mismo podría decirse para :

$$x = b; \quad x = c; \quad \dots; \quad x = l$$

teniéndose finalmente :

$$A_m(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l) = A'_m(x-a')(x-b')(x-c') \dots (x-l')$$

$$\begin{array}{rcl} \text{como} & x - a & = x - a' \\ & x - b & = x - b' \\ & \hline & x - l & = x - l' \end{array}$$

es

$$A_m = A'_m$$

luego la descomposición efectuada es única.

10.2.4.- Teorema: Una ecuación algebraica y entera de grado m tiene m raíces, reales o imaginarias.

Sea la ecuación algebraica y entera :

$$f(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

como

$$f(x) = A_m(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-l)$$

se ve que $f(x)$ se anula para los m valores $a, b, c, \dots, l$, que son sus raíces. No se anula para ningún otro valor x_0 . En efecto, supongamos que x_0 sea una raíz más de esa ecuación, luego será:

$$A_m(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c) \dots (x_0-l) = 0$$

como

$$A_m \neq 0$$

para que ello ocurra, deberá anularse alguno de los factores, para lo cual, deberá ser x_0 igual a una de las raíces $a, b, c, \dots, l$. Luego el número de ellas es m .

10.2.5.- Definición: Se dice que a es una raíz de orden p de una ecuación $f(x) = 0$ si el polinomio $f(x)$ es divisible por $(x-a)^p$ y no lo es por $(x-a)^{p+1}$. Si $p = 1$ la raíz es simple; si $p > 1$ la raíz se llama múltiple.

Quando una ecuación $f(x) = 0$ admite una raíz a de orden α ; b de orden β ; c de orden γ ;; l de orden λ , se puede escribir el polinomio dado bajo la forma:

$$f(x) = A_m(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x-l)^\lambda$$

De esta manera una ecuación de grado m tiene m raíces, reales o imaginarias, distintas o también múltiples.

10.2.6.- Teorema: La condición necesaria y suficiente para que dos ecuaciones del mismo grado tengan las mismas raíces, es que sus coeficientes sean proporcionales.

Sean las dos ecuaciones algebraicas y enteras del mismo grado:

$$f(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0$$

$$\varphi(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0 = 0$$

1) La condición es necesaria, es decir si $f(x) = 0$ y $\varphi(x) = 0$ tienen las mismas raíces, sus coeficientes son proporcionales, en efecto, podrá escribirse:

$$\begin{array}{l} f(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = A_m (x-a)(x-b) \dots (x-l) \\ \varphi(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_1 x + B_0 = B_m (x-a)(x-b) \dots (x-l) \end{array} \quad \begin{array}{l} B_m \\ A_m \end{array}$$

Multipliquemos respectivamente por B_m y A_m y restémosles miembro a miembro:

$$(A_m B_m - A_m B_m) x^m + (A_{m-1} B_m - A_m B_{m-1}) x^{m-1} + \dots + (A_1 B_m - A_m B_1) x + (A_0 B_m - A_m B_0) = 0$$

lo cual exige que:

$$A_m B_m - A_m B_m = 0$$

$$A_{m-1} B_m - A_m B_{m-1} = 0$$

$$A_1 B_m - A_m B_1 = 0$$

$$A_0 B_m - A_m B_0 = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \dots = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_0}{B_0}}$$

2) La condición es suficiente; es decir, que si los coeficientes son proporcionales, las dos ecuaciones tienen las mismas raíces.

En efecto, si

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \dots = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_0}{B_0} = \lambda \neq 0$$

$$\therefore A_m = \lambda B_m ; A_{m-1} = \lambda B_{m-1} ; \dots ; A_1 = \lambda B_1 ; A_0 = \lambda B_0$$

que sustituidas en $f(x)$ se obtendrá:

$$f(x) = \lambda B_m x^m + \lambda B_{m-1} x^{m-1} + \dots + \lambda B_1 x + \lambda B_0 = \lambda \varphi(x)$$

y como $\lambda \neq 0$, se ve que $f(x)$ debe anularse para los mismos valores de x que $\varphi(x)$, es decir, para las mismas raíces.

10.2.7.- Condición para que dos ecuaciones tengan una raíz común.

Dadas dos ecuaciones algebraicas y enteras:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

admitiremos, sin demostrarlo, que la condición necesaria y suficiente para que ellas tengan una raíz común es que sus coeficientes cumplan relaciones comunes que se obtienen eliminando x entre las dos ecuaciones.

Para eliminar x entre las dos ecuaciones se las combina de manera de obtener una relación en la que no figura x ; esta relación sólo contiene los coeficientes de ambas ecuaciones.

10.3.- ECUACIONES DE PRIMER GRADO

10.3.1.- Condición para que dos ecuaciones de primer grado con una incógnita tengan una raíz común:

Sean las ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + b = 0 \\ a'x + b' = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l|l} a' & (1) \\ a & (2) \end{array}$$

eliminemos x multiplicando la primera por a' y la segunda por a , restándolas, se obtiene:

$$ab' - a'b = 0$$

siendo ésta la condición pedida.

10.3.2.- Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Métodos

Sea el sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

El método consiste en eliminar una de las incógnitas para luego obtener una ecuación con una sola incógnita. Eliminemos y , para lo cual multipliquemos a (1) por b' y a (2) por $(-b)$, y sumemos a ambas, con lo que obtenemos:

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'$$

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

Sustituyendo a x en cualquiera de ellas, obtendremos:

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - a'b}$$

Para que existan valores finitos de x e y es condición necesaria que

$$ab' - a'b \neq 0$$

Si además de ser

$$ab' - a'b = 0$$

es

$$cb' - bc' = 0$$

$$ac' - ca' = 0$$

los valores de $\underline{x}$ e $\underline{y}$ son indeterminados, de la forma $\frac{0}{0}$. En este caso, de ahí obtenemos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \lambda$$

es decir, que los coeficientes de la segunda ecuación son proporcionales a los de la primera, con lo que no tenemos dos ecuaciones, sino una sola.

I) Método de sustitución

Consiste en sacar el valor de una incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones dadas y sustituirla luego en la otra, con lo que se consigue una ecuación con una sola incógnita. Sea el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9 & (1) \\ 2y - 3x = 12 & (2) \end{cases}$$

despejada en (1) la incógnita $\underline{x}$, obtenemos:

$$x = \frac{9 - 5y}{3} \quad (3)$$

que sustituida en (2) da:

$$2y - 3 \cdot \frac{9 - 5y}{3} = 12$$

$$2y - 9 + 5y = 12$$

$$7y = 12 + 9$$

$$7y = 21$$

$$\boxed{y = 3}$$

sustituyendo este valor en (3), resulta:

$$x = \frac{9 - 5 \cdot 3}{3} = \frac{9 - 15}{3}$$

$$x = -2$$

II) METODO DE IGUALACION

Consiste en despejar una misma incógnita en ambas ecuaciones, e igualar luego los segundos miembros, con lo que se consigue una ecuación con una sola incógnita.

Sea el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Multiplicando la (1) por el m.c.m. (2 y 3) = 6 y la segunda, por el m.c.m. (y;2) = 2y, se obtiene por el 1º y 2º principios:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

despejamos en ambas la incógnita x es:

$$\begin{cases} x = \frac{8 - 3y}{2} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2} \end{cases} \quad (6)$$

de donde

$$\frac{8 - 3y}{2} = \frac{y}{2}$$

$$8 - 3y = y$$

O sea

$$-3y - y = -8$$

$$-4y = -8$$

$$y = 2$$

reemplazando este valor en (6) resulta:

$$x = 1$$

III) METODO DE REDUCCION

Consiste en obtener el mismo coeficiente en la misma incógnita en las dos ecuaciones, para poder eliminar esa incógnita ya sea sumando ambas ecuaciones si esos términos tienen distintos signos, o restándolas si tienen igual signo (primer principio).
Sea el sistema:

$$\begin{cases} 10x + 4y = 3 & 1 & -5 & (1) \\ -5x + 20y = 4 & 2 & 1 & (2) \end{cases}$$

Para eliminar la incógnita x se multiplica la primera ecuación por 1 y la segunda por 2, se obtiene así:

$$\begin{array}{rcl} + & \left\{ \begin{array}{l} 10x + 4y = 3 \\ -10x + 40y = 8 \end{array} \right. & \\ \text{Sumando} & & 44y = 11 \end{array}$$

$$y = \frac{1}{4}$$

Para eliminar la incógnita y se multiplica la primera ecuación por (-5) y la segunda por 1, da:

$$\begin{array}{rcl} + & \left\{ \begin{array}{l} -50x - 20y = -15 \\ -5x + 20y = 4 \end{array} \right. & \\ & \hline & -55x & = -11 \end{array}$$

o sea

$$-3y - y = -8$$

$$-4y = -8$$

$$y = 2$$

reemplazando este valor en (6) resulta:

$$x = 1$$

III) METODO DE REDUCCION

Consiste en obtener el mismo coeficiente en la misma incógnita en las dos ecuaciones, para poder eliminar esa incógnita ya sea sumando ambas ecuaciones si esos términos tienen distintos signos, o restándolas si tienen igual signo (primer principio).
Sea el sistema:

$$\begin{cases} 10x + 4y = 3 & 1 & -5 & (1) \\ -5x + 20y = 4 & 2 & 1 & (2) \end{cases}$$

Para eliminar la incógnita x se multiplica la primera ecuación por 1 y la segunda por 2, se obtiene así:

$$\begin{array}{rcl} & + & \begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ -10x + 40y = 8 \end{cases} \\ \text{Sumando} & & 44y = 11 \end{array}$$

$$y = \frac{1}{4}$$

Para eliminar la incógnita y se multiplica la primera ecuación por (-5) y la segunda por 1, da:

$$\begin{array}{rcl} + & \begin{cases} -50x - 20y = -15 \\ -5x + 20y = 4 \end{cases} & \\ \hline & -55x & = -11 \end{array}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{5}}$$

IV) METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS O METODO DE BEZOUT

Este método es ventajoso cuando se trata de resolver un sistema que contenga más de dos incógnitas. Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 5x - y = 5 & (1) \\ -2x + 3y = 11 & (2) \end{cases} \quad m$$

se multiplica a una de las ecuaciones por un coeficiente indeterminado m y se suman ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 5mx - my = 5m \\ -2x + 3y = 11 \end{cases} \\ \hline (5m-2)x + (-m+3)y = 5m + 11 \end{array} \quad (3)$$

Para calcular a x basta hacer:

$$-m + 3 = 0 \quad \therefore \quad m = 3$$

$$\text{si es } m = 3 \quad \therefore \quad (5 \cdot 3 - 2)x = 5 \cdot 3 + 11$$

$$13x = 26$$

$$\boxed{x = 2}$$

para calcular a y basta hacer:

$$5m - 2 = 0 \quad \therefore \quad m = \frac{2}{5}$$

$$\text{si es } m = \frac{2}{5} \quad \therefore \quad \left(-\frac{2}{5} + 3\right)y = 5 \cdot \frac{2}{5} + 11$$

$$\frac{13}{5} y = 13$$

$$y = 5$$

V) METODO DE LOS DETERMINANTES

a) Determinantes de segundo grado

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

por cualquiera de los métodos explicados se obtiene:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} ; \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd} \quad (1)$$

donde se observa que los denominadores son iguales, y en los numeradores de cada incógnita se hallan los coeficientes de la otra y los términos independientes. Es más fácil recordar estas expresiones dándole una disposición más apropiada, que se conoce con el nombre de determinante. Llamamos determinante de segundo orden a la expresión:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

Un determinante de segundo orden consta de cuatro elementos dispuestos en 2 filas o en 2 columnas de dos elementos en cada una.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 4(-3) - 3(-2) = -12 + 6 = -6$$

Utilizando el cálculo de determinantes, las soluciones (1) de la ecuación dada se podrán escribir así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Al denominador se lo suele llamar determinante general y se lo indica con la letra griega Δ (delta mayúscula).

Regla:

- 1) Se calcula el valor del determinante general.
- 2) Una incógnita cualquiera es igual al cociente de dos determinantes de segundo orden, siendo el denominador el determinante general Δ . El determinante del numerador se forma sustituyendo en el determinante general, la columna de los coeficientes de esa incógnita por los términos independientes del segundo miembro de cada ecuación del sistema.

b) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 12x - 5y = 47 \\ 7x + 4y = 62 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 4 - 7(-5) = 48 + 35 = 83$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 47 & -5 \\ 62 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{188 - 62(-5)}{83} = \frac{188 + 310}{83} = \frac{498}{83}$$

$$\boxed{x = 6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 47 \\ 7 & 62 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12 \cdot 62 - 7 \cdot 47}{83} = \frac{744 - 329}{83} = \frac{415}{83}$$

$$\boxed{y = 5}$$

VI) METODO GRAFICO

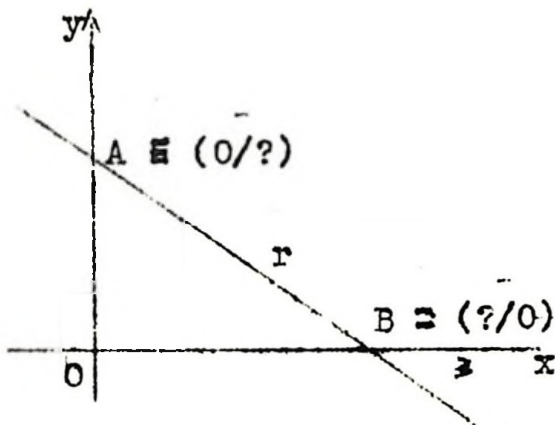
Resolver gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - 3x = 12 & (2) \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones dadas representan una recta, para lo cual bastará hallar las coordenadas de los puntos que cada una de ellas corta a los ejes.

Dada una recta cualquiera:



$r = ax + by + c = 0$
 cortará a los ejes en los puntos $A = (0 / ?)$ perteneciente al eje de ordenadas y $B = (?/0)$ perteneciente al eje de abscisas.
 Las coordenadas desconocidas se hallarán haciendo cero la abscisa o la ordenada respectiva según que el punto pertenezca al eje de ordenadas o al eje de abscisas.

Para nuestro caso, tomamos la primera recta:

$$3x + 5y = 9$$

si $x = 0$ $\therefore$ $5y = 9$ $y = \frac{9}{5}$

es

$$A = \left(0 / \frac{9}{5} \right)$$

el punto de intersección con el eje de ordenadas.

Si $y = 0$ $\therefore$ $3x = 9$ $x = 3$

es

$$B = (3/0)$$

el punto de intersección con el eje de abscisas.

La segunda recta: $2y - 3x = 12$

Si $x = 0$ $\therefore 2y = 12$ $y = 6$

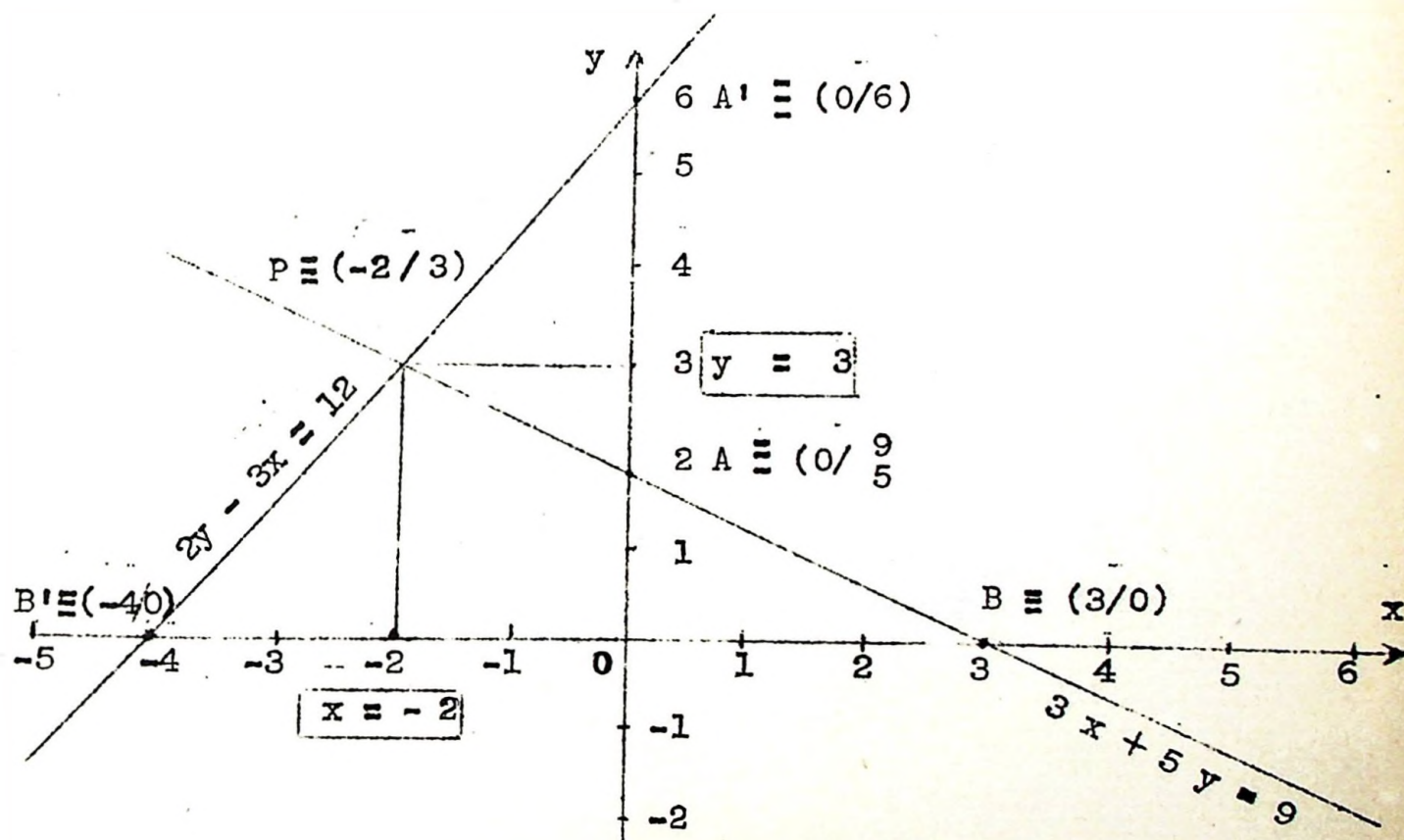
es $A' \equiv (0/6)$

el punto de intersección con el eje de ordenadas.

Si $y = 0$ $\therefore -3x = 12$ $x = -4$

es $B' \equiv (-4/0)$

el punto de intersección con el eje de abscisas.



Ambas rectas se cortan en el punto $P \equiv (-2/3)$ cuyas coordenadas son las soluciones del sistema dado, vale decir:

$$x = -2$$

$$y = 3$$

10.3.3.- Sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & (1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (3) \end{cases}$$

Formemos el determinante Δ de los coeficientes de las incógnitas

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

después los determinantes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

obtenidos reemplazando en Δ los coeficientes de una incógnita por los términos aristas.

Se demuestra que:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 14 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 15 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2 \quad \therefore \boxed{x = 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 14 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3 \quad \therefore \boxed{y = 3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 14 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-65}{-13} = 5 \quad \therefore \boxed{z = 5}$$

10.4.- ECUACION DE SEGUNDO GRADO

10.4.1. Forma de la ecuación de segundo grado con una variable.

Una ecuación completa de segundo grado de una variable se reduce siempre a la forma.

$$a x^2 + b x + c = 0$$

donde a, b y c son coeficientes numéricos.

Ejemplo:

$$5 x^2 - 8 x + 12 = 0$$

es una ecuación completa de segundo grado.

Si falta el término lineal o el término independiente, la ecuación se llama incompleta y ella siempre se podrá reducir a la forma:

$$a x^2 + b x = 0$$

o bien $a x^2 + c = 0$

Ejemplo:

$$2 x^2 + 5 x = 0$$

$$6 x^2 - 12 = 0$$

Son ecuaciones de segundo grado incompletas.

10.4.2.- RESOLUCION

I) Ecuación incompleta

1er.Caso:

$$a x^2 + b x = 0$$

sacando x como factor común, resulta:

$$x (a x + b) = 0$$

Para que el producto de dos factores sea nulo, se requiere que por lo menos uno de ellos lo sea, en consecuencia, deberá tenerse:

$$x = 0$$

o bien

$$a x + b = 0$$

$$x = - \frac{b}{a}$$

son las dos raíces de la ecuación dada, siendo una de ellas nula.

Ejemplo:

$$x^2 - 12 x = 0$$

$$x (x - 12) = 0$$

$$\therefore \boxed{x = 0} \quad \text{y} \quad x - 12 = 0$$

$$\therefore \boxed{x = 12}$$

2do. Caso:

$$a x^2 + c = 0$$

$$a x^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

de donde salen las dos raíces:

$$\boxed{x_1 = + \sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

$$\boxed{x_2 = - \sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

Ejemplo:

$$2 x^2 - 12 = 0$$

dividiendo por 2 ambos miembros, es:

$$x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm \sqrt{6}$$

$\therefore$

$$\boxed{x_1 = \sqrt{6}}$$

$$\boxed{x_2 = -\sqrt{6}}$$

II) Ecuación completa

La ecuación completa de segundo grado siempre se puede reducir a la forma:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

llamada ecuación completa general.

Si dividimos por a se obtiene:

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

y designando con

$$p = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{a}$$

es

$$x^2 + p x + q = 0$$

la ecuación completa reducida.

1er. Caso: Método de Baskara

$$a x^2 + b x + c = 0$$

multiplicamos ambos miembros por 4 a:

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x + 4 a c = 0$$

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x = -4 a c \quad (1)$$

El primer miembro es el desarrollo incompleto de un binomio de la forma:

$$(m + n)^2 = m^2 + 2 m n + n^2$$

cuyo primer término es:

246

$$m^2 = 4 a^2 x^2 \quad \therefore \quad m = 2 a x$$

y el duplo del primero por el segundo es:

$$2 m n = 4 a b x$$

reemplazamos a m por 2 a x y se tiene

$$2 \cdot 2 a x \cdot n = 4 a b x$$

$$\therefore \quad \underline{n = b}$$

luego el segundo término es b y su cuadrado b² que agregamos a ambos miembros de (1):

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x + b^2 = b^2 - 4 a c$$

$$\text{o sea} \quad (2 a x + b)^2 = b^2 - 4 a c$$

y despejando el valor de x obtendremos:

$$2 a x + b = \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}$$

$$2 a x = - b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}$$

$$\boxed{x = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}}$$

(2)

Donde se ve que las raíces de la ecuación completa general de segundo grado son iguales: al coeficiente de x tomado con signo contrario, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de ese coeficiente menos el cuádruplo del coeficiente de x² por el término independiente, todo ello dividido por el duplo del coeficiente de x².

De la expresión (2) sacamos las dos raíces

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$$6x^2 - 11x - 7 = 0$$

aplicando la (2) es:

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-7)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 168}}{12}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{289}}{12} = \frac{11 \pm 17}{12}$$

$$\therefore x_1 = \frac{11 + 17}{12} = \frac{28}{12}$$

$\therefore$

$$x_1 = \frac{7}{3}$$

$$x_2 = \frac{11 - 17}{12} = -\frac{6}{12}$$

$\therefore$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

2do. Caso:

$$x^2 + px + q = 0$$

pasando q al otro miembro resulta:

$$x^2 + px = -q$$

tenemos aquí también el desarrollo incompleto del cuadrado del binomio:

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

en la que

$$m^2 = x^2 \quad \therefore \quad m = x$$

y $2mn = px$

o sea

$$2 \cdot x \cdot n = px$$

$$n = \frac{p}{2} \quad \therefore \quad n^2 = \frac{p^2}{4}$$

agregando a ambos miembros $\frac{p^2}{4}$ resulta:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

o sea

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

y despejando x nos dá :

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \quad (3)$$

Las raíces de una ecuación completa reducida son iguales: a la mitad del coeficiente de x tomado con signo contrario, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de esa mitad del cual se resta el término independiente.

Ejemplo:

$$x^2 - 12x + 34 = 0$$

(4)

$$x = 6 \pm \sqrt{6^2 - 34}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 34}$$

pasando q al otro miembro resulta:

$$x^2 + px = -q$$

tenemos aquí también el desarrollo incompleto del cuadrado del binomio:

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

en la que

$$m^2 = x^2 \quad \therefore \quad m = x$$

y $2mn = px$

o sea

$$2 \cdot \cancel{x} \cdot n = p \cdot \cancel{x}$$

$$n = \frac{p}{2} \quad \therefore \quad n^2 = \frac{p^2}{4}$$

agregando a ambos miembros $\frac{p^2}{4}$ resulta:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

o sea

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

y despejando x nos dá :

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \quad (3)$$

Las raíces de una ecuación completa reducida son iguales: a la mitad del coeficiente de x tomado con signo contrario, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de esa mitad del cual se resta el término independiente.

Ejemplo:

$$x^2 - 12x + 34 = 0 \quad (4)$$

$$x = 6 \pm \sqrt{6^2 - 34}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 34}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{2}$$

∴

$$x_1 = 6 + \sqrt{2} = 7,414\text{--}$$

$$x_2 = 6 - \sqrt{2} = 4,586\text{--}$$

Observación I) Las soluciones de la ecuación reducida se pueden obtener con la fórmula (2) de la ecuación general, en la que $a = 1$. En efecto, para resolver la (4) con dicha fórmula tendremos en cuenta que:

$$a = 1$$

$$b = -12$$

$$c = 34$$

$$\therefore x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 136}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{2}$$

valor encontrado anteriormente.

Observación II) Si en la fórmula (2) de la ecuación completa general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dividimos el numerador y denominador del segundo miembro por a , se obtiene:

$$x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}}}{2}$$

y como

$$\frac{b}{a} = p \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} = q$$

es

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

o bien

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{4q}{4}}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

que es la forma de resolución de la ecuación completa reducida hallada antes.

10.4.3.- Discusión de la ecuación de segundo grado,

Designaremos con discriminante a la expresión:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Las raíces son reales y distintas, reales e iguales, o imaginarias conjugadas, según que

$$b^2 - 4ac \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

Cuando las raíces son reales, se puede escribir que:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x-x')(x-x'') = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

como después demostraremos para el trinomio de segundo grado; en donde se ha designado con x_1, x_2 a las raíces de la ecuación de segundo grado resultante de igualar a cero al trinomio.

De la expresión anterior deducimos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Signos de las raíces: Resumiendo la discusión de los signos:

Si $\frac{c}{a} > 0$ las raíces son del mismo signo, en cuyo caso puede ocurrir que:

1ª) $-\frac{b}{a} > 0 \quad \therefore$ las dos raíces son positivas

2ª) $-\frac{b}{a} < 0 \quad \therefore$ las dos raíces son negativas

Si $\frac{c}{a} < 0$ las raíces son de signos contrarios, en cuyo caso puede ocurrir que:

1ª) $-\frac{b}{a} > 0 \quad \therefore$ la raíz de mayor valor absoluto es positiva

2ª) $-\frac{b}{a} < 0 \quad \therefore$ la raíz de mayor valor absoluto es negativo

10.4.4.- Trinomio de segundo grado

Se designa así a la expresión

$$y = ax^2 + bx + c$$

sacamos a a como factor común:

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

consideramos a $\left(x^2 + \frac{b}{a}x \right)$ como los dos primeros términos del cuadrado de un binomio, del a cual x es el primer término y el segundo es $\frac{b}{2a}$. Sumando y restando $\frac{b^2}{4a^2}$ se obtiene:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right]$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, el trinomio es de la forma

$$y = a (p^2 - q^2)$$

es decir, una diferencia de cuadrados. Designando con x_1 y x_2 las raíces de la ecuación se puede escribir :

$$y = a \left[\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \quad (1)$$

o sea

$$\boxed{y = a (x - x_1) (x - x_2)}$$

Si $b^2 - 4ac = 0$, el trinomio puede escribirse así:

$$y = a p^2$$

en cuyo caso:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

y siendo en este caso $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

es $y = a \left[x - \left(-\frac{b}{a} \right) \right]^2$

∴

$$y = a (x - x_1)^2 = a (x - x_2)^2$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, el trinomio es de la forma :

$$y = a (p^2 + q^2)$$

designando ahora con α y β a las dos raíces imaginarias de la ecuación de segundo grado, resulta también:

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

obtenida reemplazando el valor de esas raíces en (1).-

10.4.5.- SIGNOS DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

1) Si $b^2 - 4ac \leq 0$, el trinomio es de la forma:

$$y = a (p^2 + q^2) \quad \text{o} \quad y = a p^2$$

y por consecuencia, el signo del trinomio es el mismo que el de a cualquiera sea el de x .

2) Si $b^2 - 4ac > 0$, el trinomio es de la forma:

$$y = a (p^2 - q^2) = a (x - x_1) (x - x_2)$$

y por consecuencia, el trinomio tiene el signo de a cuando x es exterior a las raíces x_1 y x_2 y signo contrario a a si x está comprendido entre las dos raíces.

10.5.- EJERCICIOS

A) ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA:

$$1) \quad \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8} \quad x = 17$$

$$2) \quad \frac{x-4}{3} + (x-1)(x-2) = x^2 - 2x - 4 \quad x = 7$$

$$3) \quad 1 - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{3}{4x} \right) = \frac{2}{3} \left(3 - \frac{5x}{2} \right) + 5 \frac{13}{40} \quad x = \frac{51}{10}$$

$$4) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x-1} + \frac{9}{3x-1} = \frac{36}{6x-1} \quad x = \frac{2}{5}$$

$$5) \quad \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-5}{x-6} - \frac{x-6}{x-7} \quad x = 4 \frac{1}{2}$$

$$6) \quad \frac{25 - \frac{1}{3}x}{x+1} + \frac{16x + 4 \frac{1}{5}}{3x+2} = \frac{23}{x+1} + 5$$

$$x = 3 \frac{3}{8}$$

$$7) \quad \sqrt{x} + \sqrt{4+x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$8) \quad \sqrt{3+x} = \sqrt{12-4x}$$

$$x = 9$$

$$9) \quad \sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{6}x}} = 2$$

$$x = 6$$

$$10) \quad \sqrt{5+x} + \sqrt{x} = \frac{15}{\sqrt{5+x}}$$

$$x = 4$$

B) SISTEMAS DE ECUACIONES:

$$1) \quad \begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{20-x} = \sqrt{y-x} \\ 3\sqrt{20-x} = 2\sqrt{y-x} \end{cases}$$

$$x = 16$$

$$y = 25$$

$$2) \quad \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24} \\ -\frac{4}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = 6$$

$$y = 12$$

$$z = 8$$

$$3) \quad \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{5y} + \frac{1}{z} = \frac{38}{5} \\ \frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} + \frac{2}{z} = \frac{61}{6} \\ \frac{4}{5x} - \frac{1}{2y} + \frac{4}{z} = \frac{161}{10} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{1}{4}$$

- 4)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + 3y = 7 \\ \frac{4x - 2}{5} = 3y - 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}$$
- 5)
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -4 \\ \frac{2}{y} - \frac{3}{x} = -7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{array}$$
- 6)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8 \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 18 \\ y = 6 \end{array}$$
- 7)
$$\begin{cases} \sqrt{x - 2y} = 2 \\ \sqrt{x + 5\sqrt{y}} = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 9 \end{array}$$
- 8)
$$\begin{cases} \sqrt{3x + 5y} = 6 \\ \sqrt[3]{15x - \frac{y}{2}} = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 6 \end{array}$$
- 9)
$$\begin{cases} \frac{6x - 4x}{3z - 7} = 1 \\ \frac{15 - x}{2y - 3z} = 1 \\ \frac{y - 2z}{3y - 2x} = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{array}$$
- 10)
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 10 - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{2}(x + z) = 9 - y \\ \frac{1}{4}(x - z) = 2y - 7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{array}$$

$$11) \begin{cases} y + \frac{z}{3} = \frac{x}{5} + 5 \\ \frac{x-1}{4} - \frac{y-2}{5} = \frac{z+3}{10} \\ x - \frac{2y-5}{3} = 1\frac{3}{4} - \frac{z}{12} \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \\ z = -3 \end{array}$$

$$12) \begin{cases} \frac{12}{2x+3y} - \frac{7,5}{3x+4z} = 1 \\ \frac{30}{3x+4z} + \frac{37}{5y+9z} = 3 \\ \frac{222}{5y+9z} - \frac{8}{2x+3y} = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$$

Se hace $m = \frac{1}{2x+3y}$;

$n = \frac{1}{3x+4z}$

y $p = \frac{1}{5y+9z}$

c) ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO:

$$1) \quad \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x}{3} + \frac{3}{x} \quad x = \pm \sqrt{6}$$

$$2) \quad (3x-5)(2x-5) = (x+3)(x-1) \quad x = 4; \frac{7}{5}$$

$$3) \quad \frac{x+2}{x-1} - \frac{2x}{4-x} = \frac{7}{3} \quad x = 2; -\frac{4}{5}$$

$$4) \quad \frac{4x+7}{19} + \frac{5-x}{3+x} = \frac{4x}{9} \quad x = 3; -8,7$$

$$5) \quad 10(2x+3)(x-3) + (7x+3)^2 = 20(x+3)(x-1) - x - 1; -\frac{3}{7}$$

$$6) \quad \frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} + \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{13}{4} \quad x = -3; -\frac{7}{5}$$

$$7) \quad \frac{\sqrt{x}}{21 - \sqrt{x}} + \frac{21 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2 \frac{1}{2} \quad x = 196; 49$$

$$8) \quad \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{3}{\sqrt{x+11}} \quad x = 5; -2$$

$$9) \quad \frac{1}{1 - \sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2} \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

$$10) \quad \frac{\sqrt{3x^2+4} - \sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{3x^2+4} + \sqrt{2x^2+1}} = \frac{1}{7} \quad x = \pm 2$$

10.6.- BIBLIOGRAFIA

- 1).- G.M. Bruño: "Elementos de Algebra" Edit. Ch. Bouret - México.
- 2).- E. Morales: "Lecciones de Algebra Elemental" Ed. Ivaldi y Checchi B.A.
- 3).- F. Alzaa: "Nociones de Algebra Elemental" Ed. La Unión - Bs.As.
1911
- 4).- M. Laboureur: Cours de Calcul Algebrique, Différentiel et Intégral
Ed. Ch. Beranger - París - 1913
- 5).- A. Terry y Rivas: "Ejercicios de Algebra" Ed. N. Moya - Madrid-1914

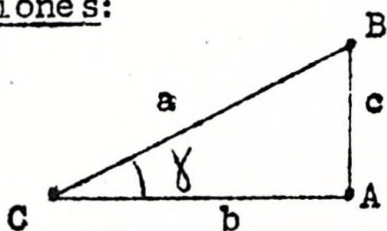
28-10-1955

31-10-1955

11.-

TRIGONOMETRIA11.1.- Nota Histórica

La trigonometría es tan vieja como Egipto, aunque en una forma rudimentaria. Tolomeo en el siglo II d.J. C. en su Almagesto resumió las características principales de la Geometría Esférica, en donde la Trigonometría plana aparece como un suplemento para el cálculo de la Trigonometría Esférica. Los griegos utilizaron estos conocimientos trigonométricos egipcios para su astronomía pero sin dar gran avance a esta rama. Los hindúes, aproximadamente en el siglo IV, después de J.C., dieron un desarrollo considerable a la trigonometría griega, construyendo tablas de senos calculadas de $32,75$ hasta 90° . Los árabes adoptaron y desarrollaron la trigonometría hindú y el primer progreso notable se debió al astrónomo A.P. BATTANI en el siglo IX con el uso del seno, tg y cotg de los hindúes. En el siglo X se construyen tablas de tg y cotg, y se descubren la secante y cosecante. La sistematización de la Trigonometría como disciplina matemática se debe a Abul - Wefa al finalizar el siglo X. El primer texto árabe de trigonometría como ciencia independiente fue debido al astrónomo persa NASIR - EDDIN (1201 - 1274) que con la decadencia de la cultura árabe quedó olvidado. Recién en 1202, Leonardo de Pisa (FIBONACCI) da a conocer en Europa estas nociones del álgebra hindú arábiga en su obra maestra LIBER ABACI.

11.2.- Líneas Trigonométricas - Fórmulas1) Definiciones:

En el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, se llama:

$$\text{sen } \gamma = \frac{c}{a}$$

$$\text{cosec } \gamma = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } \gamma = \frac{b}{a}$$

$$\text{sec } \gamma = \frac{a}{b}$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{c}{b}$$

$$\text{cotg } \gamma = \frac{b}{c}$$

Estas seis relaciones se deben considerar como funciones del ángulo $\gamma = \angle BCA$.

2) Propiedades

Teniendo presente el teorema de Pitágoras y las definiciones anteriores, se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$a) \quad \text{sen}^2 \gamma + \text{cos}^2 \gamma = 1$$

$$b) \quad \text{tg } \gamma = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{cos } \gamma}; \quad \text{cotg } \gamma = \frac{\text{cos } \gamma}{\text{sen } \gamma}$$

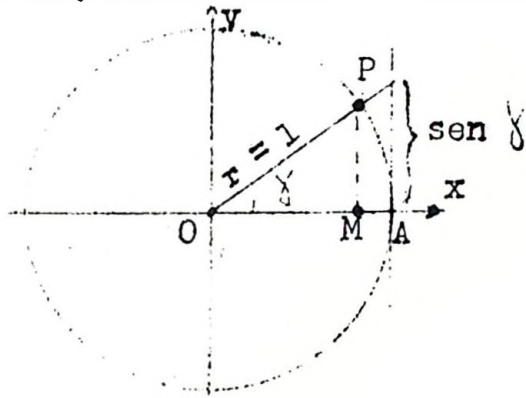
$$c) \quad \text{tg } \gamma \text{ cotg } \gamma = 1$$

$$d) \quad \text{cosec } \gamma = \frac{1}{\text{sen } \gamma}; \quad \text{sec } \gamma = \frac{1}{\text{cos } \gamma}; \quad \text{cotg } \gamma = \frac{1}{\text{tg } \gamma}$$

$$e) \quad 1 + \text{tg}^2 \gamma = \text{sec}^2 \gamma$$

3) La circunferencia trigonométrica

Si se toma una circunferencia de radio = 1 y un ángulo γ agudo, las funciones trigonométricas tienen una representación especial. En efecto:



1) Si $y = \text{sen } \gamma$, en el triángulo rectángulo $\triangle MOP$ es

$$\text{sen } \gamma = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PM}}{1} = \text{med. } \overline{PM}$$

$$\boxed{\text{med. } \overline{PM} = \text{sen } \gamma}$$

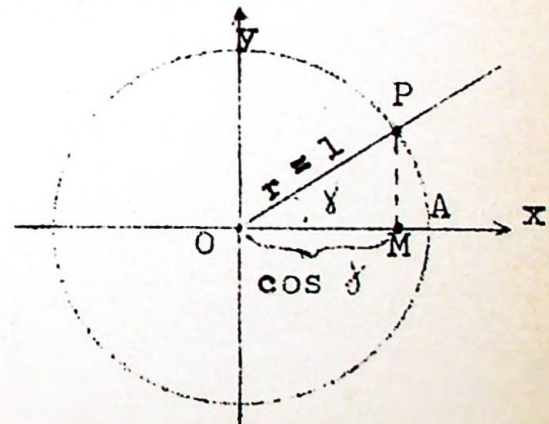
2) Si $y = \text{cos } \gamma$

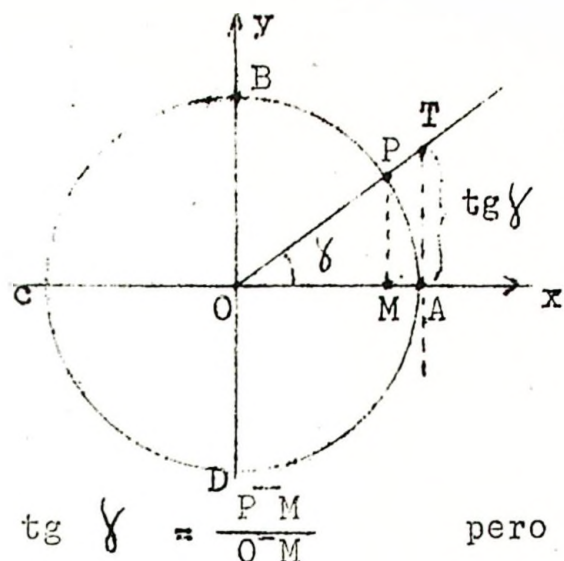
en $\triangle MOP$ es:

$$\text{cos } \gamma = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \text{med. } \overline{OM}$$

luego

$$\boxed{\text{med. } \overline{OM} = \text{cos } \gamma}$$





Si $y = \operatorname{tg} \gamma$

se traza la tangente en A a la circunferencia y consideramos la semejanza de los triángulos:

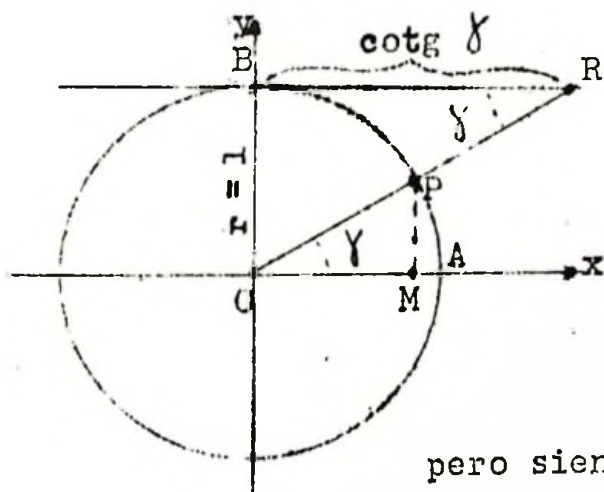
$$\triangle OPM \sim \triangle OAT$$

$\operatorname{tg} \gamma = \frac{PM}{OM}$ pero $\frac{PM}{OM} = \frac{AT}{OA}$

luego $\operatorname{tg} \gamma = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = \operatorname{med.} AT$

$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{med.} AT}$$

4) Si $y = \operatorname{cotg} \gamma$



se traza la tangente a la circunferencia en B y considerando la semejanza de los triángulos rectángulos:

$$\triangle OMP \text{ y } \triangle OBR \text{ resulta:}$$

$$\operatorname{cotg} \gamma = \frac{OM}{PM}$$

pero siendo: $\triangle OMP \sim \triangle OBR$

$$\frac{OM}{PM} = \frac{BR}{OB} = \frac{BR}{1} = \operatorname{med.} BR$$

luego es

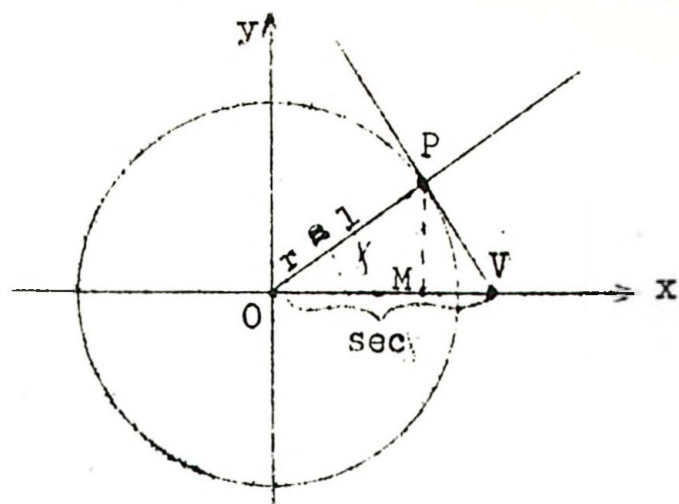
$$\boxed{\operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{med.} BR}$$

5)

Si

$$y = \sec \gamma$$

250



Se traza la tangente a la circunferencia en P y se consideran los triángulos

$\triangle OMP$ y $\triangle OPV$ que son semejantes.-

$$\sec \gamma = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}}$$

pero

$$\triangle OMP \sim \triangle OPV$$

luego

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OV}}{1} = \text{med } \overline{OV}$$

es

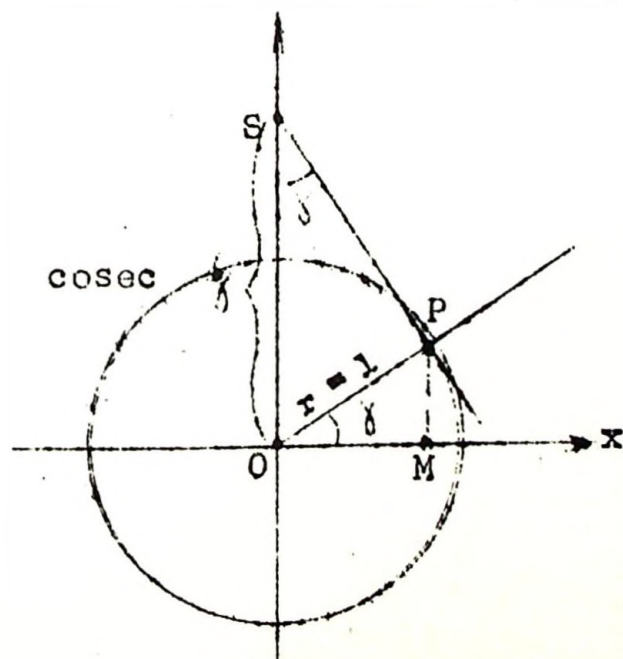
$$\sec \gamma = \text{med. } \overline{OV}$$

6)

y

Si

$$y = \operatorname{cosec} \gamma$$



Trazando la tangente al círculo en P y considerando los triángulos rectángulos $\triangle OMP$ y

$\triangle OPS$ que son semejantes, se tiene:

$$\operatorname{cosec} \gamma = \frac{\overline{OP}}{\overline{PM}}$$

pero siendo $\triangle OPM \sim \triangle OPS$ es:

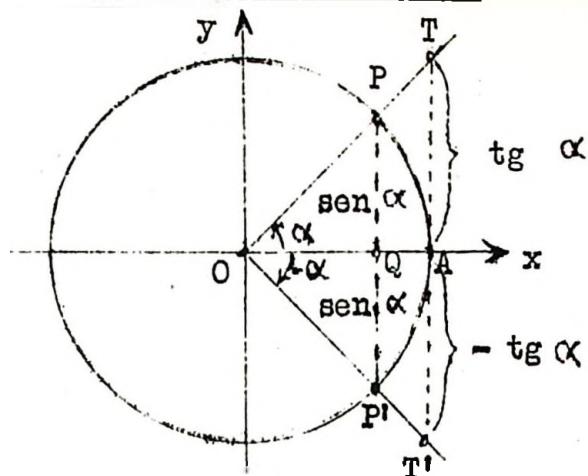
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OS}}{1} = \text{med } \overline{OS}$$

luego es

$$\operatorname{cosec} \gamma = \text{med. } \overline{OS}$$

4.- Relaciones diversas

a) Angulos opuestos.-

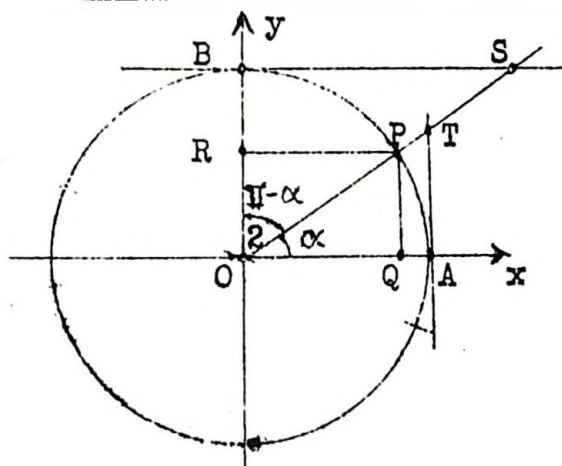


$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (-\alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha$$

b) Angulos complementarios.-

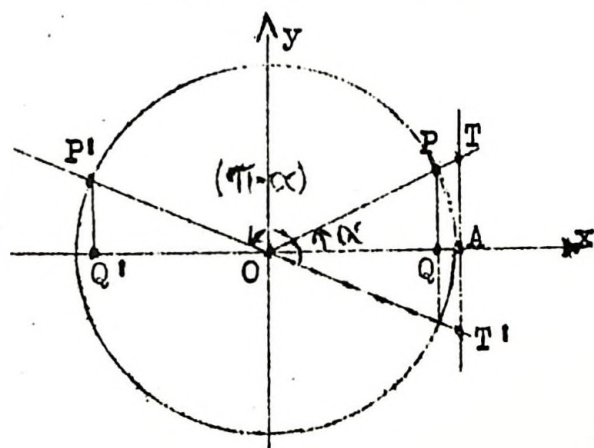


$$\text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \overline{RP} = \overline{OQ} = \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \overline{OR} = \overline{PQ} = \text{sen } \alpha$$

$$\text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \overline{BS} = \text{cotg } \alpha$$

c) Angulos suplementarios.-

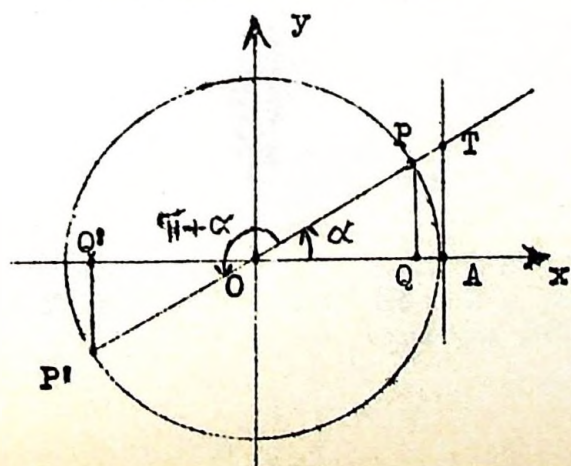


$$\text{sen } (\pi - \alpha) = \overline{P'Q'} = \overline{PQ} = \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (\pi - \alpha) = \overline{OQ'} = -\overline{OQ} = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (\pi - \alpha) = \overline{AT'} = -\overline{AT} = -\text{tg } \alpha$$

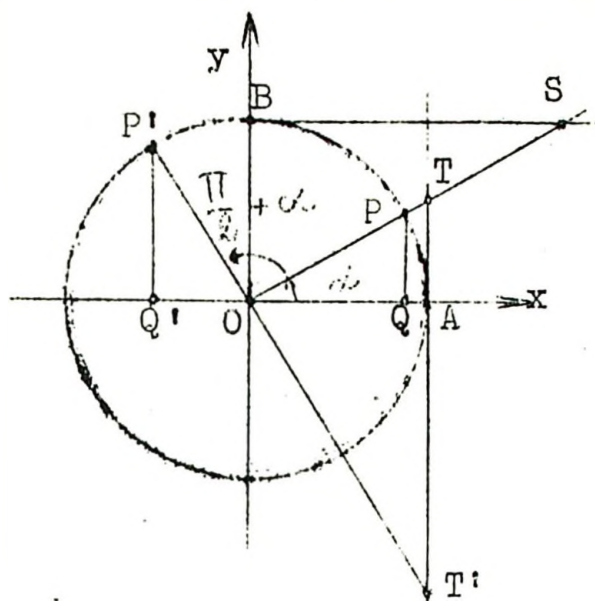
d) Angulos que difieren en π .-



$$\text{sen } (\pi + \alpha) = \overline{P'Q'} = -\overline{PQ} = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } (\pi + \alpha) = \overline{OQ'} = -\overline{OQ} = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tg } (\pi + \alpha) = \overline{TA} = \text{tg } \alpha$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \overline{P'Q'} = \overline{OQ} = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \overline{OQ'} = -\overline{PQ} = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \overline{AT'} = -\overline{BS} = -\operatorname{cotg} \alpha$$

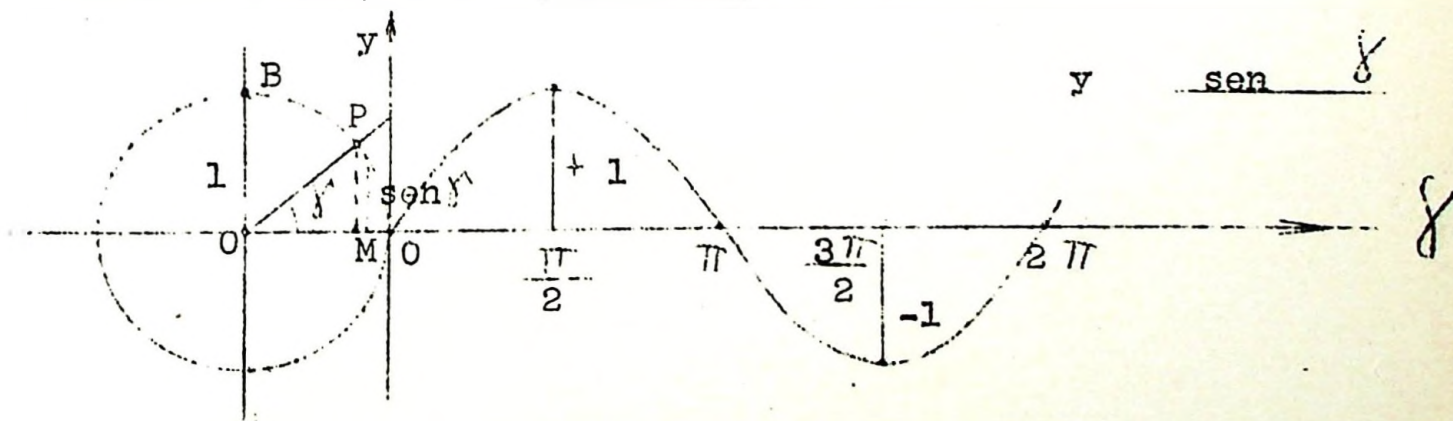
11.3 VARIACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

a) Variación del seno

En 1) si γ crece de 0° a 90° , la medida del segmento $\overline{PM}$, que da el $\sin \gamma$, varía de 0 a 1. Si γ crece de 90° a 180° , el $\sin \gamma$ disminuye de 1 a 0; si ahora γ crece de 180° a 270° , el $\sin \gamma$ disminuye de 0 a -1, y finalmente, si γ crece de 270° a 360° completando un giro, el $\sin \gamma$ crece de -1 a 0. Estas variaciones del seno quedan tabuladas en la siguiente tabla:

γ	0° a 90°	90° a 180°	180° a 270°	270° a 360°
$\sin \gamma$	0 a 1	1 a 0	0 a -1	-1 a 0

Si llevamos sobre un eje horizontal los valores de γ en radianes y sobre el eje vertical los valores de $\sin \gamma$ se obtiene la siguiente curva, llamada senoide cuya forma se



repite en cada giro de γ , por ello se dice que el seno es una función periódica, de período 360° o 2π radianes, vale decir que:

$$\text{sen} (\gamma + k \ 360^\circ) = \text{sen} \gamma \quad (\text{en grados})$$

o bien
$$\text{sen} (\gamma + 2 k \pi) = \text{sen} \gamma \quad (\text{en radianes})$$

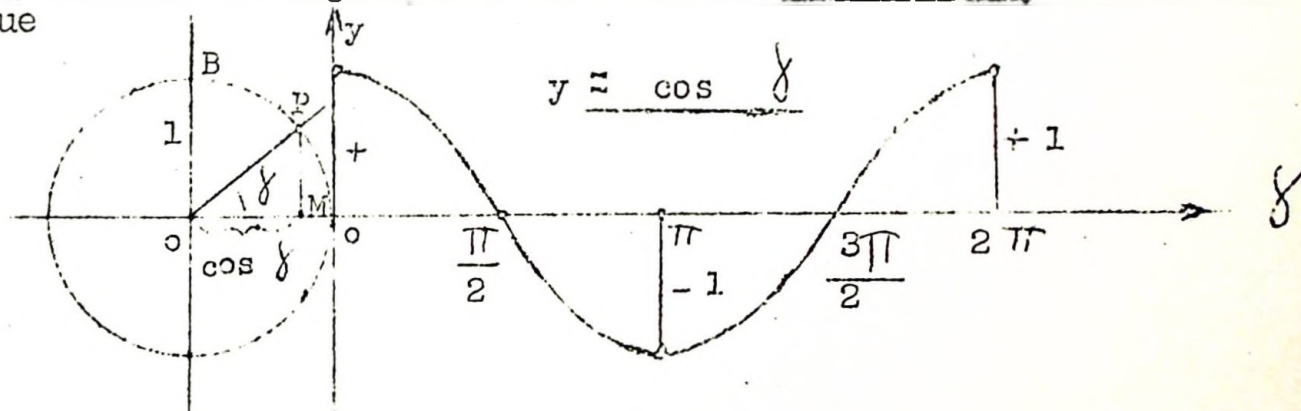
donde k es un número entero.

b) Variaciones del coseno

Siendo la medida de $\overline{OM}$ la que nos da el $\cos \gamma$, si γ varía de 0° a 90° , el segmento $\overline{OM}$ decrece de 1 a 0; si γ aumenta de 90° a 180° , es $\cos \gamma = 0$ para 90° y $\cos \gamma = -1$ para 180° . Ahora, si γ aumenta de 180° a 270° , el $\cos \gamma$ aumenta de -1 a 0, y finalmente, si γ crece de 270° a 360° , dando un giro completo, $\cos \gamma$ crece de 0 a 1. Estas variaciones se consignan en el siguiente cuadro:

γ	0° a 90°	90° a 180°	180° a 270°	270° a 360°
$\cos \gamma$	1 a 0	0 a -1	-1 a 0	0 a 1

Efectuando análoga representación gráfica que para el $\text{sen} \gamma$, pero llevando en este caso segmento $\overline{OM}$ sobre el eje vertical, se obtiene la siguiente curva llamada cosinusoide, que es una curva que



se repite en cada giro de γ , vale decir, que el coseno es una función periódica, de período 360° o 2π radianes.
En consecuencia:

$$\cos (\gamma + k \ 360^\circ) = \cos \gamma \quad (\text{en grados})$$

$$\cos (\gamma + 2 k \pi) = \cos \gamma \quad (\text{en radianes})$$

donde k es un número entero.

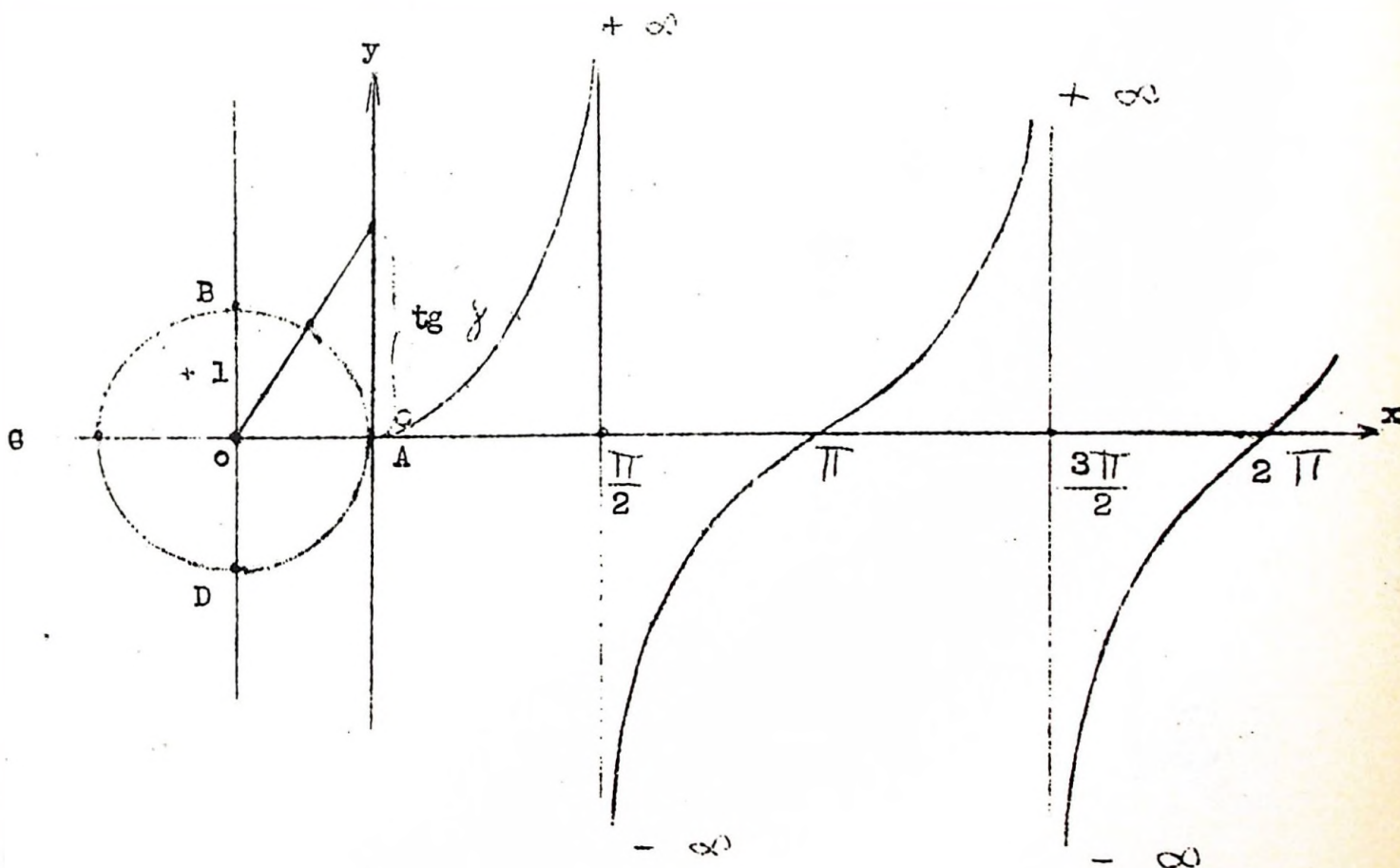
c) Variaciones de la tangente

Siendo la medida de $\overline{AT}$ la que nos da la $\text{tg} \gamma$, si γ varía de 0° a 90° , el punto T se desplaza, sobre esa recta, desde A hasta ∞ positivo, y en consecuencia, $\text{tg} \gamma$ varía de 0 a $+\infty$

Apenas P pasa a la izquierda de B, el punto T se desplaza de $+\infty$ a $-\infty$ apareciendo por debajo de A y la $\text{tg } \delta$ varía de $-\infty$ a 0 cuando P coincide con C. Al pasar P por debajo de C, el punto T pasa por encima de A y se aleja a $+\infty$ cuando P coincide con D, en cuyo caso la tangente varía de 0 a $+\infty$. Cuando P pasa a la derecha de D, el punto P salta de $+\infty$ a $-\infty$ y cuando P coincide con A, dando δ un giro completo, la $\text{tg } \delta$ ha pasado de $-\infty$ a 0. La siguiente tabla reúne estas variaciones:

δ	0° a 90°	90° a 180°	180° a 270°	270° a 360°
$\text{tg } \delta$	0 a $+\infty$	$-\infty$ a 0	0 a $+\infty$	$-\infty$ a 0

Llevando estos valores sobre dos ejes perpendiculares, - se tiene la curva llamada tangente que tiene saltos de discontinuidad



infinita para $\delta = \frac{\pi}{2}$ y $\delta = \frac{3\pi}{2}$;

se repite cada medio giro de γ , es decir que es periódica de período π ó 180° , luego:

$$\operatorname{tg} \gamma + k \cdot 180^\circ = \operatorname{tg} \gamma \quad (\text{en grados})$$

$$\operatorname{tg} \gamma + k \pi = \operatorname{tg} \gamma \quad (\text{en radianes})$$

5) Propiedades más notables

a) Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\pm \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$$

b) Fórmulas de duplicación

(para $\alpha = \beta$)

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

c) Fórmulas de la bisección

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

d) Fórmulas de prostaferesis

(Transformaciones de una suma o resta de senos o de cosenos en productos).

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

Ejemplo I: Transformar en producto:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{\cos 0^\circ - \cos \alpha}{\cos 0^\circ + \cos \alpha} = \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \left(-\frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo II: Transformar en producto: $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha}}{\frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \\
 & = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\sin \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right]} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)
 \end{aligned}$$

11. 4.- Ejercicios

1) Demostrar que:

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg} (45^\circ - \alpha) = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

2) Demostrar que:

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)}$$

3) Demostrar que:

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)}$$

4) Demostrar que:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \beta + 1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \beta - 1}$$

5) Demostrar que:

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

6) Dado $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$ calcular $\operatorname{sen} 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha$

7) Dado $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{2} - 1$ calcular $\operatorname{sen} \alpha$; $\cos \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha$

8) Conociendo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$ calcular

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \text{ y } \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

9) Demostrar que:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$$

10) Demostrar que:

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha$$

11) Demostrar que:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

12) Simplificar la expresión:

$$X = 2 \cos \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

11.5.- Bibliografía

Alzaa y Jaime: Trigonometría plana y esférica.
Bs. Aires.-

- 2) W.A. Granville: Trigonometría plana y esférica
Ed. V.T.E.H.A.- México- 1950
- 3) A.S. Sánchez Serrano: Trigonometría rectilínea y esférica
Ed. Tecnos - Madrid - 1948
- 4) Webster Wells: Nueva Trigonometría Plana y Esférica
Trad. esp. de E. Pereda. Ed. Heath y Cía.-
Nueva York.- 1917
- 5) Une Réunion de Professeurs. Cours de Trigonométrie
Ed. Librairie Générale.- París - 1947
- 6) G.M. Bruño: Elementos de Trigonometría
Ed. Ch. Bouret - París

12.- NUMEROS REALES

12.1.- NOTA HISTORICA.-

Durante mucho tiempo el estudio de los números irracionales fué resistido por los matemáticos que mostraron una marcada hostilidad hacia ellos. Aunque los números irracionales eran conocidos por la escuela de los pitagóricos en la antigüedad clásica, su estudio no fué encarado seriamente hasta el siglo XVII; en pleno siglo XVI, MICHAEL STIFEL (1486-1567) se resistía aún a la ampliación del campo racional como lo pone de manifiesto en su ARITHMETICA INTEGRA, Nuremberg, 1544. EDUARDO BENOT (español, 1822-1907) escribía en su ARITMETICA GENERAL, tomo III, pág.339: "La Aritmética no puede hacer cálculos con los irracionales porque éstos carecen de numeración" cuando ya WEIERSTRASS en Berlín en 1870 había establecido rigurosamente la teoría de los números irracionales.

Estos matemáticos refractarios a los nuevos adelantos de la Aritmética causaron mucho daño en sus respectivos países al retardar en ellos el avance de las nuevas ideas. JOHN WALLIS (inglés, 1616-1703) fué el primero en observar en su Arithmetica infinitorum, Oxford, 1655, que un número decimal de infinitas cifras aperiódicas es irracional. Con LORD WILLIAM BROUNKER (inglés, 1620-1683), WALLIS perfecciona la representación de los números irracionales por medio de las fracciones continuas cuyo descubrimiento se debe a PIERTO ANTONIO CA. TALDI (italiano, 1552-1626).

KARL WEIERSTRASS (alemán, 1815-1897) fué el primero que estableció la teoría rigurosa del número irracional en el año 1870, publicándola su discípulo KOSSAK en DIE ELEMENTE DER ARITHMETIK, 1872, dando con ello origen al movimiento matemático llamado Aritmetización del Análisis. Nuevos adelantos en la teoría se obtiene con los trabajos de GEORG CANTOR (1845-1918) que introduce su concepto de conjunto aditivo convergente de números racionales; con los de HEINRICH EDUARD HEINE (alemán 1821-1881) que expone su teoría en DIE ELEMENTE DER FUNCTIONENLEHRE, Journal de Grelle, vol.LXXIV, 1872.

En ese mismo año, 1872, apareció el famoso opúsculo de JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831-1916) titulado Stetigkeit und irrationale Zahlen (1870) que introduce la noción de número irracional mediante el concepto de cortadura en el campo de los números racionales. En igual fecha, CHARLES MERAY (francés, 1835-1911) dió a conocer en su NOUVEAU PRECIS D'ANALYSE INFINITESIMAL su contribución siguiendo la noción de sucesiones convergentes de números racionales, como lo hacen Cantor y Heine.

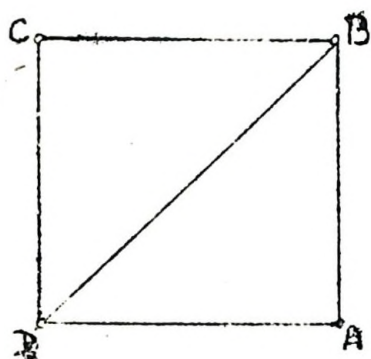
MICHEL CIPOLLA (italiano, 1880....) en su Analisi algebrica, Palermo, 1927, ha sustituido el concepto de cortadura por el de segmento numérico. introducido por MORITZ PASCH (alemán, 1843-1930); CESAR ARZELA (italiano, 1867-?) en 1877, y PAUL BACHMANN (alemán, 1837-?) en 1892, construyen el número real con dos sucesiones monótonas convergentes, una creciente y otra decreciente, tales que los números de la primera

son menores que los de la segunda. Finalmente CAPELLI en su Lezioni sui numeri reali, Nápoles 1903, desarrolló el método de las clases continuas, es decir, dos clases A y B de números racionales que cumplen la condición de que todo número de A sea menor que todo número de B; que A no tenga máximo ni B mínimo, y dado un número racional ξ tan pequeño como se quiera, existen dos números a y b de A y B respectivamente, tales que $b-a < \xi$.

12.2.- NECESIDAD DE UNA AMPLIACION DEL CAMPO NUMERICO

Los griegos demostraron que si un número no tiene raíz entera exacta tampoco la tiene fraccionaria, y, al aplicar el teorema de Pitágoras al caso de triángulo isósceles hallaron que la hipotenusa y el cateto no tienen medida común, o sea, que la diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables. En efecto, en el triángulo rectángulo

$\triangle ABD$ es:



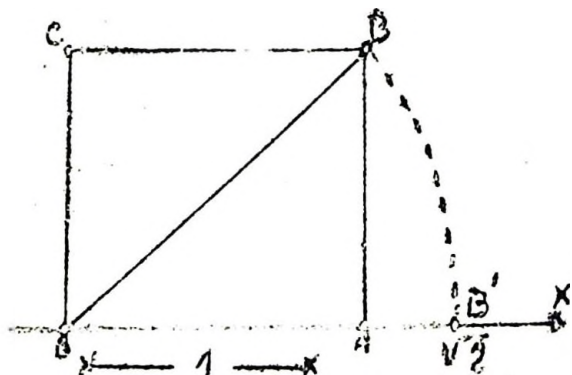
$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$$

siendo $\overline{AB} = \overline{AD}$

es $2\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2$

o sea $\frac{\overline{BD}^2}{\overline{AB}^2} = 2$

Y como no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, la razón $\overline{BD}:\overline{AB}$ carece de sentido en el campo de los números racionales.



Si sobre un sistema de abscisas de origen O, se construye el cuadrado OABC sobre el segmento unidad OA, y llevamos la diagonal OB sobre la semirrecta Ox, se obtiene el punto B' de abscisa $\sqrt{2}$ que no pertenece al campo de los números racionales, de modo, que el conjunto de los puntos de abscisa racional no llenan a la recta,

no es un conjunto denso: hay entre ellos infinitos puntos que no tienen abscisa racional. De aquí nació la necesidad geométrica de crear nuevos entes numéricos llamados números irracionales o inconmensurables que resolviesen este problema.

En el campo de los números racionales son siempre posibles las cuatro operaciones racionales: la adición y la multiplicación, con sus inversas, la sustracción y la división (con divisor distinto de cero). La potenciación con exponente natural, que es un caso particular de la multiplicación, también es siempre posible. Veamos si las operaciones inversas de la potenciación: radicación y logaritmación son también posibles.

La $\sqrt{-4}$ no puede ser ni $(+2)$ ni (-2) pues siempre $(\pm 2)^2 = 4$. Si el número no es potencia perfecta de otro, tampoco es posible obtenerla. Así $\sqrt[3]{2}$ no puede ser 1 pues $1^3 = 1 < 2$; ni 2, pues $(2)^3 = 8 > 2$; debe estar comprendida entre 1 y 2. En el cálculo de números aproximados pueden obtenerse valores cada vez más aproximados por defecto y por exceso; en efecto:

$$(1,2)^3 < 2 \quad ; \quad (1,3)^3 > 2 \quad ; \quad (1,25)^3 > 2$$

pero sin llegar nunca a un número decimal que sea exactamente igual a $\sqrt[3]{2}$.-

He aquí una nueva necesidad de ampliar el campo de los números racionales para hacer posible la radicación para índices pares de números negativos y para fracciones irreducibles cuyos términos no son potencias del índice de la raíz.

Una fracción ordinaria es posible convertirla en decimal, aún cuando ella tenga un número infinito de cifras, como son las fracciones decimales periódicas tales como:

$$\frac{1}{3} = 0,3\overline{3} \quad \text{o bien} \quad \frac{4}{15} = 0,26\overline{6}$$

pero existen fracciones decimales no periódicas cuyas cifras no cumplen una ley de sucesión, es decir, son arbitrarias, tal es el valor de

$$\pi = 3,14159\ldots$$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \ldots}}}}$$

con lo que aparece el número irracional independiente de todo proceso aritmético hasta aquí conocido.- Sólo es posible la logaritmación cuando el número dado solo es una potencia de la base; siendo ésta otra de las razones que se imponen para ampliar el campo de los números racionales.

Vamos a seguir el criterio de DEDEKIND para hacer esta ampliación.

12.3.- CORTADURA EN EL CAMPO DE LOS NUMEROS RACIONALES

Dado un número racional r , todos los números racionales se los puede clasificar en dos clases: A y B, de modo que todo número racional pertenezca a una u otra clase y que cualquier número de la clase A sea menor que cualquiera de la clase B. El grupo $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ constituye el conjunto de todos los números racionales menores y mayores respectivamente

que r , estando incluido r en una u otra clase indiferentemente.

Esta clasificación se llama cortadura, nombre dado por su creador DEDEKING (SCHNITT en alemán).

Ordenemos ahora los números de A y B en sucesión monótona, es decir, a la sucesión indefinida

$$a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_1 ; \dots$$

que forma A , la ordenamos en forma creciente, y a la

$$a'_1 ; a'_2 ; a'_3 ; \dots ; a'_1 ; \dots$$

que forma B , la ordenamos en forma decreciente; de modo que obtendremos:

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_1 \leq \dots \\ a'_1 \leq a'_2 \leq a'_3 \leq \dots \leq a'_1 \leq \dots \end{cases}$$

resultará que:

1) todo número a_n de la primera es menor que su correspondiente de la segunda a'_1 , es decir:

$$a_1 < a'_1$$

2) la diferencia $a'_1 - a_1$, entre dos términos correspondientes llega a ser menor que cualquier número ϵ desde un valor ϵ en adelante.

El número r es el elemento de separación o frontera de ambas clases, o mejor, de ambas sucesiones. Todo par de sucesiones monótonas que cumplen esas dos condiciones se llaman sucesiones monótonas convergentes.

Supongamos que en la clase A ponemos todos los números racionales menores que 1 y en la clase B , los mayores que 1; ordenamos la clase A de menor a mayor y a la clase B de mayor a menor; obtenemos las siguientes sucesiones monótonas convergentes:

$$A = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$$

$$B = (\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots)$$

que podemos escribir así:

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \dots\dots\dots$$

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} > \frac{6}{5} > \dots\dots\dots$$

cualquier número de A es de la forma $\frac{n-1}{n} < 1$ y cualquiera de B, de la forma $\frac{n+1}{n} > 1$; la diferencia entre ellos es:

$$\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n}$$

que puede hacerse tan pequeña como se quiera, con solo tomar a n lo suficientemente grande. Como

$$\frac{n-1}{n} < 1 < \frac{n+1}{n}$$

el número 1 es el número frontera.

Estas cortaduras que tienen un número racional frontera se llaman propias; hay otras que no tienen ningún elemento racional de separación o frontera, y se llaman impropias.

Por ejemplo, vamos a poner en la clase A todos los números racionales menores que $\sqrt{2}$ y en la clase B los que son mayores que $\sqrt{2}$, tendremos las siguientes sucesiones monótonas convergentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < 1,4142 < \dots\dots\dots \\ B = (2 < 1,5 < 1,42 < 1,415 < 1,4143 < \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

estas sucesiones cumplen las condiciones impuestas anteriormente pues:

- 1) todo número a de A es menor que uno cualquiera b de B
- 2) las diferencias entre cada dos términos correspondientes:

$$1; 0,1; 0,01; 0,001; \dots\dots; 0,000\dots\dots 1$$

puede ser tan pequeña como se desee; pero tanto en A como en B no hay

ningún número de ellas que sea mayor que los de la clase A ni menor que los de clase B, es decir, no hay ningún número racional que sea número frontera.

Llamaremos número racional a un nuevo ente definido por dos sucesiones monótonas convergentes que no tienen elemento de separación.
Diremos que:

Toda cortadura en el campo de los números racionales define un número racional o irracional si ella es propia o impropia.

El conjunto de los números racionales y todos los números irracionales los agruparemos en una nueva clase de números que llamaremos números reales. El campo numérico de la Aritmética tiene la siguiente estructura dada por las sucesivas ampliaciones:

$$\begin{array}{l} \text{Números naturales} \\ \text{" negativos} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Nº enteros} \\ \text{" fraccionarios} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Nº racionales} \\ \text{" irracionales} \end{array} \left. \right\} \text{Nº. reales}$$

Un número racional o irracional lo representamos así:

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \\ a'_1 \geq a'_2 \geq a'_3 \geq \dots \geq a'_n \geq \dots \end{array} \right.$$

o más brevemente:

$$\alpha = (a_1 ; a'_1)$$

12.4.- OPERACIONES FUNDAMENTALES

Las operaciones con números reales han de satisfacer las mismas leyes formales que los números racionales y coincidir con las operaciones de estos últimos cuando los datos sean números racionales, en base al principio, de conservación de las leyes formales o de Hankel.

Dados dos números reales

$$\alpha = (a_1 ; a'_1) \text{ y } \beta = (b_1 ; b'_1)$$

llamaremos:

1) Suma:

$$\gamma = (a_1 + b_1 ; a'_1 + b'_1)$$

2) Diferencia:

$$\delta = (a_1 - b_1 ; a'_1 - b'_1)$$

3) Producto:

$$\pi = (a_1 \cdot b_1 ; a'_1 \cdot b'_1)$$

4) Cociente:

$$\pi = (a_1 : b_1 ; a'_1 : b'_1)$$

Ejemplo: Dados:

$$\pi = \begin{cases} 3 < 3,1 < 3,14 < 3,141 < 3,1415 < \dots\dots\dots \\ 4 > 3,2 > 3,15 > 3,142 > 3,1416 > \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$e = \begin{cases} 2 < 2,7 < 2,71 < 2,718 < \dots\dots\dots \\ 3 > 2,8 > 2,72 > 2,719 > \dots\dots\dots \end{cases}$$

Se obtiene:

$$1) \text{ Suma: } \pi + e = \begin{cases} 5 < 5,8 < 5,85 < 5,859 < \dots\dots\dots \\ 7 > 6,0 > 5,87 > 5,861 > \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$2) \text{ Resta: } \pi - e = \begin{cases} 0 < 0,3 < 0,42 < 0,422 < \dots\dots\dots \\ 2 > 0,5 > 0,44 > 0,424 > \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$3) \text{ Producto: } \pi \times e = \begin{cases} 6 < 8,37 < 8,4094 < 8,537238 < \dots\dots\dots \\ 12 > 9,26 > 8,5680 > 8,543098 > \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$4) \text{ Cociente: } \pi : e = \begin{cases} 1 < 1,10 < 1,154 < 1,1552 < \dots\dots\dots \\ 2 > 1,18 > 1,158 > 1,1559 > \dots\dots\dots \end{cases}$$

12.5.- POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONALDefinición: Dada la base a y el exponente $\frac{m}{n} \geq 0$, llamare-

mos potencia de exponente racional a la expresión:

$$\text{Si,} \quad \frac{m}{n} > 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

y si

$$\frac{m}{n} < 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Se demuestra que con esta definición se cumplen las leyes formales de la potenciación ya conocidas.

Ejemplo:

$$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$5^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^3}} = \frac{1}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{25}$$

12.6.- POTENCIAS DE EXPONENTE REAL

1) Si la base a es un número racional y el exponente $n = (n_1; n'_1)$ es real, definimos la potencia por la cortadura:

$$a^n = \begin{cases} a^{n_1} \leq a^{n_2} \leq a^{n_3} \leq \dots \\ a^{n'_1} \geq a^{n'_2} \geq a^{n'_3} \geq \dots \end{cases}$$

2) Si la base $\alpha = (a_1; a'_1)$ es un número real, así como el exponente $n = (n_1; n'_1)$, definimos la potencia por la cortadura:

$$\alpha^n = \begin{cases} \alpha^{n_1} \leq \alpha^{n_2} \leq \alpha^{n_3} \leq \dots \\ \alpha^{n'_1} \leq \alpha^{n'_2} \leq \alpha^{n'_3} \leq \dots \end{cases}$$

Observación: En una forma análoga se define el logaritmo de los números reales utilizando siempre la noción de cortadura, con ella se aborda el estudio del cálculo de límites de una sucesión introduciendo una nueva operación llamada paso al límite, que haremos más adelante, así como también el estudio de los logaritmos indefinidos o series. Un estudio muy interesante es el de la Aritmética decimal de los números reales en el que se aborda el cálculo de errores y operaciones con números aproximados, que efectuaremos al estudiar las diferencias finitas.

12.7.- BIBLIOGRAFIA

- 1.- J. REY PASTOR: Elementos de Análisis Algebraico. Madrid - 1930.
- 2.- DUILLO GIGLI: Aritmética General
Enciclopedia delle Matematiche Elementari - Vol. I -
parte 1 - Ed. U. Hoepli - Milán - 1930.
- 3.- FRANCISCO VERA: Nociones de Aritmética Moderna. Ed. Instituto Gráfico - Bogotá - 1943.
- 4.- MICHELE CIPOLLA: La Matematica Elementare nei suoi Fondamenti. Ed. L. Macri - Firenze.
- 5.- FRANCESCO SEVERI: Lecciones de Análisis. Tomo I^o Ed. Labor - Buenos Aires - 1951.

13.- NUMEROS COMPLEJOS

13.1.- ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALITICA

13.1.1.- Reseña histórica

La matemática moderna se originó con cinco progresos principales que tuvieron lugar en el siglo XVII a saber: la geometría analítica de Fermat (1629), Descartes (1637); el cálculo diferencial e integral de Newton (1666-1684) y Leibnitz (1673-1675); el análisis combinatorio en (1654), y en particular la teoría matemática de las probabilidades debida a Fermat y Pascal; la aritmética superior alrededor de 1630 a 1665, debida a Fermat; la dinámica de Galileo (1591-1612) y de Newton con la gravitación universal de Newton.

Junto con estas cinco podemos agregar dos nuevas direcciones por la influencia posterior en el campo de la matemática: la geometría proyectiva sintética de Desargues y Pascal, entre 1636 y 1639 y el comienzo de la lógica simbólica con Leibnitz, entre 1665 y 1690.

Debe buscarse el origen de la geometría analítica en la antigüedad griega. Sus primeros vestigios se los halla ya en los egipcios, pero más nítidos en el astrónomo griego HIPARCO, de la segunda mitad del siglo II antes de J.C. En el estudio de la posición de los planetas, Hiparco utilizó las coordenadas: longitud y latitud, especialmente. Pueden considerarse como antecesores de Descartes y Fermat, en su creación de la geometría analítica, al geómetra griego APOLONIO (260 a 200 a.J.C.)

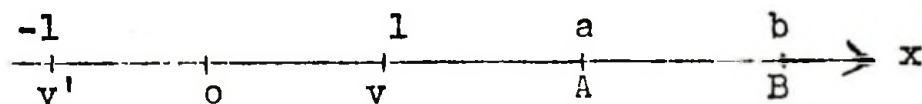
con su excelente estudio de las secciones cónicas; a NICOLE ORESME (siglo XIV) y J. KEPLER (1571-1630) en el estudio de los movimientos planetarios.

La gloria de haber erigido a la Geometría Analítica como una rama de la Matemática, en un cuerpo de doctrina lógico y completo, se debe al genio de RENATO DESCARTES (1596-1650) matemático y filósofo francés que en su obra "Discurso del método para guiar bien la razón y buscar la verdad en las ciencias" en su tercero y último apéndice, titulado "La Geometría" contiene su revolucionaria invención.

Pedro Fermat (1601-1665) jurisconsulto francés y aficionado a la matemática, precedió a Descartes en su invención, pues creó una geometría analítica más completa y sistemática, pero sus trabajos que los comenzó en 1629, no los comunicó hasta 1636 y recién fueron publicados en 1679 después de su muerte.

13.1.2.- Objeto y método en el sistema cartesiano de referencia

a) Abscisas sobre una recta

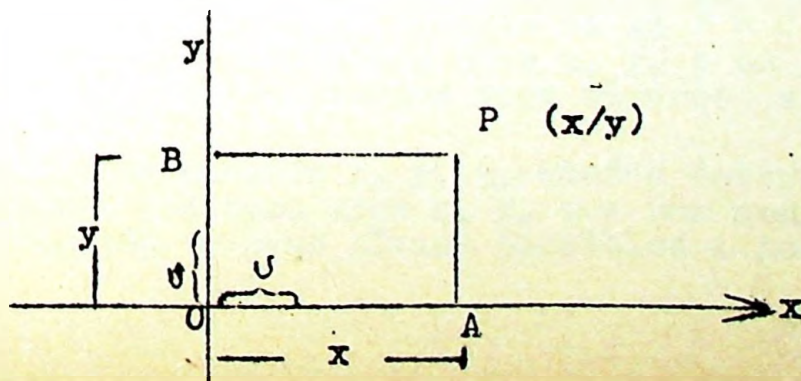


Dada una recta x , llamada eje, un punto O sobre ella, llamado origen; un segmento $OU = 1$ llamado unidad y se fija uno de los dos sentidos con que un móvil pueda recorrerla, llamado sentido positivo; se ha constituido un sistema de abscisas sobre la recta x .

Un punto cualquiera de dicha recta, tal como A queda fijado en su posición por un número a (entero, fraccionario, o irracional) llamado su abscisa que no es más que la medida del segmento OA con respecto a la unidad OU fijada. Viceversa, dado un número real a abscisa de un punto, éste queda determinado en forma única, llevando la unidad a partir de O , en el sentido dado por el signo de a , tantas veces como lo indica el valor del número. Se ha establecido una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales que nos permite traducir en relaciones algebraicas las relaciones y propiedades de los puntos sobre la recta.

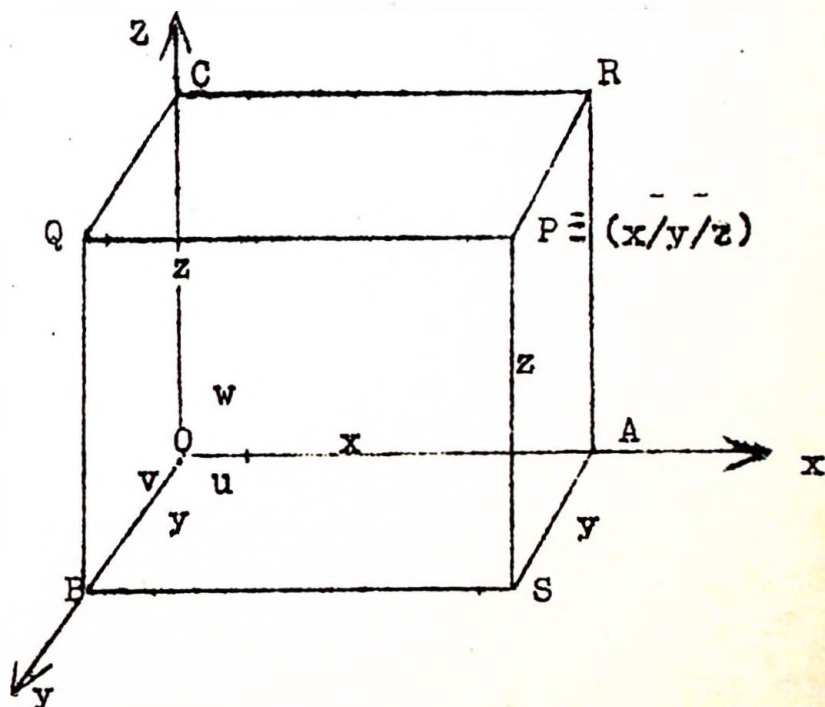
El origen O tiene por abscisa cero; dos puntos simétricos con respecto a O poseen abscisas iguales y opuestas; si un punto se mueve sobre la recta alejándose indefinidamente de O , la abscisa aumenta en valor absoluto y tiende a $+\infty$ ó $-\infty$, según sea el sentido que tiene el movimiento.

b) Coordenadas cartesianas en el plano



Dados dos ejes perpendiculares $o x$ y $o y$ en el plano, se fija sobre cada uno de ellos un sistema de abscisas, de origen común O , de sentidos positivos hacia la derecha y hacia arriba, y de unidades u y v respectivamente; se ha construido así un sistema cartesiano ortogonal (ejes perpendiculares) formado por dos ejes de abscisas, que para distinguirlos se designan: eje de las abscisas, al horizontal y eje de las ordenadas, al vertical. Fijado un punto P en el plano, su posición queda determinada por las distancias $P B$ y $P A$ a los ejes, que medidas sobre ellos, con las unidades u y v nos proporcionan dos números x e y llamados abscisa y ordenada del punto P . Viceversa, dados números reales x e y , y tomados: el primero como abscisa y el segundo como ordenada, nos permiten determinar dos segmentos sobre los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente: $O A$ y $O B$, por cuyos extremos levantamos las perpendiculares a los ejes y en su intersección hallamos el punto P que tiene esos dos números dados como abscisa y ordenada. El par de números dados se denomina coordenadas del punto P . Se ha establecido, de esta manera, una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y el campo de los números reales, de modo tal, que a cada punto del plano le corresponde un único par de números reales, y a cada par de números reales, le corresponde de un modo único, un punto en el plano.

c) Coordenadas cartesianas en el espacio



Se traza por un punto O , llamado origen, tres rectas x , y y z perpendiculares que no estén en un mismo plano, y que llamaremos ejes coordenados, respectivamente eje x , eje y , eje z , y sobre cada eje se fija un sistema de abscisas, de origen O y unidades u , v , w . Los planos que tales ejes determinan dos a dos, serán los planos coordenados xy , xz , yz . Dado un punto cualquiera P del espacio, se trazan tres planos: $P R A S$ paralelo al yz , $P Q B S$ paralelo al xz , $P R C Q$ paralelo al xy , que cortarán respectivamente a los ejes x , y , z en los puntos A , B y C , de modo que quedan individualizados tres números: $x = \text{med } O A$; $y = \text{med } O B$; $z = \text{med } O C$.

Viceversa, dados tres números x , y , z , quedan determinados los tres puntos A , B y C sobre los tres ejes x , y , z y por consecuencia, el punto P como intersección de tres planos paralelos a los planos coordenados.

Los tres Números reales x, y, z , se llaman coordenadas del punto P , respectivamente, primera coordenada o x ; segunda coordenada o y y tercera coordenada o z , escribiéndose $P \equiv (x/y/z)$. Los tres planos paralelos a los coordenados que pasan por P , determinan con los planos coordenados un paralelepípedo, uno de cuyos vértices es P y el opuesto es O , de modo que, la poligonal formada por las aristas OA , AS , y SP nos dan directamente las coordenadas de P .— Los vértices del paralelepípedo tendrán las siguientes coordenadas:

$$O \equiv (0/0/0) ; A \equiv (x/0/0) ; B \equiv (0/y/0) ; C \equiv (0/0/z)$$

$$P \equiv (x/y/z) ; Q \equiv (0/y/z) ; R \equiv (x/0/z) ; S \equiv (x/y/0)$$

En general, cada punto de un plano coordenado tiene la otra coordenada nula. Así los puntos del plano x y tienen $z = 0$; los del plano x z tienen $y = 0$; los del plano y z, tienen $x = 0$.

Cualquier punto perteneciente a un eje coordenado, tiene las otras dos coordenadas nulas; en efecto, el punto B , perteneciente al eje y , tiene $x = 0$ y $z = 0$.

De este modo, se ha establecido una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las ternas de números reales, de modo tal, que a cada punto le corresponde una única terna de números y a cada terna, un único punto en el espacio.

13.1.3.- Definición y objeto de la Geometría Analítica

Dada una figura, en el plano o en el espacio, la Geometría Métrica y más generalmente, la Geometría Proyectiva estudia, con recursos exclusivamente geométricos, las relaciones y propiedades entre sus puntos, rectas, etc. Con la Geometría Analítica, mediante un sistema de coordenadas cartesianas, se traducen las propiedades geométricas en relaciones algebraicas entre las coordenadas de sus puntos; ahora, con los recursos del Algebra se opera sobre esas relaciones algebraicas o ecuaciones y los resultados obtenidos se interpretan geoméricamente.

El Algebra ha servido para solucionar el problema geométrico planteado por la Geometría Proyectiva y la Geometría Analítica ha servido como puente de enlace de esas dos disciplinas.

La Geometría Analítica no es una ciencia, sino un conjunto de métodos y no un conjunto de propiedades, que permite estudiar por vía Analítica o Algebraica las propiedades Geométricas que son objeto de la Geometría Proyectiva. Una misma cuestión geométrica puede ser tratada de dos maneras distintas: por vía sintética con recursos exclusivamente geométricos; este es el objeto de la Geometría Proyectiva Sintética o Moderna; y por vía Analítica con recursos del Algebra; este es el objeto de la Geometría Analítica.

13.2.- NUMEROS COMPLEJOS

13.2.1.- NOTA HISTORICA.-

El precursor de la teoría del número complejo es RAFAEL BOMBELLI (italiano, entre 1530 y 1579) que en su ALGEBRA publicada en Bolonia, en 1572, maneja tales números aún cuando no los define.

Este estudio recibe nuevos impulsos con los aportes de GEROLAMO CARDANO (italiano, 1501-1576) y con NICCOLÒ TARTAGLIA (italiano, 1499? - 1557) al resolver la ecuación cúbica, pero estas nuevas nociones no llamaron la atención de los matemáticos hacia estos números, ni aún cuando FRANCOIS VIETE (francés, 1540-1603) resolvió geométricamente dicha ecuación, cuando realmente estaba operando con los llamados números imaginarios de DESCARTES. Hasta los trabajos de ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) que establece la fórmula que lleva su nombre y posteriormente MICHEL ROLLE (francés, 1652-1719) que en su Traité d'Algebre, París, 1690, da el teorema relativo al número de valores de la raíz enésima de un número complejo, no despiertan interés estos estudios. Fué necesario el aporte de LEONHARD EULER (1707-1783, alemán) para que el número complejo fuese objeto de estudios serios. Se debe a Euler la sustitución del símbolo $\sqrt{-1}$ de la unidad imaginaria por el i que se ha generalizado hoy.

KARL FRIEDRICH GAUSS. (1777-1855), en su tesis de Doctorado en la Universidad de Helmstedt, en 1799 fué el que estableció claramente el concepto de número complejo y dos años más tarde GASPAR WESSEL (noruega, 1745-1818) encontró la representación gráfica, pero no se tuvo conocimiento de ello hasta 1799 que fué publicada en las Memorias de la Real Academia de Dinamarca lo cual fué motivo para que su obra permaneciese desconocida hasta el siglo XIX.

Con más suerte JEAN ROBERT ARGAND (suizo, 1768-1822) publica en los Annales de Mathématiques una representación geométrica de los números imaginarios y es recién en 1831 cuando Gauss la menciona se le reconoce su creación.

Para la introducción de los números complejos se siguen dos métodos: uno analítico establecido por WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) y HERMANN HANKEL (1849-1873), y otro sintético, utilizando la teoría de la equipolencia del matemático italiano GIUSTO BELLAVITIS (1803-1880); este último método se conoce también como método Geométrico o rectorial.

13.2.2.- Necesidad de una nueva ampliación en el campo numérico.

La radicación y la logaritmación fueron las dos operaciones inversas de la potenciación que obligaron a ampliar el campo numérico y crear los números irracionales para hacerlas posibles; aún han quedado todavía algunos casos que no han podido hallar solución, tales son los siguientes:

$$\sqrt[2n]{(-a)}$$

raíz de índice par de los números negativos;

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$$

potencias de base racional y exponente irracional;

$$\log_2(-23)$$

logaritmos de los números negativos.

En la ecuación de segundo grado cuando el discriminante

$$b^2 - 4ac < 0$$

Sea por ejemplo, la ecuación :

$$(x - 4)^2 + 9 = 0$$

$$\therefore x = 4 \pm \sqrt{-9}$$

$$x = 4 \pm 3\sqrt{-1}$$

no existe ningún número real que la satisfaga.

Los entes numéricos que nos han de permitir resolver estos problemas son los números complejos ordinarios.

13.2.3.- Definición del Número Complejo,

a) Definición I: Se llama número complejo a un ente abstracto representado por un par de números reales cualesquiera, dados en un orden prefijado.

Estos dos números cualesquiera se llaman primero y segundo componente. Designemos con a y b a estos componentes y con α al número complejo; lo representaremos así:

$$\alpha = (a, b)$$

M.m.
Conferencia 26a
8/11/55

b) Definición II: Dos números complejos:

$$\alpha = (a, b) \quad \text{y} \quad \alpha' = (a', b')$$

son iguales, cuando

$$a = a' \quad ; \quad b = b'$$

Es de notar que el orden de los componentes, pues dos números tales como:

$$\alpha = \left(-\frac{3}{5}, 6\right) \quad \text{y} \quad \beta = \left(6, -\frac{3}{5}\right)$$

son complejos distintos, aún cuando tienen los mismos componentes.-

c) Definición II: Convenimos que el complejo

$$\alpha = (a, 0)$$

representa al número real a.-

El número cero tiene la representación compleja siguiente:

$$0 = (0, 0)$$

La condición necesaria y suficiente para que el complejo
La condición necesaria y suficiente para que el complejo

$$\alpha = (a, b)$$

se anule, es que $a = 0$ y $b = 0$

Los números complejos no reales se llaman imaginarios; el más sencillo de los imaginarios es el $(0, 1)$ llamado unidad imaginaria, que Euler designó con la letra i en 1777, en su obra Institutiones calculi integralis, Petrópoli, (1768 - 1770) (1792 - 1794) - en su segunda edición, y fue C.F. Gauss, en Disquisitiones arithmeticae 1804 el primero que hace un uso constante de este símbolo. Los números reales y los números imaginarios constituyen el campo de los números complejos, denominación que fue introducida por C.F. Gauss.

De esta manera, el dominio de la Aritmética ha quedado ampliado de la siguiente manera:

Nos Naturales	{ Nos enteros	{ Nos racionales	{ Nos reales	{ Nos imaginarios	{ Nos complejos
Nos negativos					

13.2.4.- Representación Geométrica

El número complejo $1 = (1, 0)$ coincide con la unidad real, - representada por el punto A del eje de abscisas, y el número $i = (0, 1)$ será la unidad imaginaria que convini mos representar por el punto B del eje de ordenadas. Dado un punto $P \equiv (a/b)$ del plano, obtendremos sobre - el eje de las x el punto $A' \equiv (a/0)$ y sobre el eje y al punto $B' \equiv (0/b)$. Viceversa, el par (a/b) determina - unívocamente a un único punto P del plano.

Como $(0, b) = b(0, 1) = bi$

no hay inconveniente asignar al punto P del plano el número comple-
jo

$$\alpha = (a, b)$$

cuyos dos componentes son las coordenadas del punto; diremos que - ese número tiene por parte real a la abscisa del punto y por parte imaginaria a la ordenada,

13.2.5.- Coordenadas Polares

Dado un punto $P \equiv (x/y)$ del plano, su posición ha quedado determinada sin ninguna ambigüedad por el par - de números reales x e y que son sus coordenadas cartesianas. También quedará determinado por la - distancia $\rho = OP$ que se llama radio - vector y el ángulo $\varphi = \angle xOP$ llamado argumento o anomalía del punto. Es-
tos dos números pueden tomarse como coordenadas del punto P referido al sistema que tiene por elementos al punto fijo O, llamado polo y al eje X, llamado eje polar. Se ha definido así a un sistema polar de coordenadas, y los números (ρ/φ) son las coordenadas polares de P.-

Si juntamente con el sistema polar así definido se consi-
dera el sistema cartesiano que tiene por eje X al eje polar, y por eje de ordenadas, la perpendicular al eje polar por el polo, se tie-
ne un sistema cartesiano, en el que suponemos sean x e y las coor-
denadas cartesianas de P.-

En la figura anterior se han colocado los dos sistemas de

Referencia, y de ella obtenemos:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} \quad \text{sen } \varphi = \frac{y}{\rho}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

que son las fórmulas de transformación del sistema cartesiano al polar.- Además, también se obtiene:

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{x} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{tg } \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Son las fórmulas de transformación del sistema polar al cartesiano.-

13.3.- OPERACIONES RACIONALES

13.3.1: Principio de Hankel

Las operaciones que se definan para los números complejos deben cumplir con las exigencias impuestas a toda ampliación del campo de los números, dadas por el principio de permanencia de las leyes formales o principio de Hankel, que para nuestro caso son:

1) Cuando los datos sean reales, sus resultados deben coincidir con los del campo real.

2) Las operaciones que se definan han de cumplir las mismas leyes formales que las operaciones con números reales.-

13.3.2.- Operaciones

1) SUMA: Se llama suma de los números complejos

$$\alpha = (a, b) \text{ y } \alpha' = (a', b')$$

a otro número complejo

$$\sigma = (a + a', b + b')$$

que tiene por componentes a la suma de los componentes de los complejos dados

$$\sigma = \alpha + \alpha' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

Ejemplo:

$$\left(-3, \frac{1}{2}\right) + (5, -2) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$$

2) RESTA: Análogamente a lo efectuado en los campos numéricos anteriores, dados dos complejos

$$\alpha = (a, b) \quad \text{y} \quad \alpha' = (a', b')$$

llamamos resta de ambos, al complejo

$$\delta = \alpha - \alpha' = (a - a', b - b')$$

Ejemplo:

$$\left(-3, -\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}, -3\right) = \left(-\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

3) MÚLTIPLO: Dado un número complejo $\alpha = (a, b)$, se llama múltiplo al complejo $(a\lambda, b\lambda) = \lambda(a, b) = \lambda\alpha$ siendo λ un número real cualquiera.-

13.3.3.- FORMA BINOMICA O CARTESIANA

De acuerdo con la definición de suma, todo complejo, puede considerarse como formado por un número real y uno imaginario puro, pues:

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + b(0, 1) = a + bi$$

$$\alpha = a + bi$$

es la forma binómica del número complejo (a, b) , que es la notación más usada.

Para esta forma, las reglas de la suma y de la resta se aplican más fácilmente. En efecto, bastará agrupar separadamente las partes reales y las imaginarias puras.-

Ejemplo:

$$(3 + 2i) - \left(-\frac{1}{2} + 6i\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$

$$= \left(3 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) + \left(2 - 6 + \frac{1}{2}\right)i = 6 - \frac{7}{2}i$$

13.3.4.- FORMA FACTORIAL O POLAR:

Dado el número complejo

$$\alpha = a + bi = (a, b)$$

se le puede asignar un único punto $P \equiv (a/b)$ del plano que tenga a por coordenadas a esas componentes. Considerando el sistema cartesiano y polar del 13.2.5 podremos sustituir a:

$$\begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

y en consecuencia, el complejo α adopta la forma siguiente:

$$\alpha = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi$$

$$\boxed{\alpha = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

que es la expresión factorial o trigonométrica del complejo α . - Se designa a ρ como módulo del complejo y a φ su argumento. -

13.3.5.- MULTIPLICACION

Definiremos el producto de dos números complejos $\alpha = a + bi$ y $\beta = c + di$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (a + bi)(c + di) = ac + a(di) + (bi)c + (bi)(di) = \\ &= c + a d \cdot i + bc \cdot i + bd \cdot i^2 \end{aligned}$$

Es necesario definir el producto de i por i

Definición: Convendremos que

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

Con esta convención resulta:

$$\alpha \cdot \beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) i$$

Ejemplo:

$$\left(4 - \frac{2}{3} i \right) \left(2 + 5i \right) = \left(8 - \frac{10}{3} \right) + \left(20 - \frac{4}{3} \right) i = \frac{14}{3} + \frac{56}{3} i$$

Si los complejos vienen dados en forma trigonométrica y son:

$$\alpha = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\beta = \rho'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$

es:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \rho'(\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \\ &= \rho \cdot \rho' \left[(\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi') + (\sin \varphi \cos \varphi' + \right. \\ &\quad \left. + \cos \varphi \sin \varphi') i \right] = \\ &= \rho \cdot \rho' \left[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi') \right] \end{aligned}$$

y designando abreviadamente cada complejo de la siguiente manera:

$$\alpha = \rho \varphi \quad \beta = \rho' \varphi'$$

es

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = \rho \varphi \cdot \rho' \varphi' = \rho \rho' \varphi + \varphi'}$$

el módulo del producto es el producto de los módulos y el argumento es la suma de los argumentos.

Ejemplo:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} ; \quad \beta = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rho = \rho' = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} ; \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{b'}{a'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \varphi = 30^\circ \quad \varphi' = 60^\circ$$

luego

$$\alpha = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$$

$$\beta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \\ &= 1_{30^\circ + 60^\circ} = \cos (30^\circ + 60^\circ) + i \sin (30^\circ + 60^\circ) = \\ &= \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = 0 + i = \underline{1}\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha \cdot \beta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \underline{1}$$

o bien

$$\alpha \cdot \beta = 1_{30^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 1$$

13.3.6.- DIVISION

Dados dos complejos α y β , su cociente es otro complejo γ tal que multiplicado por β nos de el complejo α . El número β debe ser distinto de cero para que la operación tenga sentido.

En símbolos:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma \quad \text{si} \quad \gamma \beta = \alpha$$

Multiplicando esta última expresión por el complejo $\delta \neq 0$ resulta

$$\gamma \beta \delta = \alpha \delta$$

siendo $\delta \neq 0$ podrá escribirse:

$$\boxed{\frac{\alpha \delta}{\beta \delta} = \gamma} \quad (1)$$

el cociente de dos números complejos no varía multiplicando ambos por un mismo número distinto de cero.

Definición: Dos números complejos que tienen el mismo primer componente y opuestos los segundos, se llaman conjugados. Ejemplo

$$\alpha = a + bi \quad \text{y} \quad \beta = a - bi$$

son conjugados

$$\alpha = \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{2}i \right) \quad \text{y} \quad \beta = \left(-\frac{1}{2} + i\sqrt{2} \right) \quad \text{son conjugados}$$

Esta definición y la propiedad (1) nos permiten calcular fácilmente el cociente de dos números complejos. En efecto:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2-(di)^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{ad+bc}{c^2+d^2} i$$

Ejemplo:

$$\frac{3-2i}{1-2i} = \frac{(3-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(3+4)+(6-2)i}{1-(2i)^2} = \frac{7+4i}{1+2} = \frac{7}{3} + \frac{4}{3} i$$

observemos que el cociente de 2 complejos se reduce al producto del primero por el conjugado del segundo, dividido por una constante obtenida por el producto del divisor y su conjugado; si los complejos vienen dados en forma trigonométrica y son:

$$\alpha = \rho \varphi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\beta = \rho' \varphi' = \rho' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$

$$\therefore \beta' = \rho' (-\varphi') = \rho' (\cos \varphi' - i \sin \varphi')$$

será el conjugado de β , y es:

$$\beta \cdot \beta' = \rho \cdot \rho' (\varphi' - \varphi) = \rho'^2$$

luego

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\rho \varphi}{\rho' \varphi'} = \frac{\rho \varphi \cdot \rho' (-\varphi')}{\beta \cdot \beta'} = \frac{1}{\rho'^2} \cdot \rho \cdot \rho' (\varphi - \varphi')$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\rho}{\rho'} \right) \varphi - \varphi'$$

es decir:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\rho}{\rho'} [\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')]}$$

que abreviadamente escribiremos:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\rho \cdot \frac{1}{\rho'} \right) \varphi - \varphi'$$

el módulo del cociente es el cociente de los módulos y el argumento es la diferencia de los argumentos.

Ejemplo Si $\alpha = 1_{60^\circ}$ y $\beta = 1_{30^\circ}$

es
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1_{60^\circ}}{1_{30^\circ}} = 1_{60^\circ - 30^\circ} = 1_{30^\circ}$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$$

13.4.- POTENCIAS Y RAICES

13.4.1.- Potencias de la unidad imaginaria.

$$i^0 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^1 = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

se observa que los valores

$$1 ; -1 ; -i ; i$$

se repiten y forman un ciclo a partir de la cuarta potencia, de modo que podremos escribir que:

$$i^{4n-3} = i$$

$$i^{4n-1} = -i$$

$$i^{4n-2} = -1$$

$$i^{4n} = 1$$

con lo cual es fácil calcular cualquier potencia de i ; en efecto, hallar el valor de

$$i^{725} = ?$$

Como

$$725 = 4 \cdot 181 + 1$$

$$725 = 4 + 1$$

$$(4 = \text{múltiplo de } 4)$$

Será :

$$i^{725} = i^{4+1} = i^4 \cdot i^1 = i^{4n} \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$$

$$\therefore \quad \underline{i^{725} = i}$$

13.4.2.- POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO - FORMULA DE MOIVRE

Extiende la fórmula del producto a n factores, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \dots \alpha_n = \left[\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \right] \left[\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \right] \cdot \\ &\cdot \left[\rho_3 (\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3) \right] \dots \left[\rho_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) \right] = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \dots \rho_n \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n) \right] \end{aligned}$$

Si suponemos que:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_n = \rho \\ \varphi_1 &= \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_n = \varphi \end{aligned}$$

Será:

$$\Pi = \left[\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \right]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

fórmula que permite calcular trigonométricamente las potencias de ex-
ponente natural de los números complejos, y se la conoce como fórmula
de MOIVRE (Abraham de, 1667-1754, francés).

Para exponente negativo:

$$n = -n'$$

es

$$\left[\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \right]^n = \frac{1}{\left[\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \right]^{n'}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^{n'} (\cos n' \varphi + i \operatorname{sen} n' \varphi)} = \frac{\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ}{\rho^{n'} (\cos n' \varphi + i \operatorname{sen} n' \varphi)} =$$

$$= \frac{1}{\rho^{n'}} \left[\cos(0^\circ - n' \varphi) + i \operatorname{sen}(0^\circ - n' \varphi) \right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^{-n'}} \left[\cos(-n' \varphi) + i \operatorname{sen}(-n' \varphi) \right] =$$

$$= \rho^n (\cos n' \varphi - i \operatorname{sen} n' \varphi) =$$

$$= \boxed{\rho^n (\cos n \varphi + i \operatorname{sen} n \varphi)}$$

pues

$$\cos n \varphi = \cos n' \varphi$$

$$\operatorname{sen} n \varphi = - \operatorname{sen} n' \varphi$$

la fórmula de Moivre también es aplicable.

Si el número complejo viene dado en forma binómica $(a+bi)$
 basta aplicar la fórmula de Newton ya hallada anteriormente.

Ejemplo:

$$(2-3i)^4 = 2^4 - 4 \cdot 2^3 \cdot 3i + 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot i^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot i^3 + 3^4 \cdot i^4 = \underline{-119 + 120i}$$

Si el exponente es elevado es conveniente pasar a la forma factorial y aplicar luego la fórmula de Moivre.

Ejemplo:

$$(2-3i)^{10}$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{2} \quad \therefore \quad \varphi = -56^\circ 18' 30''$$

$$\begin{aligned} (2-3i)^{10} &= \left[\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \right]^{10} = \left\{ \sqrt{13} \left[\cos(-56^\circ 18' 30'') + \right. \right. \\ &+ i \operatorname{sen}(-56^\circ 18' 30'') \left. \right] \left. \right\}^{10} = 13^5 \left[\cos(-563^\circ 25') + i \operatorname{sen}(-563^\circ 25') \right] = \\ &= 13^5 \left[\cos(720^\circ - 563^\circ 25') + i \operatorname{sen}(720^\circ - 563^\circ 25') \right] \\ &= 13^5 \left[\cos(156^\circ 55') + i \operatorname{sen}(156^\circ 55') \right] \\ \therefore \quad &\boxed{(2-3i)^{10} = 371,293 \left[\cos(156^\circ 55') + i \operatorname{sen}(156^\circ 55') \right]} \end{aligned}$$

13.4.3.- RAICES DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

a) Raíz enésima de la unidad.

Si en la fórmula de Moivre, 13.4.2, hacemos

$$\varphi = \frac{\alpha}{n} \quad \text{se obtiene :}$$

$$\left[\rho \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{n} \right) \right]^n = \rho^n (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

de donde

$$\sqrt[n]{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha} = \cos \frac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{n}$$

pero la unidad puede ser escrita en forma compleja, de cualquiera de estas n maneras:

$$1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = \cos 4\pi + i \operatorname{sen} 4\pi = \dots$$

Si se calcula la raíz enésima de cada una de estas expresiones por la fórmula anterior, obtendremos los siguientes n valores de la $\sqrt[n]{1}$:

$$\cos \frac{0}{n} + i \operatorname{sen} \frac{0}{n}$$

$$\cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

$$\cos \frac{4\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n}$$

$$\cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

y continuando se volvería a obtener esta sucesión de valores, de modo

que $\sqrt[n]{1}$, siendo n un número natural, tiene n valores distintos. Representando gráficamente esos n complejos se obtienen puntos situados sobre una circunferencia de radio unidad que son los vértices de un polígono regular de n vértices.

Ejemplo: Cálculo de la raíz cuadrada de 1.

La raíz cuadrada de 1 tiene los dos valores siguientes:

$$\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = +1$$

$$\cos \frac{2\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$$

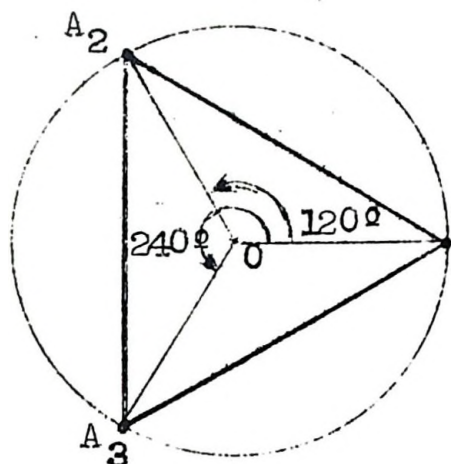
Ejemplo: Cálculo de la raíz cúbica de 1

La raíz cúbica de 1, tiene tres valores que se obtienen así:

$$\cos 0^0 + i \operatorname{sen} 0^0 = +1$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



que forma el triángulo equilátero $\triangle A_1 A_2 A_3$ de vértices:

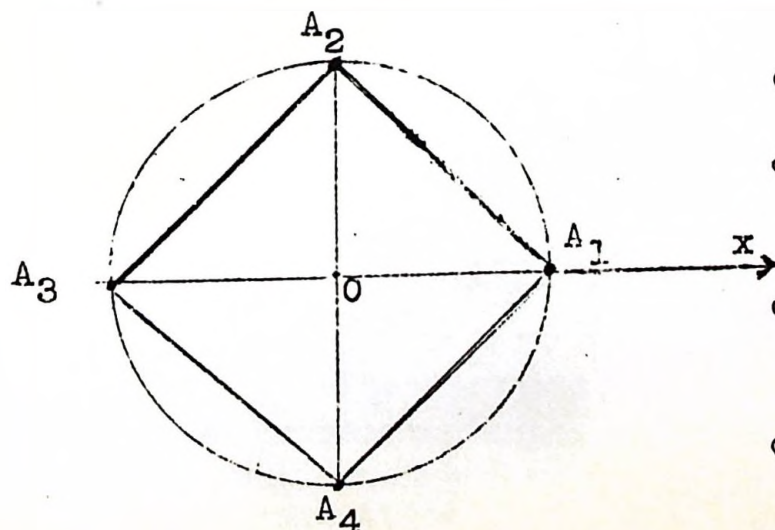
$$A_1 = (1/0)$$

$$A_2 = \left(-\frac{1}{2} / \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A_3 = \left(-\frac{1}{2} / -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ejemplo: Cálculo de la raíz cuarta de 1

La raíz cuarta de 1 tiene los siguientes cuatro valores:



$$\cos 0^0 + i \operatorname{sen} 0^0 = +1$$

$$\cos \frac{2\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{4} = +i$$

$$\cos \frac{4\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{4} = -1$$

$$\cos \frac{6\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{4} = -i$$

que son los vértices:

$$A_1 \equiv (1/0)$$

$$A_2 \equiv (0/1)$$

$$A_3 \equiv (-1/0)$$

$$A_4 \equiv (0/-1)$$

del cuadrado $\underline{A_1 A_2 A_3 A_4}$

b) Raíz enésima de un complejo

Si se desea calcular:

$$\sqrt[n]{\rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}$$

bastará tener presente que:

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi) = \cos (\alpha + 4\pi) = \dots$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen} (\alpha + 4\pi) = \dots$$

la raíz enésima tiene los siguientes n valores distintos:

$$\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{n} \right)$$

$$\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + 2\pi}{n} \right)$$

$$\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\alpha + 4\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + 4\pi}{n} \right)$$

$$\dots$$

$$\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n} \right)$$

y sus puntos correspondientes están en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$ y forman un polígono regular de n vértices, entre los cuales figura la raíz enésima aritmética de ρ .

13.4.4.- TEOREMA FINAL DE LA ARITMETICA

WEIERSTIASS demostró en 1863 que no existe ningún sistema de números complejos de más de dos unidades cuyo producto satisfaga a todas las leyes formales:

- 1) Uniforme ; 2) Asociativa ; 3) Conmutativas ; 4) Distributiva ; 5) El producto de dos factores no nulos es distinto de cero.-

Este teorema se conoce con el nombre de :Teorema final de la Aritmética, puesto que con él termina el desarrollo normal de esta ciencia, y dice así:

No existe ningún sistema de números complejos de más de dos unidades en que el producto satisfaga a todas las leyes formales de la Aritmética. Con su demostración se pone fin a una nueva ampliación del campo de los números.

13.4.5.- BIBLIOGRAFIA

- 1.- J.REY PASTOR: Elementos de Análisis Algebraico. Madrid, 1930.-
- 2.- F.SEVERI : Lecciones de Análisis. Ed.Labor, Traducción de T.Rodríguez Bachiller. Madrid. 1951.-
- 3.- MINEO CHINI: Corso Speciale di Matematiche. Ed.R.Giusti. Firenze. 1923.-
- 4.- F. VERA : Nociones de Aritmética Moderna. Ed.Inst.Gráfico. Bogotá. 1943.-
- 5.- R.G.D.ALLEN: Análisis Matemático para Economistas. Ed.Aguilar. Trad. de E. de Figueroa. Madrid. 1946.-
- 6.- M.LABOUREUR: Cours de Calcul. Ed. Ch.Beranger. Paris.1913.-
- 7.- J.DE LA C.PUIG: Complementos de Algebra. Ed.Biedma.Bs.As, 1909.-

M.m.
 Conferencia 28ª
 15/11/55

IV-CALCULO INFINITESIMAL Y GEOMETRIA ANALITICA

14.- FUNCIONES Y LIMITES

14.1.- Reseña historica

La esencia del método infinitesimal reside en la idea del paso al límite considerada como una nueva operación que se combina con las operaciones algebraicas comunes. Debe buscarse en los griegos como los primeros precursores de este método; Eudoxio (408 - 385, a. de J.C.) con su método de exhaución es el iniciador, en cuya huella continua Arquímedes (287 ? - 212, a. de J.C.) al cual se lo considera como el verdadero precursor, de los métodos infinitesimales en la antigüedad, por sus investigaciones de las cuadraturas y cubaturas. Iniciador en el estudio de las primeras series convergentes fué Nicolás Oresme (siglo XIV d. de J. C.) y más tarde, el matemático portugués Alvaro Tomás que no solo calcula series geométricas, sino que también algunas otras series numéricas convergentes que hoy se calculan con la función logarítmica.

Siguiendo las huellas de Arquímedes, el astrónomo Juan Kepler (1571 - 1630) profundiza el estudio de los infinitésimos - aplicándolos a las propiedades de las cónicas, lo mismo que más tarde hace el jesuita Buenaventura Cavalieri (1598 - 1647) discípulo de Galileo, que se ocupa del problema de las integraciones con métodos más simples que los de Arquímedes. Del estudio de las tangentes, cuadraturas y cubaturas se ocupa también Evangelista Torricelli - (1608-1647) también discípulo de Galileo, que con Vincenzo Viviani (1622 - 1703) han dejado importantes huellas en esta parte del cálculo. La polémica originada en el estudio de la cicloide fué motivo - para que eminentes matemáticos como Galileo (1564 - 1642); Robertval (1602 - 1675); Descartes (1596 - 1650); Pascal (1623 - 1662) Fermat (1601 - 1665) Huygens (1629 - 1695) y Wallis (1616-1703) incrementaran el contenido de esta rama naciente de la matemática, - que con Isaac Barrow (1630 - 1677) se cierra la lista de los precursores para dar paso a los dos grandes genios fundadores del cálculo infinitesimal: Isaac Newton (1643 - 1727), filósofo, físico y matemático inglés que comparte la gloria de esta creación con otro, filósofo y matemático alemán, Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 - 1716), Contemporáneos en su creación, sin embargo ha sido la notación de Leibnitz y la claridad de sus demostraciones las que se impusieron en Europa, y más tarde en el mundo, sobre las de Newton, - siendo ésta la que hoy se emplea en todos los tratados. Continuadores de la obra de estos dos genios, fueron Juan y Jacobo Bernouilli - (1654 a 1748), con admirables contribuciones al Cálculo de Probabilidades, el marqués de l'Hopital (1661 - 1704); Abraham De Moivre (1667 - 1754) que como los anteriores se ocupó de la Combinatoria y las probabilidades; Brook Taylor (1685 - 1731) físico y matemático inglés y Colin Maclaurin (1698 - 1746) autores de las series que llevan sus nombres.- Se debe especialmente a Leonhar Euler (-

(1707 - 1783) la sistematización de esta rama, llenando un período destacado de su desarrollo, el siglo XVIII, que fué el siglo de Euler y su escuela. La generación siguiente, es la de la Revolución Francesa, cuyo representante máximo es José Luis Lagrange (1736 - 1813) que con Pedro Simón Laplace (1749 - 1827) astrónomo y sistematizador del cálculo de probabilidades; Adriano María Legendre (1752 - 1833) ; Silvestre Francisco Lacroix (1765 - 1843) y otras dan un extraordinario brillo a la matemática francesa y forman el siglo de Langrange en la historia del cálculo infinitesimal.

14. 2.- Constantes y Variables - Funciones -

14. 2. 1. Variables y Constantes

Una variable es una cantidad que puede adoptar diferentes valores. El conjunto de tales valores puede estar limitado a determinadas restricciones, y variar sólo entre un cierto grupo de números fijados. Así, una variable puede ser el número de naranjas de determinado tamaño que pueden ser acondicionadas en una caja dada por distintos empaquetadores. Sin lugar a dudas que el número de naranjas para cada caja no es el mismo; pueden empaquetarse 59, 60, 61, -----72 según sea la forma de disponerlas.

Una constante es una cantidad que siempre conserva el mismo valor cualquiera sea el problema dado o la discusión, por ejemplo, 2, 5, $\sqrt{7}$, etc.

14.2.2. Funciones

Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.-

Ejemplo: I) El área del círculo viene dada por la fórmula

$$y = \pi x^2$$

donde $\pi = 3,1415926$ ----- es relación de la longitud de la circunferencia a su diámetro y x es el valor del radio.

El área y del círculo se halla determinada en función del radio del mismo.-

II) Si S es el espacio que recorre un móvil, animado de un movimiento uniforme con velocidad v , durante un intervalo de tiempo t , se tiene que $S = vt$ expresa que el espacio recorrido es una función del tiempo.-

III) En un gas perfecto, a temperatura constante, la presión p y el volumen específico v están ligados por la relación siguiente:

$$p \cdot v = k$$

k = constante

llamada ley de Boyle (1626-1691), que es equivalente a ésta otra:

$$vr = \frac{k}{p}$$

que da el volumen específico del gas a temperatura constante, en función de la presión.-

14.2.3. Notación

La función y de x se indica con los símbolos

$$y = f(x); y = \varphi(x); y = \psi(x); \text{etc.}$$

Se llama función uniforme o de un sólo valor, cuando a un valor de la variable x , llamada independiente, le corresponde uno y sólo un valor para la y , llamada variable dependiente

Ejemplo:

$$y = \pi \cdot x^2$$

es uniforme; en cambio la $y^2 = 1 - x^2$

no es uniforme, pues, para cada valor de x en el intervalo

(- 1 / + 1), es decir

$$- 1 \leq x \leq + 1$$

se obtienen dos valores para y , ya que, despejando a la y solamente, es:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

obteniéndose para $x = x_1$, los valores:

$$y_1 = +\sqrt{1 - x_1^2} \quad y_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$$

También puede ser y variable dependiente de dos o más variables independientes que varían con arbitrariedad, indicándose esto con la notación

$$y = f(x, t); y = \varphi(x, t, u); \text{etc.}$$

14.2.4. Representación Gráfica

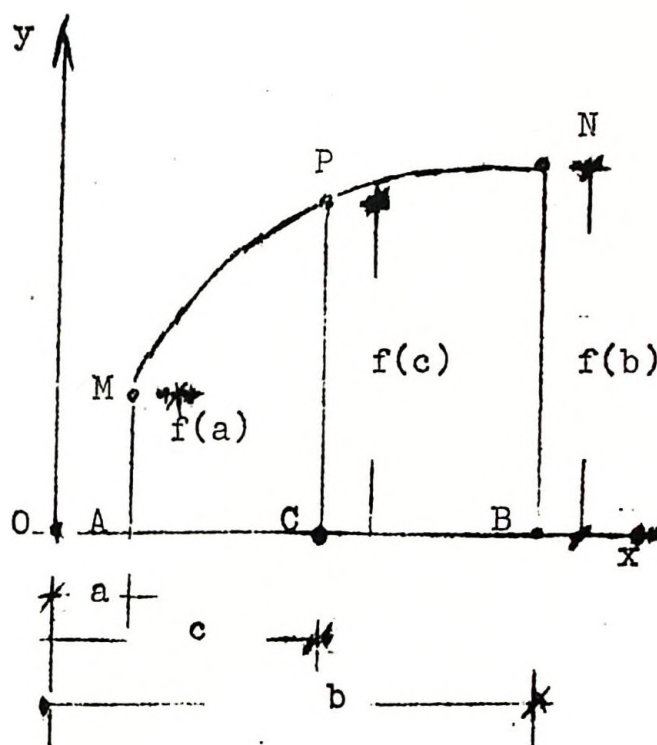
$$\text{Si } y = f(x)$$

es una función de x , para $a \leq x \leq b$

es (a / b) el intervalo o campo de variación de x . Sea C un valor de x comprendido entre a y b el valor correspondiente a y será

$$y = f(x)$$

Si sobre un sistema de dos ejes perpendiculares llevamos sobre uno de ellos, el horizontal, los valores de x comprendidos entre a y b , y sobre el vertical los que resultan para y , obtenemos un conjunto de puntos P para cada par de valores de x e y que se hallarán sobre una curva que llamaremos representación gráfica o diagrama de la función dada.



Las funciones pueden venir dadas por expresiones analíticas, como se vió antes o por expresiones empíricas como: Ejemplo I: Ley de Tait que es una fórmula empírica que da aproximadamente el número y de hijos generados en el espacio de un año por un grupo de 100 mujeres casadas, en edad fecunda, esto es, entre 16 y 50 años más o menos, de edad media x . Dicha ley viene expresada así:

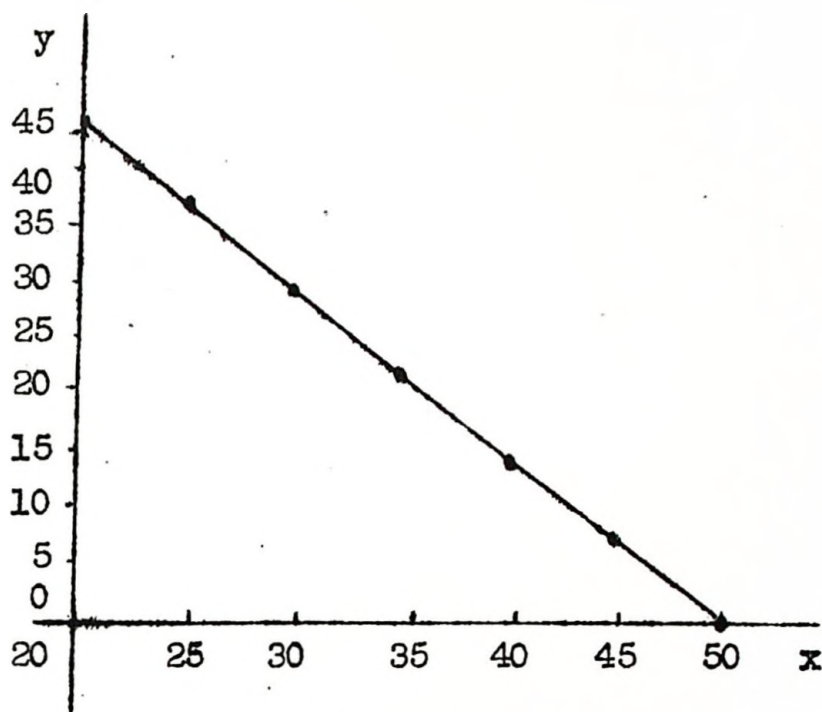
$$y = k (50 - x)$$

donde k es el coeficiente de fecundidad matrimonial de Tait, que puede tomarse aproximadamente igual a 1,50. Entre 20 y 45 años, esa fórmula da resultados bastante aceptables, expresando que la fecundidad se acerca a 0 alrededor de los 50 años.

Para $k = 1,50$ se obtiene

Para $k = 1,50$ se obtiene;

304

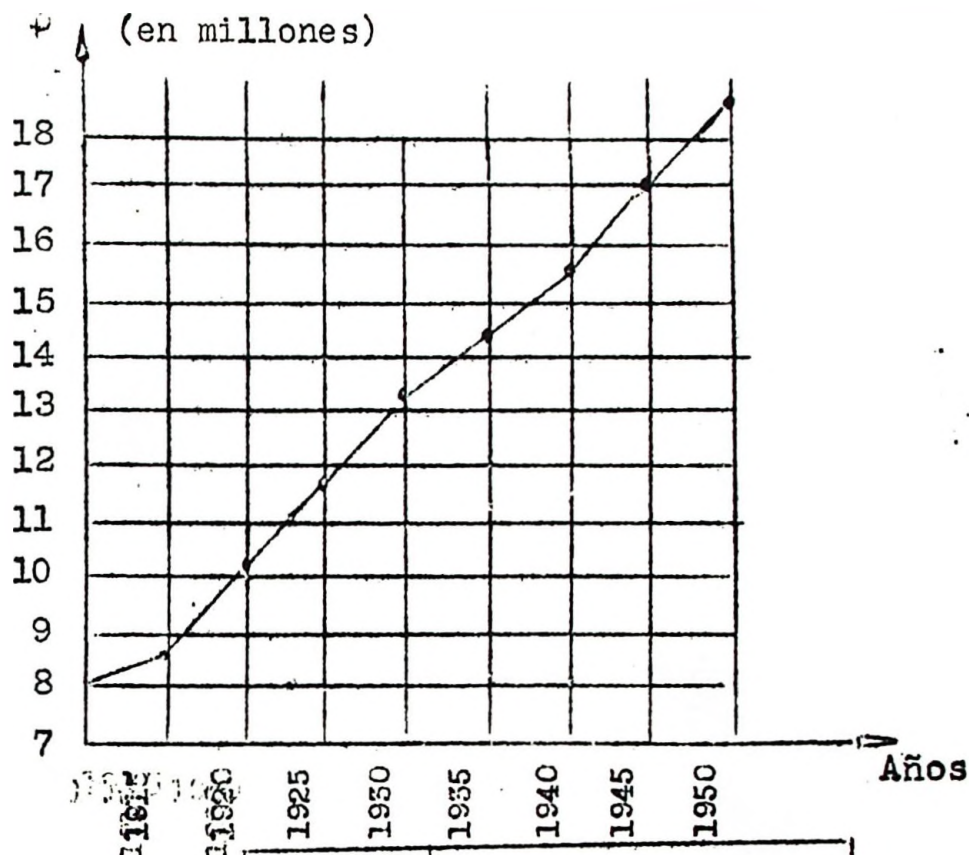


x	y
Años	Hijos
20	45
25	37,5
30	30
35	22,5
40	15
45	7,5
50	0

una recta. Este tipo de funciones, de la forma genera

$$y = ax + b \quad \text{se llaman } \underline{\text{lineales}}$$

Ejemplo II) La población P de un país varía con el tiempo t. En efecto, en la República Argentina la población ha crecido en la forma indicada en la siguiente tabla:



Se obtiene una poligonal. Este es el caso en el cuál la relación de dependencia de P con respecto al tiempo t , que en este caso es la variable independiente, no se conoce analítica ni empíricamente.-

14.3.- ESTUDIO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

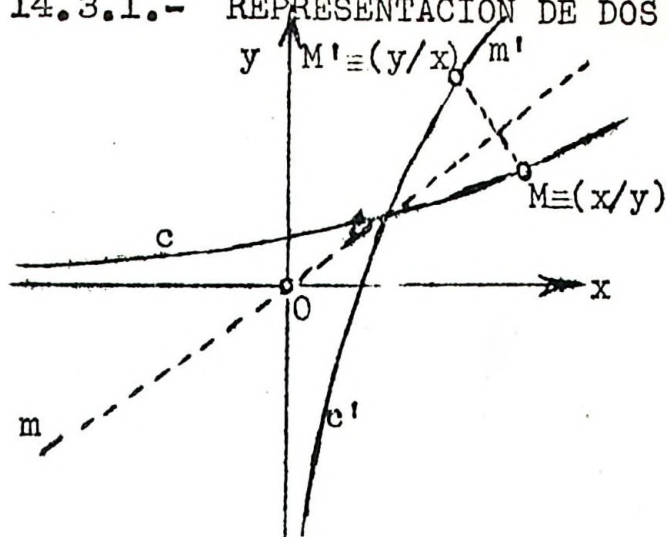
Estudiaremos ahora la representación de las funciones elementales, es decir, las funciones simples que combinadas entre ellas dan todas funciones que se hallan en el estudio del análisis.-

14.3.1.- REPRESENTACION DE DOS FUNCIONES INVERSAS

Se la función :

14.3.1.- REPRESENTACION DE DOS FUNCIONES INVERSAS:

306



Sea la función:

$$y = f(x) \quad (1)$$

Si en esta relación consideramos a y como variable y a x como función, y la resolvemos con respecto a x se tiene:

$$x = \varphi(y) \quad (2)$$

Referidas ambas funciones al mismo sistema (x, y) se obtienen dos curvas C y C' cuyas ecuaciones son:

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \varphi(y) \quad (3)$$

esta última se llama función inversa de la primera

Ejemplo I: Sea

$$y = x^m \quad \therefore x = \sqrt[m]{y}$$

luego

es

$$y = \sqrt[m]{x}$$

la función inversa

Ejemplo II: Sea

$$y = a^x$$

ateniéndonos a la definición de logaritmos es:

$$x = \log_a y$$

luego es

$$y = \log_a x \quad \text{la función inversa de} \quad y = a^x$$

Las expresiones (1) y (2) siendo las mismas ecuaciones se hallan representadas por la misma curva C ; en cambio, la (3) no es otra que la (2) donde se han invertido x e y , de donde se deduce que estará representada por una curva C' simétrica de C con respecto a la bisectriz $m-m'$ del primer cuadrante. De aquí resulta que dos puntos M y M' simétricos con respecto a $m-m'$ tienen por coordenadas a (x/y) y (y/x) .

14.3.2.- Función Algebraica

Una función es algebraica cuando ella solo contiene símbolos algebraicos (suma, resta, multiplicación, división, potencia de exponente constante, extracción de raíces). En caso contrario la función es trascendente.

Entre las funciones algebraicas, se da especialmente el nombre de función algebraica a la función

$$y = x^m$$

siendo m una constante entera.-

Entre las funciones trascendentes más comunes se tiene :

- 1) la función exponencial : $y = a^x$
donde a es una constante
- 2) la función logarítmica : $y = \log_a x$
- 3) las funciones circulares:

$$y = \sin x ; y = \cos x ; y = \operatorname{tg} x$$

Sea la función algebraica

$$y = x^m \quad (m \text{ entero})$$

es necesario distinguir cuatro casos según el signo y la paridad de m:

1er Caso: m positivo

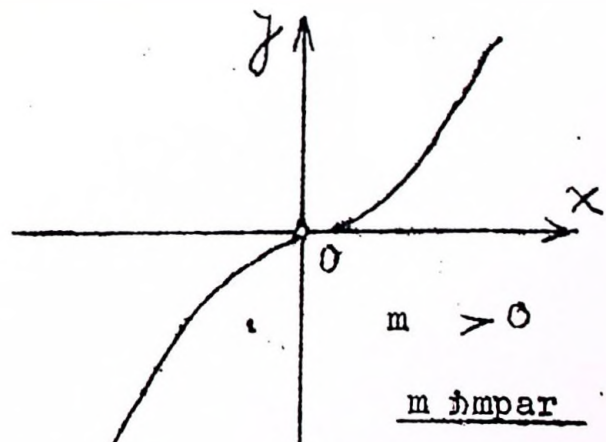
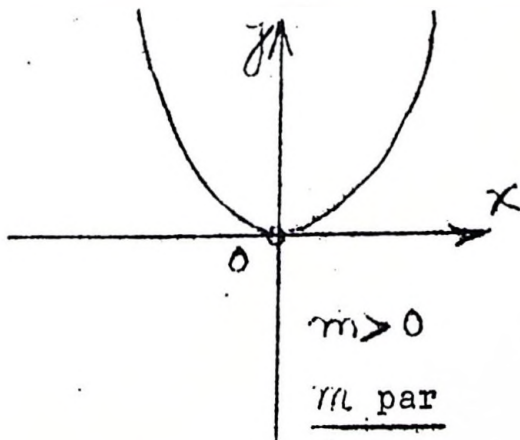
I) m par

II) m impar:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

que nos dan las dos curvas siguientes:



2º Caso: m negativo ,. $y = \frac{1}{x^m}$

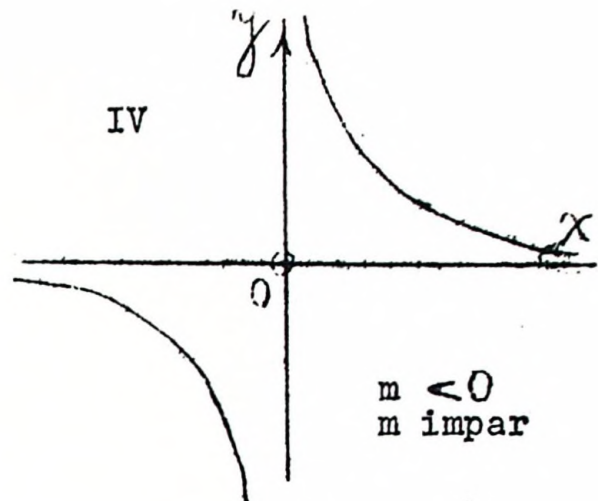
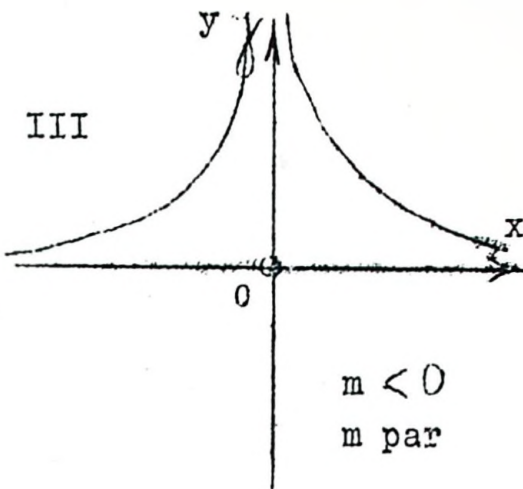
III) m par

IV) m impar

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	0	$+\infty$	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	0	$-\infty$	0

que nos dan las curvas siguientes:



14.3.3.- RADICAL

Sea la función $y = \sqrt[m]{x}$ o bien $y = x^{\frac{1}{m}}$ siendo esta función la inversa de $y = x^m$ las curvas representativas se deducirán de las de esta última, teniendo en cuenta el signo y la paridad de m , tomando las curvas simétricas, con respecto a la bisectriz $m = m'$ del primer cuadrante (14.3.1) de las curvas del (14.3.2.)

1er Caso: $m > 0$

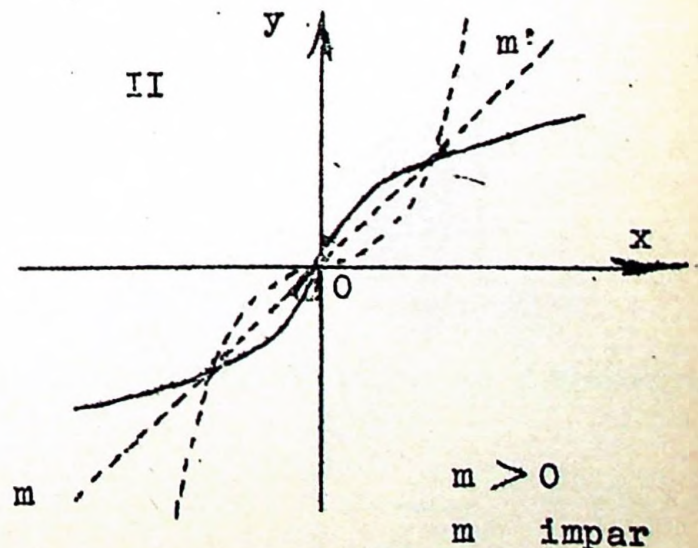
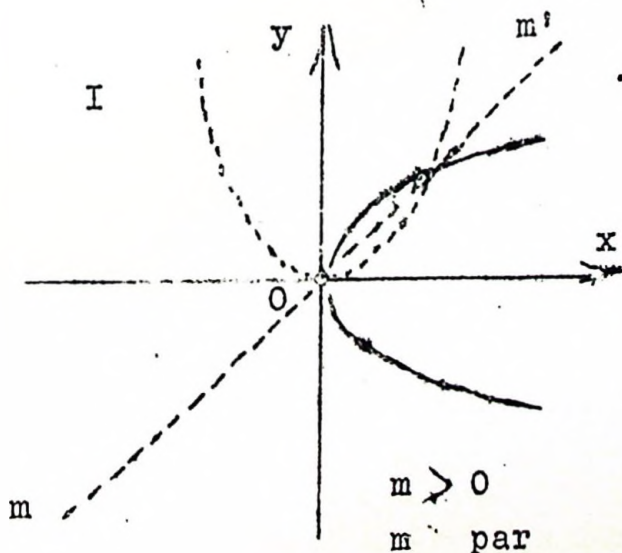
I) m par

X	$-\infty$	0	$+\infty$
y	imaginario	0	$\pm \infty$

II) m impar

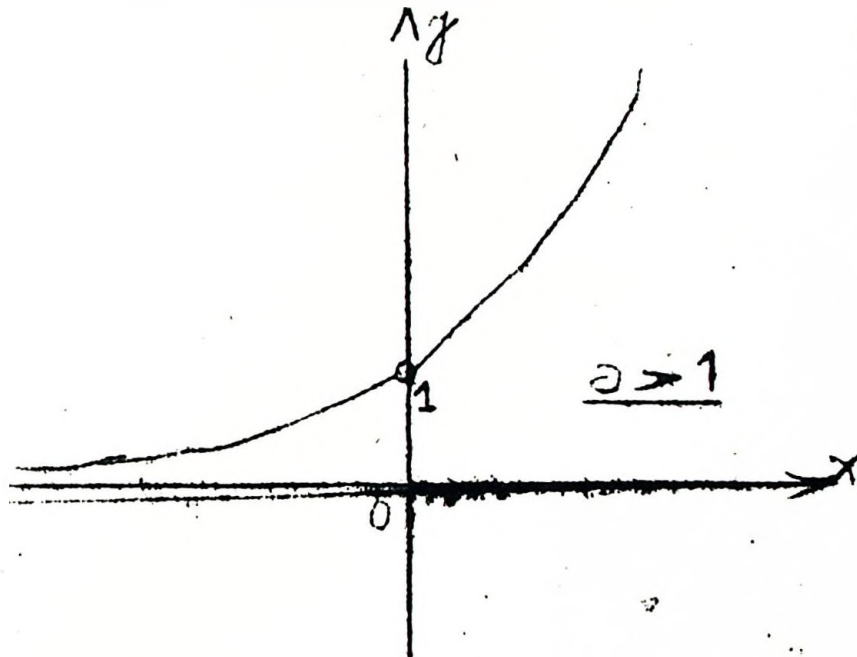
X	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

Estos valores nos dan las siguientes curvas:



x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	0	$+$	$+1$	$+$	$+\infty$

Siendo $e > 1$, la curva $y = e^x$ es de la forma que indica la figura



2º Caso: $a < 1$: En este caso, la función exponencial es constantemente decreciente.-

Como $a < 1$, podremos admitir que

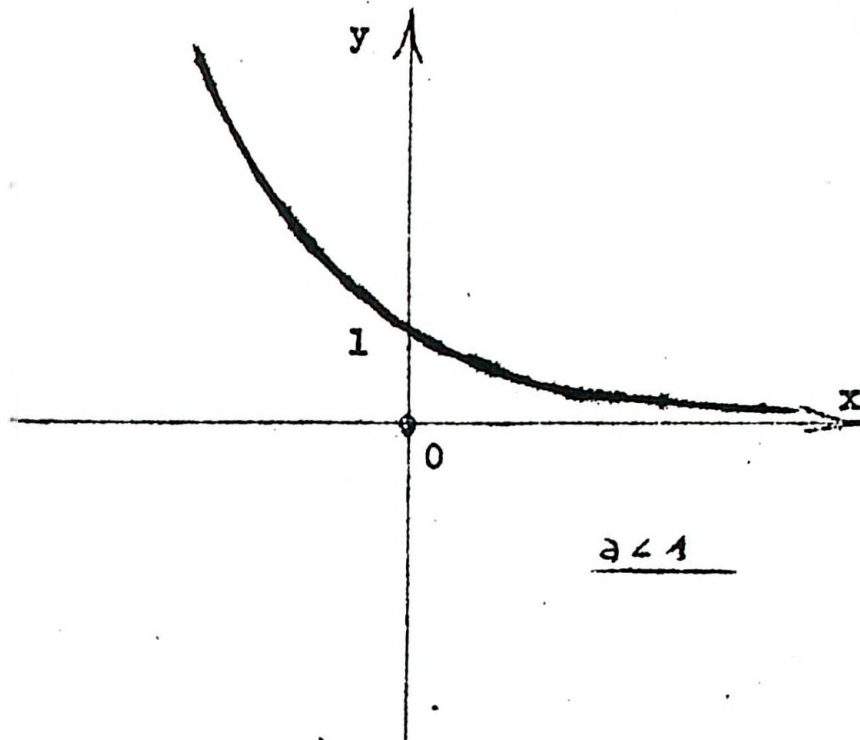
$$a = \frac{1}{b} \quad \text{para} \quad b > 1$$

luego es

$$y = a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}$$

es decir, obtenemos la función inversa de la correspondiente al primer caso; su curva se obtiene tomando los valores inversos de los de la tabla anterior:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$+$	$+1$	$+$	0



14.3.5.- FUNCION LOGARITMICA.-

Sea la función

$$y = \log_a x$$

Esta función es inversa de $y = a^x$ y como en el caso de esta función se pueden presentar dos casos según que $a \geq 1$, obteniéndose las curvas representativas respectivas tomando los valores simétricos de $y = a^x$ con respecto a la bisectriz $m m'$ del primer cuadrante.

1er. Caso

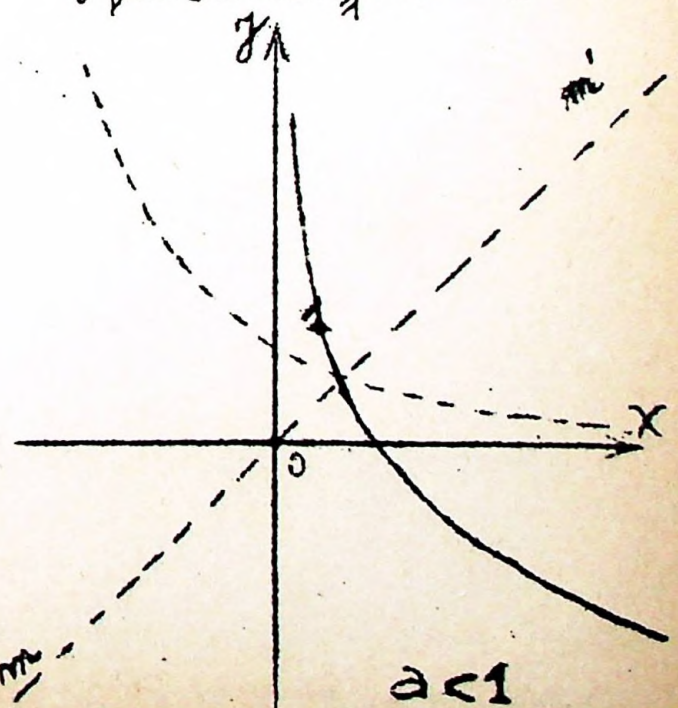
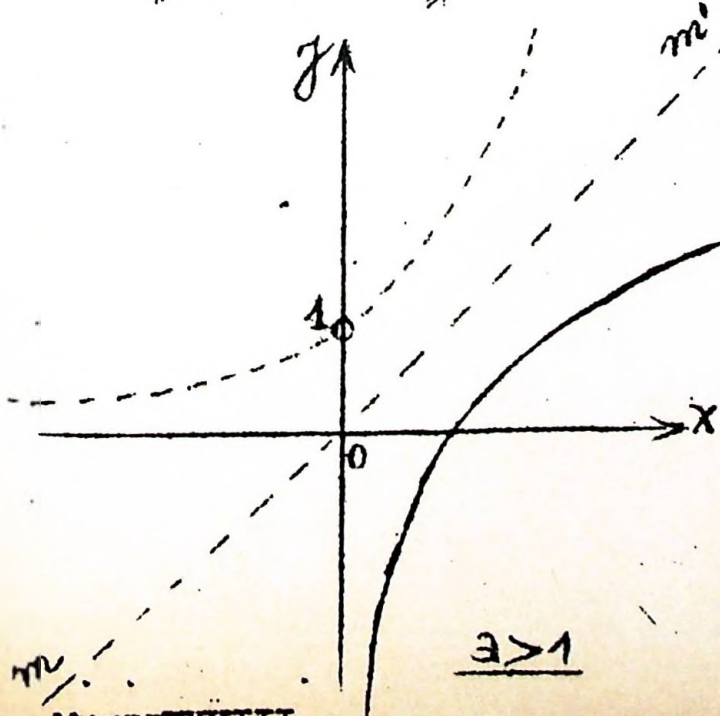
$a > 1$

2º Caso:

$a < 1$

X	$-\infty$	0	+1	$1+\infty$
y	imaginarios	$-\infty$	0	$+\infty$

X	$-\infty$	0	+1	$+\infty$
y	imaginarios	$+\infty$	0	$-\infty$



Recordemos que si $x < 0$ la función

$$y = \log_a x$$

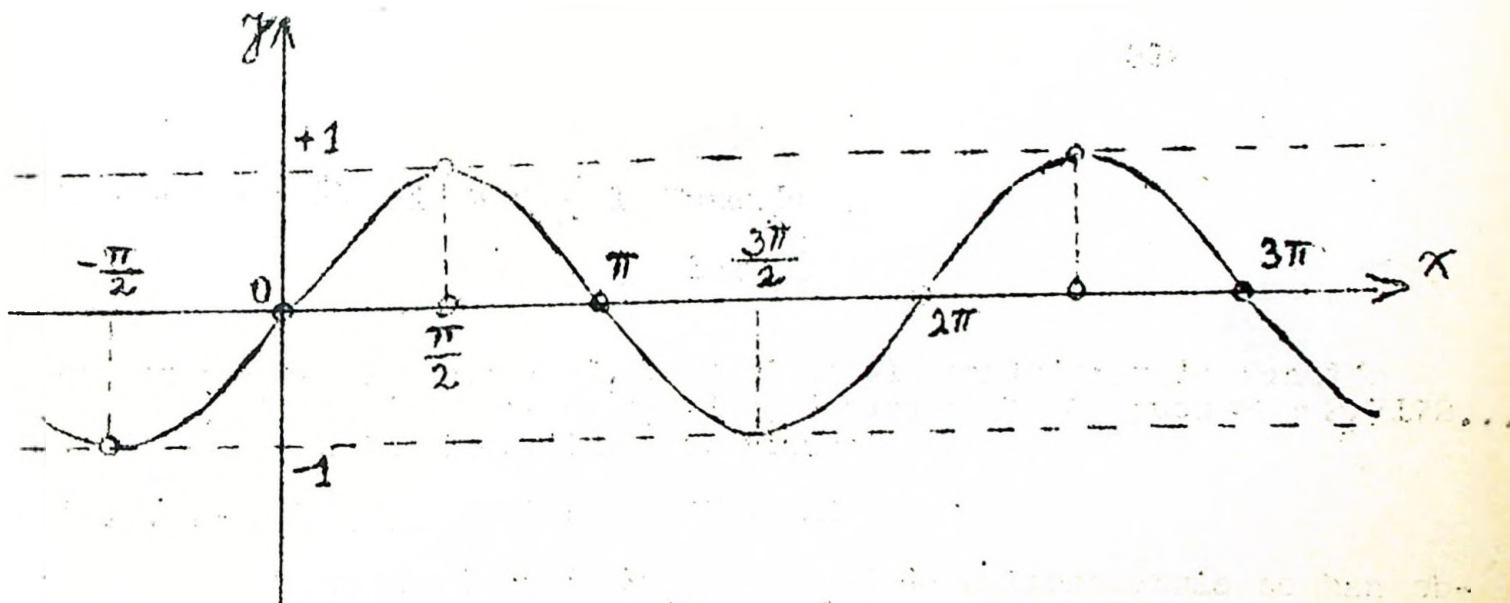
no existe en el campo real, pero si en el complejo; y la función $y = \ln x$ tiene la forma de $y = \log_a x$ para $a > 1$ pues $e = 2,7172...$ es la base de los logaritmos neperianos

14.3.6.- FUNCIONES CIRCULARES DIRECTAS

Como en el capítulo () de Trigonometría se han obtenido las curvas representativas de las funciones directas, aquí solo las reproduciremos con las tablas de variaciones que experimentan.

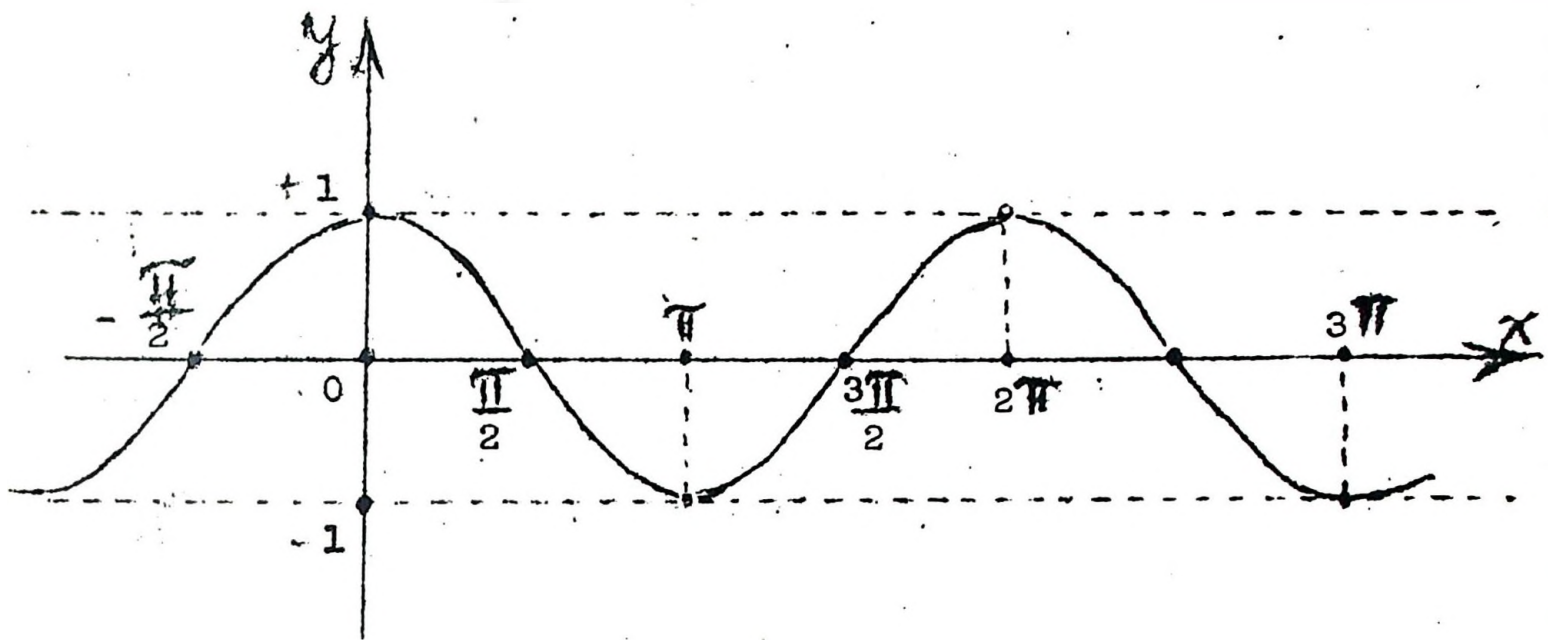
a) FUNCION SENO $y = \text{sen } x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	+	+1	+	0
	0	-	-1	-	0



b) FUNCION COSENO: $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	+1	+	0	-	-1
	-	-	0	+	+1



c) FUNCION TANGENTE: $y = \operatorname{tg} x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π						
y	0	+	+	∞	-	0	+	+	∞	-	0

14.3.7.- FUNCIONES CIRCULARES INVERSAS.

a) Función $y = \text{arc. sen } x$

Sea la función

$$y = \text{arc. sen } x$$

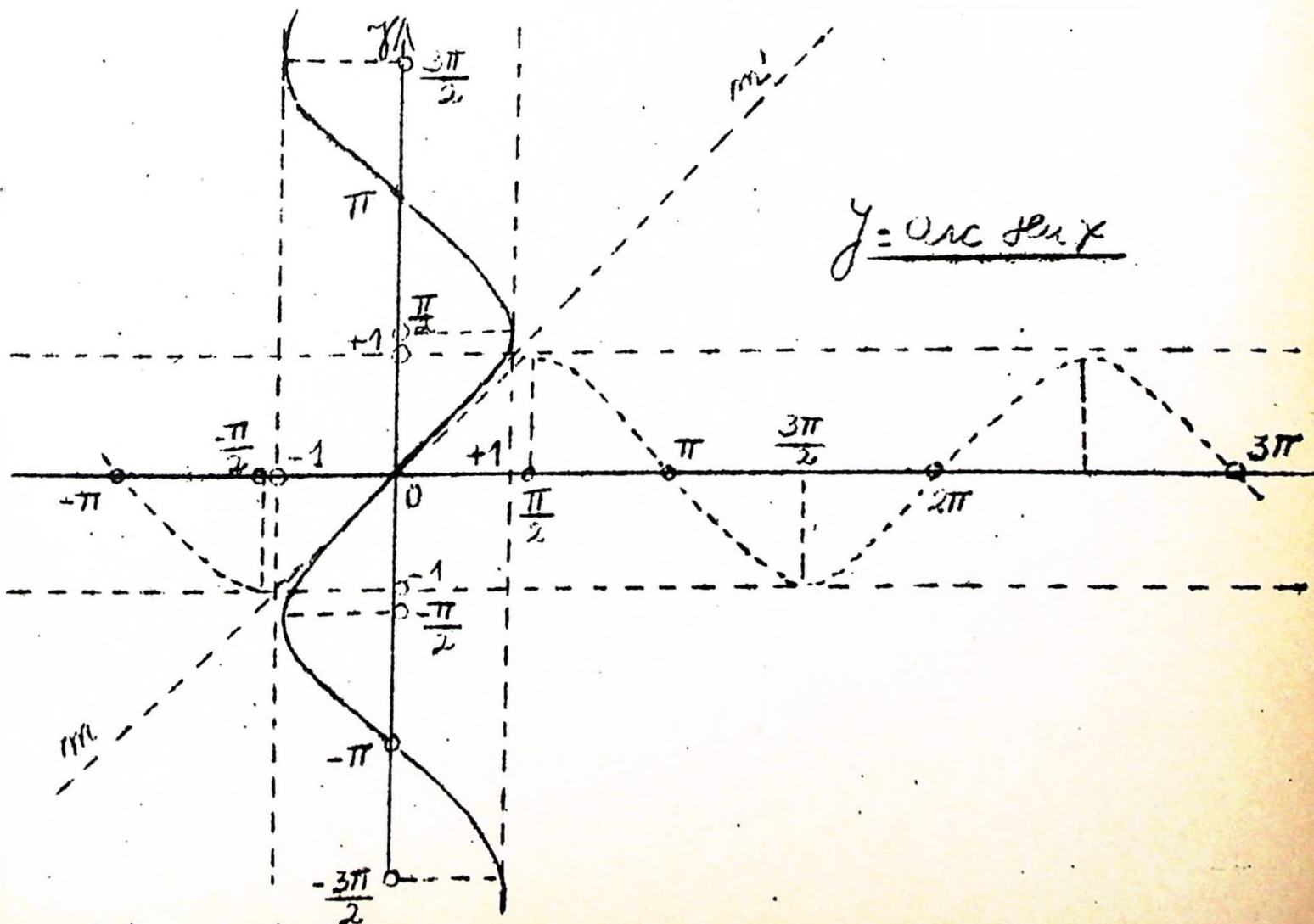
que se lee: arco seno x y que significa y es el arco cuyo seno vale x . Esta es la función inversa de:

$$y = \text{sen } x$$

pues se puede obtener de $y = \text{arc sen } x$, despejando a x resulta

$$x = \text{sen } y$$

Se deducirá la curva que representa a $y = \text{arc sen } x$ de la que representa a $\text{sen } x$ por simetría respecto a la bisectriz $m m'$ del primer cuadrante. Se obtiene así la curva de la figura:



Notemos que $\text{arc sen } x$ solo existe para valores de x comprendidos entre -1 y $+1$.

Además, para un valor de x le corresponde infinitos valores de $\text{arc sen } x$. Convendremos tomar como valor de $\text{arc sen } x$ para un valor dado de x , el que se halla comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, que se denomina rama principal del $\text{arc sen } x$.

De esto se deduce la tabla siguiente:

x	-1	0	+1
y	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$

b) FUNCION $y = \text{arc. cos } x$

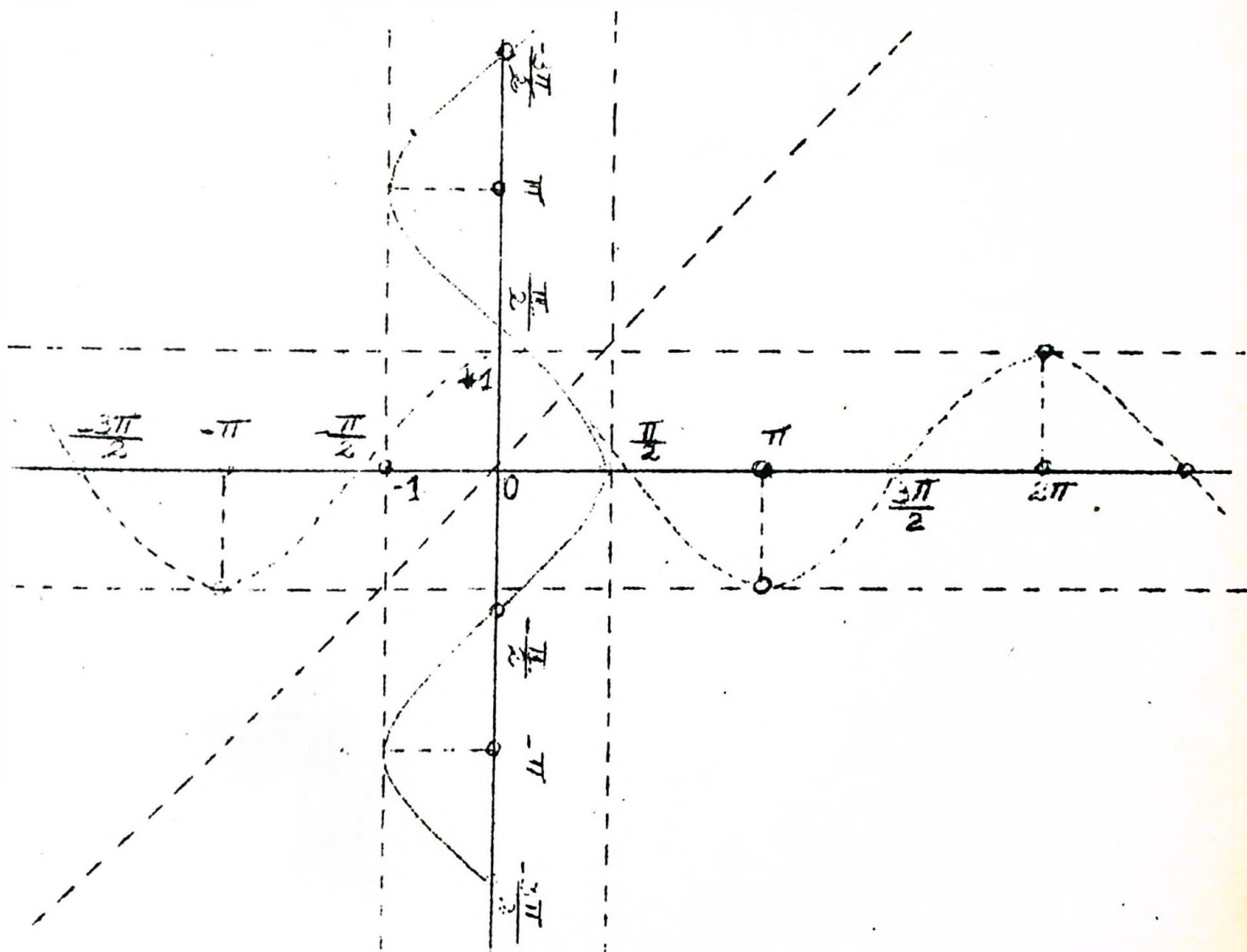
Sea la función $y = \text{arc cos } x$ que se lee: arco coseno x que significa: y es el arco cuyo coseno vale x

Es la función inversa de $y = \cos x$ que se obtiene de - -
 $y = \text{arc cos } x$ despejando x :

$$x = \cos y$$

Se deducirá la curva que representa arc cos x de la que -
 representa cos x , por simetría con respecto a la bisectriz $m m'$ -
 del primer cuadrante. Se obtiene así la curva representada en la figura siguiente.:

Notemos que arc cos x solo existe para valores de x comprendidos entre $+1$ y -1 . Además, para un valor dado de x le corresponden infinitos valores de $\text{arc cos } x$. Convendremos en tomar los valores de arc cos x solamente los comprendidos entre 0 y π , que limita a la rama principal de la curva.



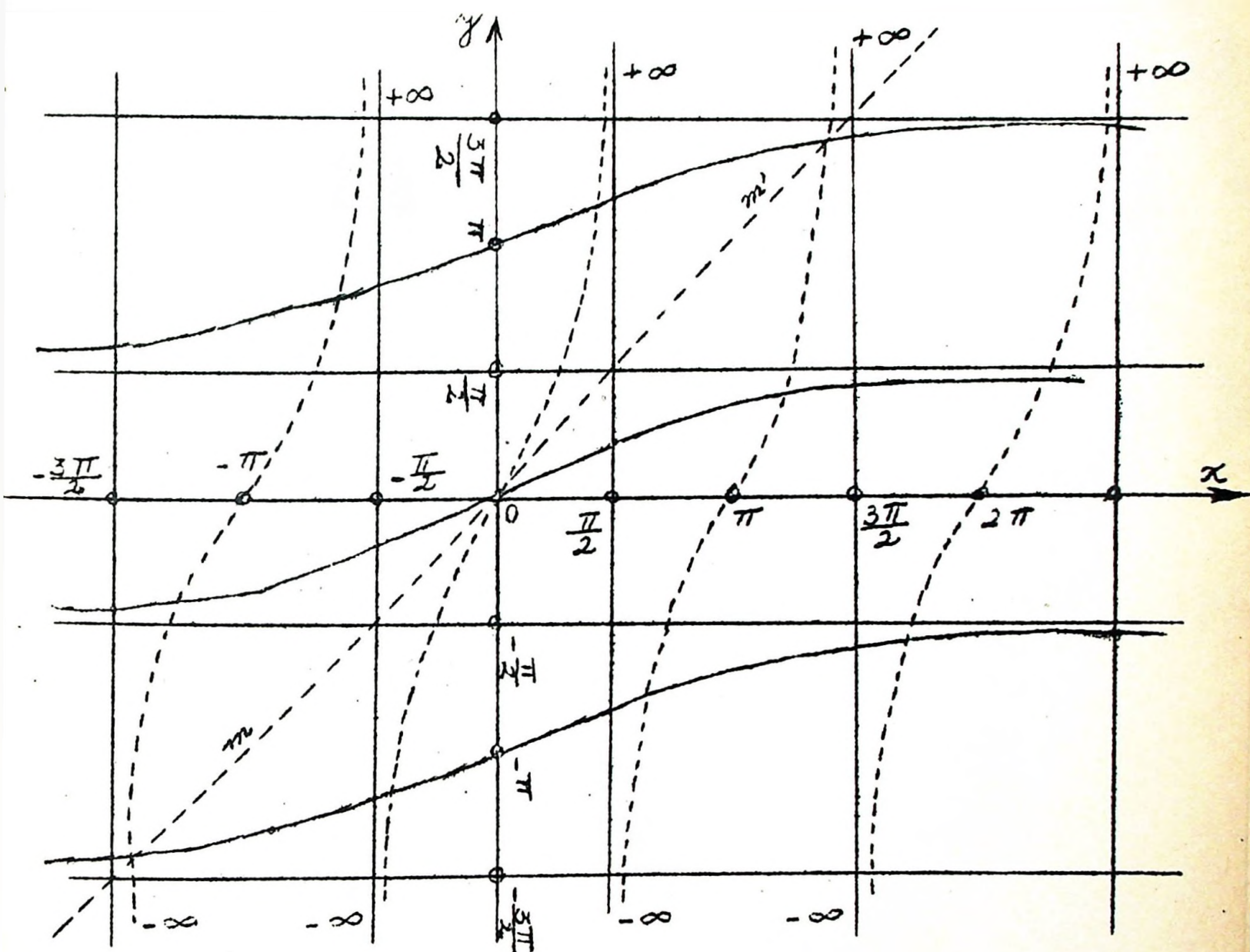
De aquí se deduce la siguiente tabla:

X	-1	0	+1
y	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

c) FUNCION $y = \text{arc tg } x$

Sea la función $y = \text{arc tg } x$ que se lee: arc tangente x y quiere decir: y es el arco cuya tangente es x. Es la función inversa de $y = \text{tg } x$ que puede obtenerse de $y = \text{arc tg } x$ despejando x , se obtiene: $x = \text{tg } x$

Se deducirá la curva que representa arc tg x de la que representa tg x, por simetría con respecto a la bisectriz m m' del primer cuadrante. Se obtiene así la figura:



Se ve que a un valor dado de x le corresponden infinitos valores de $\text{arc tg } x$. Convendremos tomar solamente los valores de $\text{arc tg } x$ comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$ que llamaremos rama principal. De aquí se deduce la siguiente tabla:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$

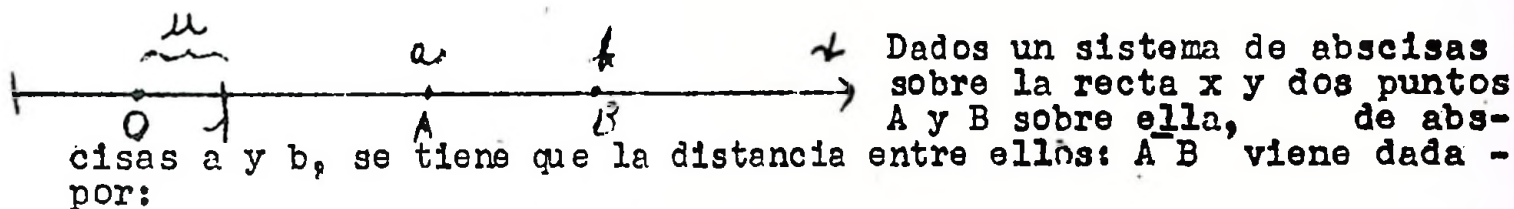
10.4.- ECUACION DE UNA CURVA DEFINIDA POR PROPIEDADES GEOMETRICAS.

LA ...

14.4.- ECUACION DE UNA CURVA DEFINIDA POR PROPIEDADES GEOMETRICAS. LA RECTA.-

14.4.1.- Distancia entre dos puntos

a) En la recta

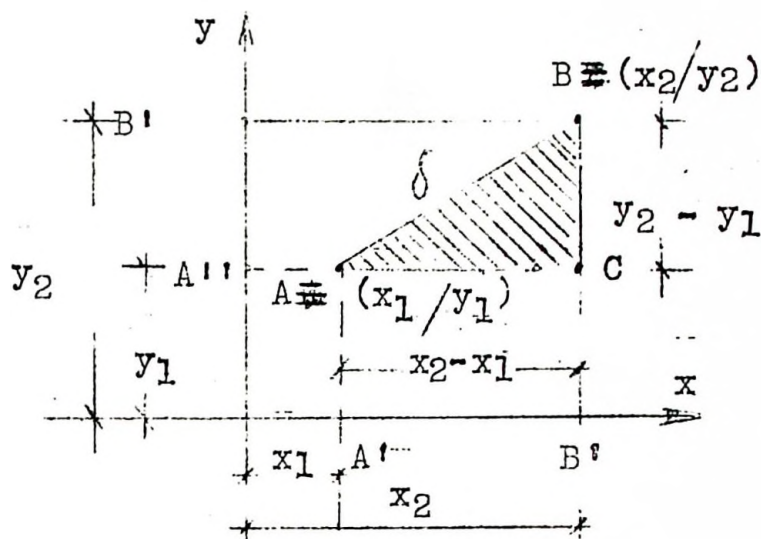


$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

es decir $\boxed{AB = b - a}$

La distancia entre dos puntos se expresa por la diferencia entre la abscisa del segundo y la abscisa del primero.-

b) En el plano



Dado un sistema cartesiano ortogonal (x y) y dos puntos en el plano: $A \equiv (x_1/y_1)$ y $B \equiv (x_2/y_2)$, se trazan las distancias a los ejes coordenados, con lo cual queda formado el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, en el cual se cumple, por el teorema de Pitágoras; que:

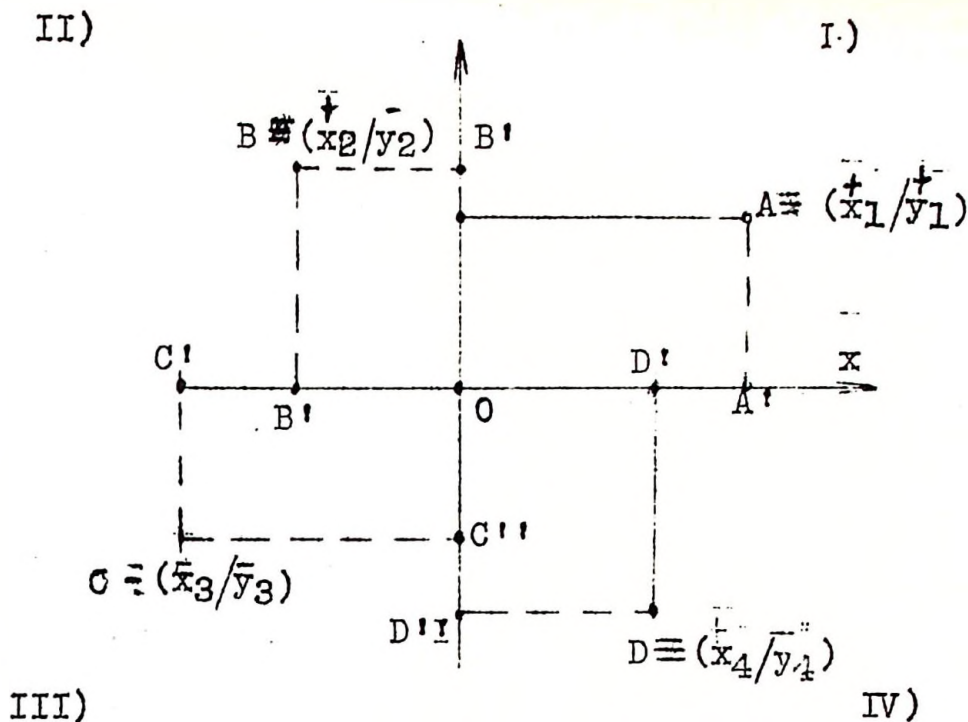
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

es decir
$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y designando la distancia AB con δ resulta:

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

14.4.2 Signos en el sistema cartesiano del plano



Los dos ejes del sistema cartesiano dividen el plano en cuatro cuadrantes cada uno de los cuales se caracteriza por los signos de las coordenadas de sus puntos. En efecto, sea $A \equiv (\bar{x}_1 / \bar{y}_1)$ un punto del primer cuadrante sus coordenadas se miden sobre los semi ejes positivos x e y, en consecuencia $A \equiv (+ / +)$. Un punto $B \equiv (\bar{x}_2 / \bar{y}_2)$ del segundo cuadrante, tiene abscisa negativa y ordenada positiva; un punto $C \equiv (\bar{x}_3 / \bar{y}_3)$ del tercer cuadrante tiene abscisa y ordenada negativas y finalmente, un punto $D \equiv (\bar{x}_4 / \bar{y}_4)$ del cuarto cuadrante tiene abscisa positiva y ordenada negativa. Resumiendo, se tiene

cuadrante	abscisa	ordenada
I)	+	+
II)	-	+
III)	-	-
IV)	+	-

14.4.3 Representación analítica de la recta

1) Cualquier punto del eje de abscisas tiene ordenada nula, de modo que

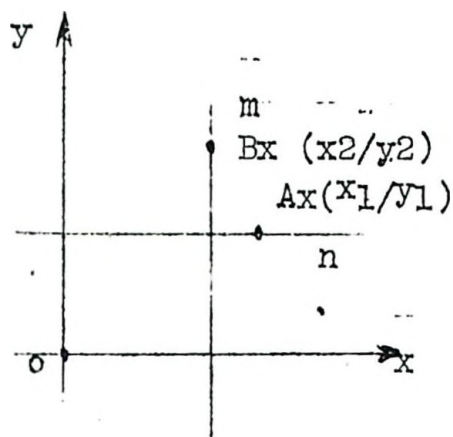
$$y = 0$$

será la ecuación del eje de abscisas

2) Cualquier punto del eje de ordenadas tiene abscisa nula, de modo que:

será la ecuación del eje de ordenadas.

3)



Sea $n \parallel x$

Cualquier punto de n , tal como el $A \equiv (x_1, y_1)$ se halla a una distancia constante del eje x , vale decir, que para todo punto de n la ordenada y_1 es la misma para todos, en consecuencia:

$$y = k \quad (\text{constante})$$

es la ecuación de $n \parallel x$

4) sea $m \parallel y$

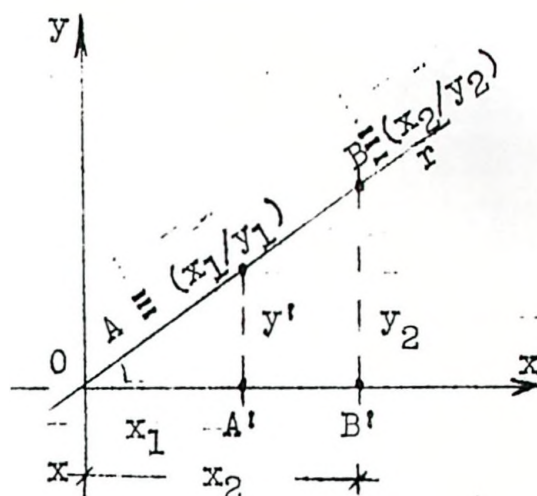
Cualquier punto de m , tal como el $B \equiv (x_2, y_2)$ tiene una distancia constante al eje y , es decir, que todos ellos tienen la misma abscisa

luego

$$x = h \quad (\text{constante})$$

es la ecuación de $m \parallel y$

5) Recta que pasa por el origen



Tengamos la recta r que pasa por O , y sean $A \equiv (x_1 / y_1)$ $B \equiv (x_2 / y_2)$ dos puntos de ella. En la figura se han formado dos triángulos AOA' y BOB' que tienen un ángulo agudo común; luego por Geometría Métrica resulta que: $AOA' \sim BOB'$ ($\sim$ se me parece)

$$\therefore \frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = m \text{ (constante)}$$

es decir:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = m$$

y en general

$$\frac{y}{x} = m$$

$$\boxed{y = mx}$$

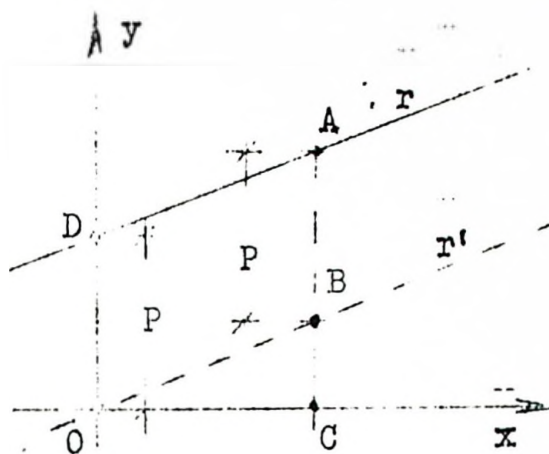
es la ecuación de la recta m

por Trigonometría

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\therefore \boxed{m = \operatorname{tg} \alpha}$$

a la constante m se denomina pendiente o coeficiente angular de la recta y da la inclinación de la misma respecto del eje x .

6) Recta que no pasa por el origen

Sea r una recta cualquiera del plano que corta al eje y en el punto D . Tracemos $r' \parallel r$ y que pase por el origen, su ecuación será:

$$y = mx$$

La ordenada de un punto A de la recta r se obtiene sumándole a la ordenada de un punto B de r' un segmento constante p , de modo que

$$y = mx + p$$

será la ecuación de la recta r , que se acostumbra a designar con el nombre de ecuación explícita de la recta.

7) Ecuación general de la recta

Dada una ecuación de primer grado en x y en y , de la forma

$$ax + by + c = 0$$

donde a , b , y c son coeficientes o constantes, decimos que ella representa una recta en un sistema cartesiano. En efecto, des-
pejando a y se tiene:

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

y haciendo

$$m = -\frac{a}{b}$$

$$p = -\frac{c}{b}$$

se tiene

$$y = mx + p$$

la ecuación explícita de la recta

Es
Es

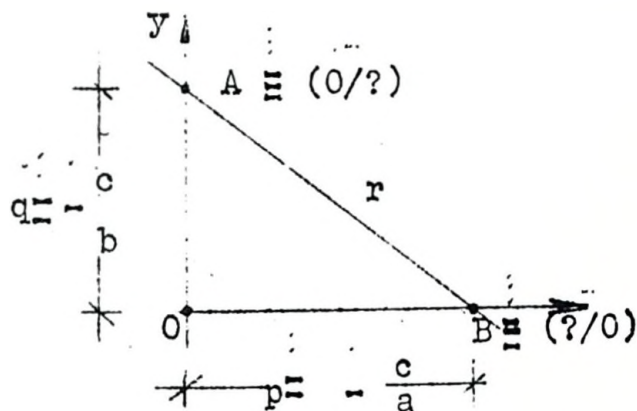
$$ax + by + c = 0$$

la ecuación general de la recta

Ejemplo:
recta.

$$3x + 5y + 7 = 0 \text{ representa a una}$$

8) Ecuación segmentaria de la recta



Consideremos la recta r definida por la ecuación general

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c$$

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 \quad (1)$$

Sean A y B los puntos de intersección de r con los ejes coordenados; busquemos sus coordenadas:

Si $x = 0$ en (1) es: $y = -\frac{c}{b}$

$$\therefore A = (0, -\frac{c}{b})$$

Si $y = 0$ en (1) es: $x = -\frac{c}{a}$

$$\therefore B = (-\frac{c}{a}, 0)$$

Si designamos con

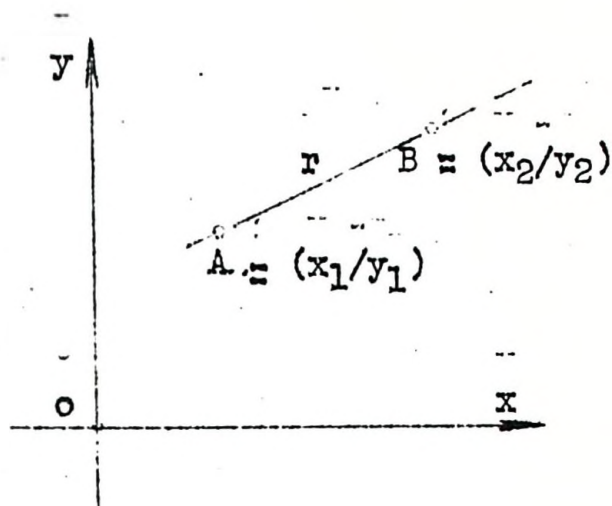
$$p = -\frac{c}{a} \quad q = -\frac{c}{b}$$

la (1) toma la siguiente forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

que se conoce con el nombre de ecuación segmentaria de la recta

14.4.4 Recta que pasa por dos puntos



Dados los puntos

$A \equiv (x_1 / y_1)$ y

$B \equiv (x_2 / y_2)$ la

recta que se bus

ca tiene la for-

ma: $ax + by + c = 0(1)$

Si el punto

$A \equiv (x_1/y_1)$ está en

la recta r , sus

coordenadas la verifican:

$$\begin{aligned} \therefore ax + by + c &= 0 \\ \therefore \quad 1 \quad 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Análogamente, si $B \equiv (x_2 / y_2)$ pertenece a r , es:

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \quad (3)$$

Restando (2) de (1) resulta:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

Restando (2) de (3) es:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

ha quedado formado así un sistema de dos ecuaciones entre las dos incógnitas a y b , resolviéndolo da:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}$$

luego es:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y_2 - y_1$$

es la ecuación pedida

Comparada con la ecuación explícita de la recta

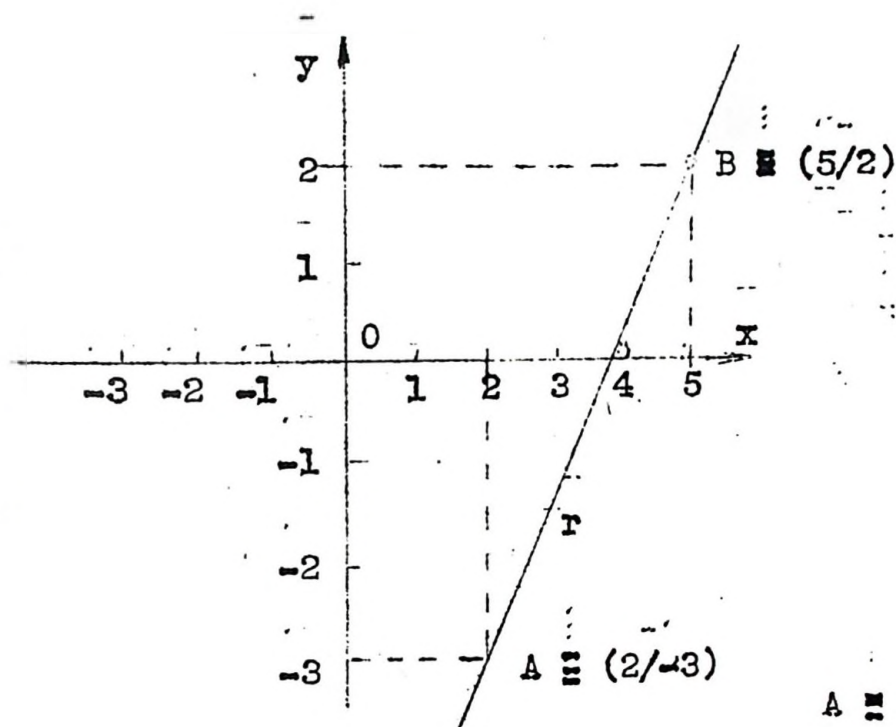
$$y = mx + p$$

se ve que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{es el coeficiente angular}$$

de la recta pedida.

Ejemplo: $A = (2 / -3)$; $B = (5 / 2)$



$$B = (5 / 2)$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 5$$

$$y_1 = -3 \quad y_2 = 2$$

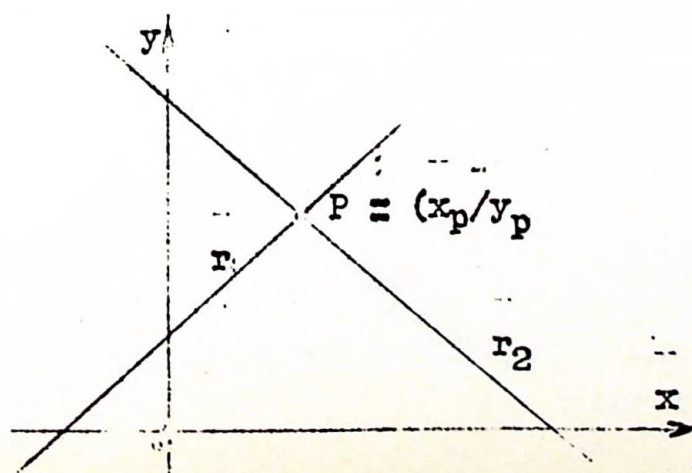
$$y + 3 = \frac{2+3}{5-2} (x-2)$$

$$y + 3 = \frac{5}{3} (x - 2)$$

$$A = (2/-3) \quad y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} - 3$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{19}{3}$$

14.4.5 Punto de intersección de dos rectas



Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$r_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

se trata de buscar las coordenadas (x_p / y_p) de su punto de intersección. Supongamos que ambas se corten en P; sus coordenadas incógnitas x_p e y_p deben verificar a las ecuaciones de ambas rectas, es decir:

$$\begin{cases} a_1 x_p + b_1 y_p + c_1 = 0 \\ a_2 x_p + b_2 y_p + c_2 = 0 \end{cases}$$

habiéndose obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$x_p \text{ e } y_p : \begin{cases} a_1 x_p + b_1 y_p = -c_1 \\ a_2 x_p + b_2 y_p = -c_2 \end{cases}$$

resolviéndolo con cualquiera de los métodos que se detallarán en el capítulo próximo 5, se obtiene:

$$x_p = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y_p = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Si $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ las dos rectas se cortan en un punto determinado $P \equiv (x_p / y_p)$

Si $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ no siendo nulos los numeradores de x_p e y_p , las dos rectas no se cortan, es decir, son paralelas, en cuyo caso sera:

$$a_1 b_2 = a_2 b_1$$

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}}$$

que expresa la condición de paralelismo de r_1 y r_2

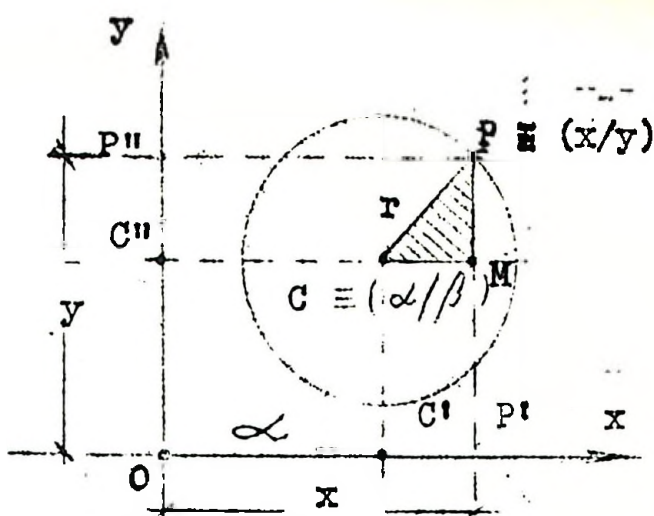
14.4.6 La Circunferencia

Dado un punto $C \equiv (\alpha / \beta)$ llamado centro y un segmento r , llamado radio, se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al centro es igual al radio.

Si $P \equiv (x/y)$ es un punto genérico de la circunferencia es

$$\overline{PC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2 \quad \text{por el teorema}$$

$$\text{de Pitágoras : } r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$



Es decir que

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

es la ecuación general de la circunferencia

Desarrollando esa expresión se tiene:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0$$

haciendo

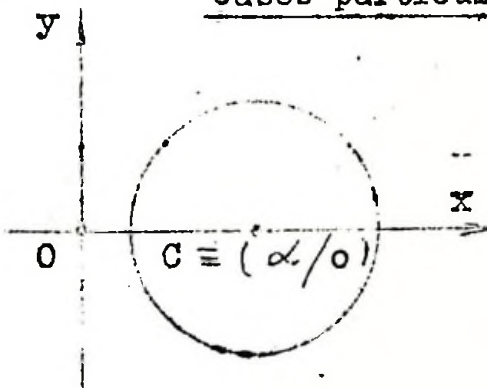
$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = \gamma$$

es

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \quad (2)$$

otra forma de la ecuación general de la circunferencia

Casos particulares:



El centro C pertenece

al eje x. En este caso

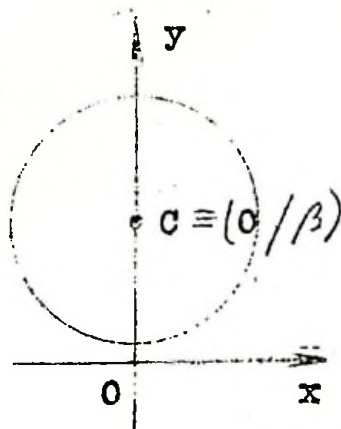
$C \equiv (\alpha/0)$ y la ecuación (1) se

reduce a $(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$

y la (2) a:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \gamma = 0$$

b) El centro C pertenece al eje y



En ese caso

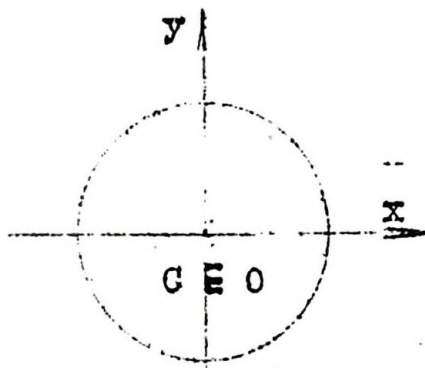
$C \equiv (0/\beta)$; la

(1) se reduce a:

$$x^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

y la (2) a :

$$x^2 + y^2 - 2\beta y + \gamma = 0$$



- a) El centro C coincide con el origen con el origen 0

En este caso es $C = (0/0)$

es decir $\alpha = 0$ $\beta = 0$

y en (1) y (2) se reduce a :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que es la ecuación más frecuente de la circunferencia.

d) Ejemplo:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 10 = 0$$

es la ecuación de una circunferencia cuyo centro tiene por coordenadas:

$$\alpha = -2$$

$$\beta = +3$$

Como:

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = \gamma$$

en este caso es:

$$4 + 9 - r^2 = 10$$

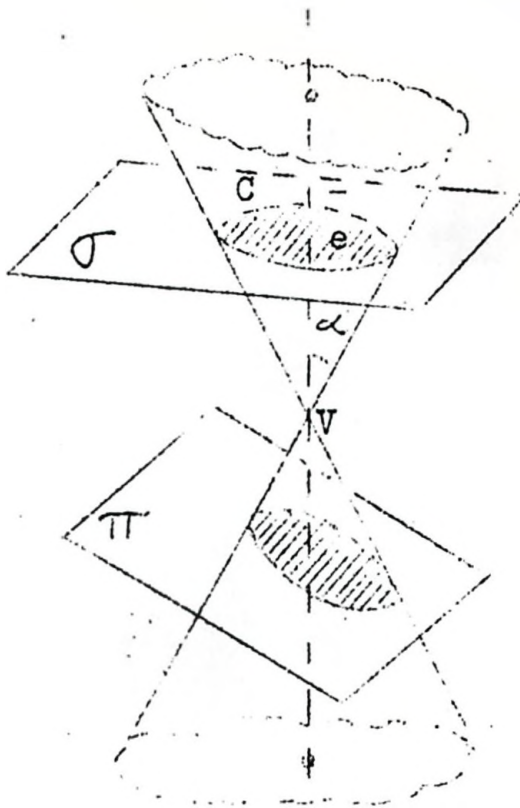
$$r^2 = 4 + 9 - 10 = 3$$

$$r = \sqrt{3}$$

14/4.7 Las cónicas como curvas-sección

Se llaman cónicas a las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano. Según sea la posición del plano sección con respecto a los elementos de la superficie, que enumeraremos, se obtienen las cónicas clásicas, llamadas elipse, parábola e hipérbola.

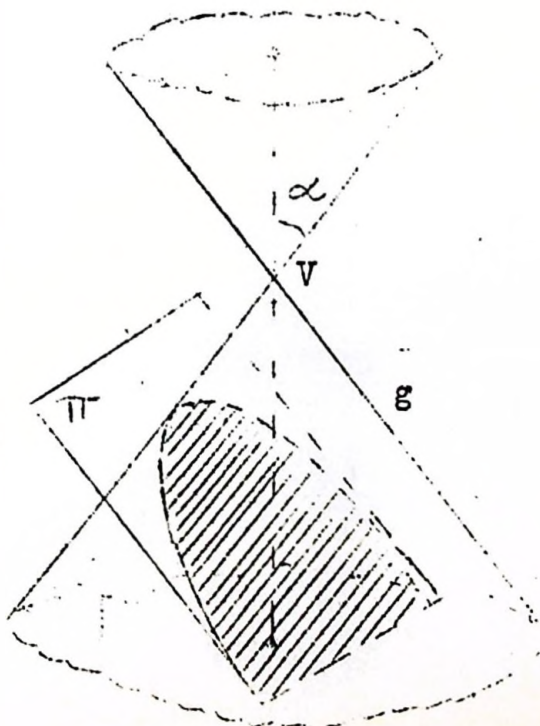
a) Elipse y circunferencia



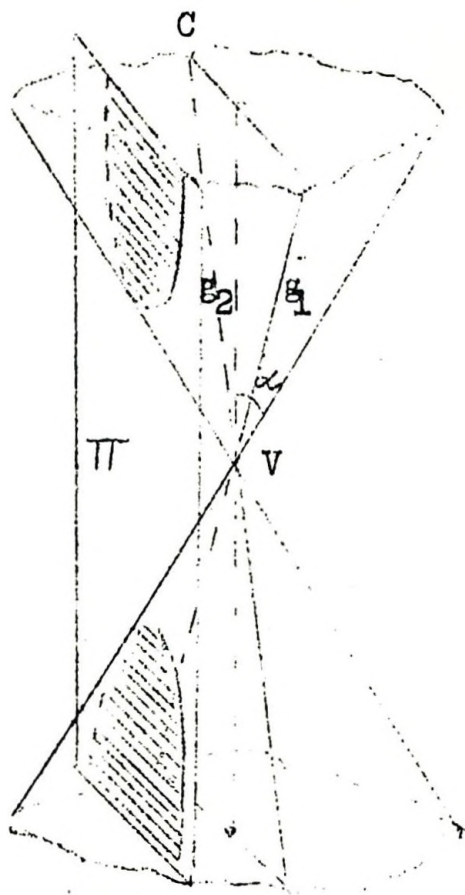
Consideremos una superficie cónica indefinida de eje e y ángulo del vértice α , y dos planos.

El primero la corta según una curva C que es una circunferencia y el segundo según una curva E que es una elipse.

b) Parábola



Si el plano π gira en su posición hasta colocarse paralelo a una generatriz, tal como por ejemplo la g , la curva sección es una parábola, que se va estrechando a medida que π se acerca a g , y en cambio se abre más a medida que π se aleja de dicha gene-

C) Hipérbola

Cuando el plano es paralelo al plano formado por dos generatrices g_1 y g_2 la curva sección que se obtiene es una hipérbola que se hace más abierta o cerrada

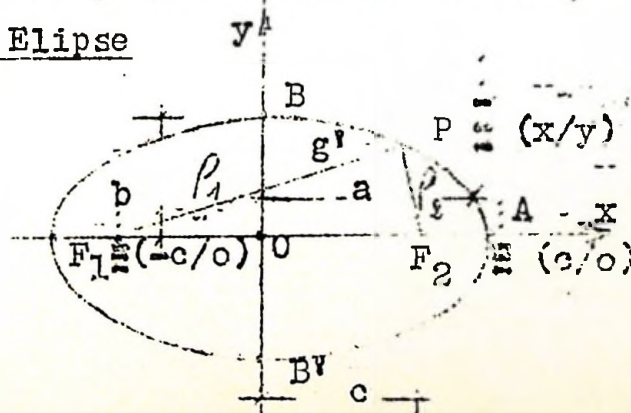
sección se aleje o se acerque al plano g_1 g_2 .

M) Cónicas degeneradas

En la elipse y en la circunferencia, a medida que los planos σ y π se acercan a V , vértice de la superficie cónica, ambas curvas se cierran y cuando ambos planos pasan por V , las curvas degeneran en un punto.

En la parábola, si el plano π pasa por V , esta curva degenera en una recta que coincide con la generatriz g .

En la hipérbola, si el plano π coincide con el plano g_1 g_2 , la curva degenera en el sistema de dos rectas g_1 g_2 .

14.4.8 Las cónicas como lugares geométricosa) Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales es constante la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos. Si $P = (x / y)$ es un punto genérico de la elipse y P_1 y P_2 las respectivas distancias a los focos F_1 y F_2 , es por definición

$$P_1 + P_2 = 2a \quad (\text{constante}) \quad (1)$$

Elementos

F_1 y F_2 : focos

A. A' B. B' : vértices de la elipse

O : centro

$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$: semidiámetro mayor

$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$: " menor

$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$: semidistancia focal

P_{P_1} y P_{P_2} : radios vectores

Adoptando el sistema cartesiano de referencia indicado en la figura y teniendo en cuenta la condición fundamental (1), resulta:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

efectuadas las operaciones indicadas se llega a deducir que:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

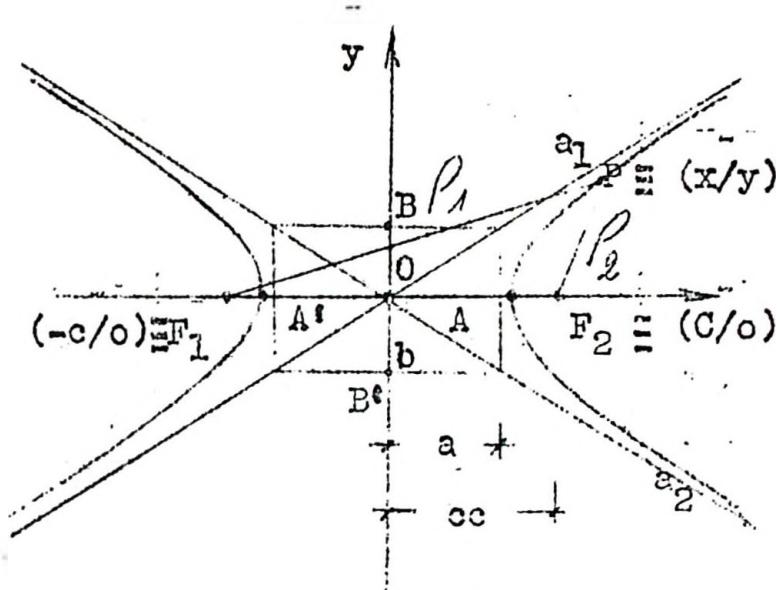
la ecuación canónica de la elipse.

La curva es simétrica respecto al centro; es una curva cerrada, toda ella comprendida en el rectángulo de lados $2a$ y $2b$

b) Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales es constante la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos. Si $P = (x / y)$ es un punto genérico de la hipérbola y P_1 y P_2 , las respectivas distancias a los focos F_1 y F_2 , es por definición:

$$P_{P_1} - P_{P_2} = 2a \quad (\text{constante}) \quad (1)$$



Elementos:

F_1 y F_2 : Focos

A , A' , B , B' : Vértices

O : Centro

$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$: Semidiámetro transverso

$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$: Semidiámetro no transverso

$\overline{OF_1} = \overline{OF_2}$: Semidistancia focal

P_1 y P_2 : Radios vectores

Adoptando el sistema cartesiano de referencia indicado en la figura, y teniendo en cuenta la condición fundamental (1), resulta:

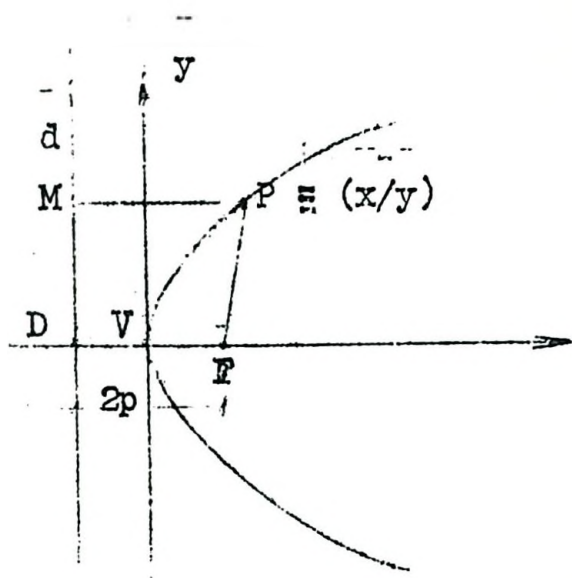
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

y efectuando las operaciones indicadas, se llega a la ecuación conónica siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La curva presenta dos ramas infinitas. No tiene puntos reales para x comprendido entre $+a$ y $-a$, y toda ella se halla comprendida en los ángulos opuestos por el vértice O , cuyos lados son las tangentes en los puntos impropios o infinitos de la cónica; tales rectas se denominan asíntotas de la hipérbola.

c) Parábola



Es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales son iguales las distancias a un punto fijo, llamado foco, y a una recta fija, llamada directriz. Si $P \equiv (x/y)$ es un punto genérico de la curva y $\overline{PF}$, $\overline{PM}$ son las respectivas distancias

al foco y a la directriz, es por definición:

$$\overline{PF} = \overline{PM} \quad (1)$$

Elementos:

- | | | |
|------|------------------------|-----------------------|
| F: | foco | |
| d: | directriz | $DF = 2p$: parámetro |
| V: | vértice | |
| V x: | eje | |
| V y: | tangente en el vértice | |

Adoptando el sistema cartesiano de referencia indicado en la figura, y teniendo en cuenta la relación fundamental (1) es:

$$\overline{PF}^2 = \overline{PM}^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

y efectuando operaciones se deduce:

$$y^2 = 4 p x$$

la ecuación canónica de la parábola. La curva es simétrica respecto del eje y para $x \rightarrow + \infty$ también $y \rightarrow + \infty$. Para $x < 0$ no puntos reales de la curva.

14.4.- Bibliografía

- 1) H.B Phillips: Geometría Analítica - Ed.U.T.E.H.A. México.
- 2) Ch.H. Lehman: Geometría Analítica - Ed.U.T.E.H.A. México-1953.
- 3) Guido Castelnuovo: Lecciones de Geometría Analítica, tratado de M. Sadvshy, Ed. Calomino -La Plata- 1943
- 4) M. Laboureur: Cours de Calcul Algébrique, Différentiel et Integral -Ed. Ch. Béranger -París- 1913.
- 5) F.S. Woods y F.H. Bailey: Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal, Tratado del Ingeniero Rafael García Díaz.
- 6) Mineo Chini: Corso Speciale di Matematiche Ed. R. Giusti -Firenze- 1923
- 7) J. Rey Pastor, L.A. Santaló, M. Balanzat: Geometría Analítica, Ed. Kapelusz -Buenos Aires- 1955

14.5.1. LIMITE DE UNA VARIABLE

Consideremos un alambre recto en el que se ha marcado una mancha negra; además ensartamos en el alambre una cuenta de rosario, (esferita de vidrio con un agujero para el paso del alambre), que puede moverse a voluntad hacia la izquierda o hacia la derecha de la mancha fija.-

Imaginemos al alambre representando el eje de las x , a la cuenta de rosario, a un punto móvil de abscisa x y a la mancha negra, a un punto fijo de abscisa a . Podemos mover la esfera hacia la derecha acercándola a la mancha todo cuanto desee, y lo mismo, llevándola a la izquierda de la mancha, empujándola hacia la izquierda hasta que se aproxime a la mancha todo cuanto se desee. En esa forma la

mancha quedará encerrada en un intervalo de x que puede hacerse lo más pequeño posible. En efecto, supongamos que ese intervalo, a la izquierda y a la derecha de a sea menor que $\frac{1}{100}n$, bastará para

ello hacer dos marcas en el alambre, a derecha e izquierda de

a , a la distancia $\frac{1}{100}n$, de la mancha, y hacer mover a la esfera dentro de esas marcas, ya sea por la derecha o ya sea por la izquierda; la aproximación a a puede hacerse en ese intervalo cada vez más cerca de la mancha, pero nada se dice acerca de si la esfera coincide con la mancha, sino solamente lo que ocurrirá en la vecindad o proximidad de a , que es lo que interesa. Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ diferentes posiciones de la esfera en su acercamiento a a ; las diferencias

$$(a - x_1); (a - x_2); (a - x_3); \dots; (a - x_n); \dots$$

son cada vez más pequeñas y pueden hacerse menores que cualquier número ϵ arbitrario y positivo, por pequeño que esto sea; bastará para ello, fijar un intervalo ϵ a cada lado de la mancha y mover la esfera dentro de él. Dichas diferencias tienden a acercarse a cero y tanto cuanto más pequeño es el intervalo ϵ de variación de x . Se dice en este caso que la variable independiente x tiene por límite a a . Obsérvese que nada decimos respecto a la coincidencia de x con a sino solo de su proximidad, pues, cuando $x \equiv a$ es $a - x_n = 0$ y operar en esta situación puede dar lugar a resultados absurdos. En efecto, sea

$$a = b \quad \text{una igualdad cualquiera.}$$

$$a^2 = ab \quad \text{por haber multipl. por } a$$

$$\text{Restando } b^2 \quad a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$\text{lo que es lo mismo que } (a + b)(a - b) = b(a - b)$$

y dividiendo por $(a - b)$ queda :

y como

$$a + b = b$$

$$a = b$$

es

$$2b = b$$

luego

$$2 = 1$$

Se ha llegado a un resultado absurdo ya que se ha dividido por $a - b = 0$; lo cual no es permitido, por cuanto la división por cero no existe.

Definición: Se dice que la variable x tiende a la constante a como límite, cuando los valores sucesivos de x son tales que el valor numérico de la diferencia $(a - x)$, en valor absoluto, pueden llegar a ser menor que cualquier número ϵ arbitrario, prefijado y positivo, por pequeño que este sea.

Será $\lim x = a$

sí

$$|a - x| \leq \epsilon$$

14.5.2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

Supongamos tener la función $y = \frac{8}{x}$ y tratemos de averiguar que ocurre en la vecindad de $x = 2$. Pudiendo variar x con arbitrariedad, por tratarse de la variable independiente, damos a ella los valores $x = 2,1; 2,01; 2,001$, etc. y construimos la siguiente tabla de valores:

x	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	2,000001
y	3,8	3,98	3,998	3,9998	3,99998	3,999998

Se observa que a medida que x se acerca a 2 la y se va acercando cada vez más a 4. Tengamos

$$y = \frac{8}{2 + h}$$

donde h es el incremento dado a 2, por ejemplo

$$h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots$$

luego, si $y \longrightarrow 4$, su diferencia es:

$$y - 4 = \frac{8}{2 + h} - 4 = \frac{8 - 4(2 + h)}{2 + h} = \frac{-4h}{2 + h}$$

Es lógico decir que y tiende a 4 si la diferencia entre y y 4 puede hacerse numéricamente menor que un número $\epsilon > 0$ por pequeño que éste sea, bastará tomar para ello, si $h > 0$,

$$\left| \frac{-4h}{2 + h} \right| = \frac{4h}{2 + h} < \epsilon$$

o bien

$$4h < \varepsilon (2 + h)$$

$$4h - \varepsilon h < 2\varepsilon$$

$$h(4 - \varepsilon) < 2\varepsilon$$

$$h < \frac{2\varepsilon}{4 - \varepsilon}$$

Ejemplo:

Si

$$\varepsilon = 0,01 \text{ cm.}$$

es

$$h < \frac{2 \times 0,01}{4 - 0,01} = \frac{0,02}{3,99}$$

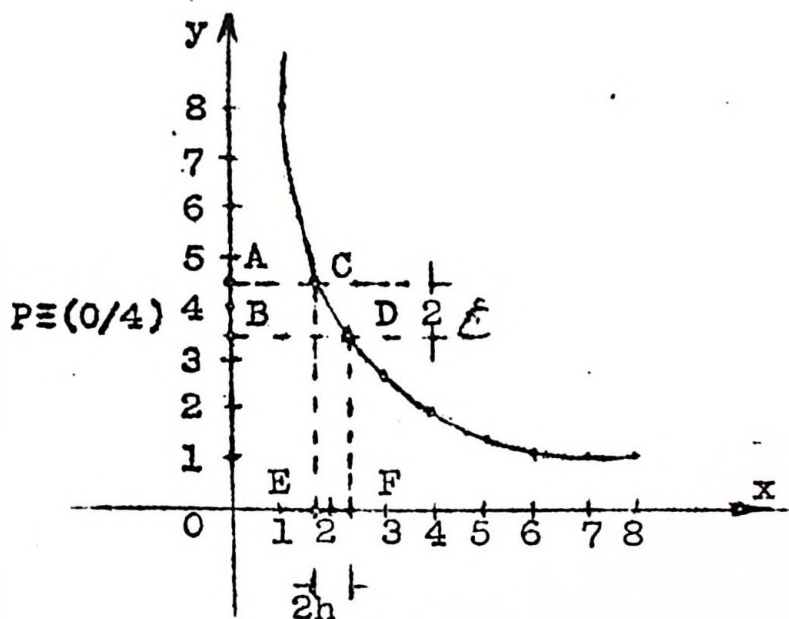
$$h < 0,005 \text{ cm.}$$

Nótese que nada se dice si $x \equiv 2$, sino solamente, x en la proximidad de 2, pues puede ocurrir que para $x = 2$ la función carezca de valor.

Veamos como se interpreta gráficamente.-
Construimos el gráfico de la función

$$y = \frac{8}{x}$$

Tomando el punto $P \equiv (0/4)$ como punto medio del segmento de ancho 2ε construimos el intervalo AB , sobre el eje y ; por sus extremos



x	y
1	8
2	4
3	2,67
4	2
5	1,6
6	1,3
7	1,14
8	1

trazamos AC y BD paralelas al eje x , formándose una faja de un ancho 2ε en la cual se hallan las ordenadas de los puntos cuyo valor de y difiere menos de ε del valor 4. Las verticales trazadas por C y D cortan

al eje x en E y F a ambos lados de 2 y ~~en~~errando este punto en un intervalo $2h$ que depende de ε ; en efecto,

si $\varepsilon = 0,01$ cm. es $\overline{AB} = 2\varepsilon = 0,02$ cm.

y es $2h = 0,005$ cm.

$h = 0,0025$ cm.

Decimos en este caso que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{x} = 4$$

Se ha excluido especialmente a la abscisa 2 de la discusión anterior por las razones dadas con anterioridad.-

Si la función dada fuese

$$y = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$$

se observa que para $x = 1$ no hay ningún valor para y pues la expresión anterior conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, es decir, que la función y no está definida para $x = 1$, pero podemos averiguar que 0 ocurre en la vecindad de 1, para lo cual construimos la siguiente tabla de valores.-

x	y
1,1	2,2
1,01	2,02
1,001	2,002
1,0001	2,0002
1,00001	2,00002

Parece natural asignar el valor 2 cuando $x = 1$

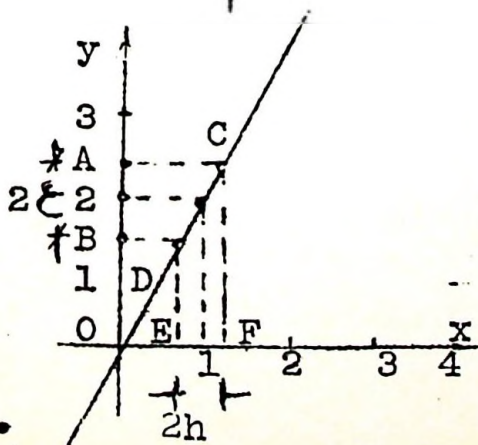
Por otra parte, para

$$y = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{2x(x - 1)}{x - 1} = 2x$$

que representa una recta que pasa por el origen.

Evidentemente

$$|y - 2| = |2x - 2| = 2|x - 1|$$



M.M.

M.M.

puede hacerse arbitrariamente lo pequeño que se desee con solo tomar a x suficientemente próximo a 1. La interpretación gráfica es análoga al caso anterior.

Se dice, en este caso, que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2$$

Definición: Si $y = f(x)$ es una función de x , se dice que y tiene por límite a l cuando x tiende a a , si la diferencia $|y - l|$ en valor absoluto, es menor que un número ϵ arbitrariamente pequeño y positivo, prefijado, cuando se toma $|x - a|$ menor que un número h . - Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

si $|f(x) - l| < \epsilon$ (positivo)

para $|x - a| < h$

14.5.3. Teoremas sobre límites.-

Teorema 1: El límite, cuando x tiende a a , de una suma de un número finito de sumandos, es igual a la suma de los límites de cada uno de los sumandos.

$$\text{Si } y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

$$\text{es } \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_3(x)$$

$$x \rightarrow a \quad x \rightarrow a \quad x \rightarrow a \quad x \rightarrow a$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - x^2 + x) &= \lim_{x \rightarrow 4} x^3 - \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} x \\ &= 216 - 16 + 4 = \underline{204} \end{aligned}$$

Teorema 2: El límite, cuando x tiende a a , del producto de un número finito de factores, es igual al producto de los límites de cada uno de los factores.

$$\begin{array}{l} \text{Si} \quad y = f_1(x) \cdot f_2(x) \\ \text{es } \lim_{x \rightarrow a} \left[f_1(x) \cdot f_2(x) \right] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} y = x^2 (x - 1) \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left[x^2 (x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 4 \cdot 1 = \underline{4} \end{array}$$

Teorema 3: El límite, cuando x tiende a a , del cociente de dos funciones, es igual al cociente de los límites del dividendo y el divisor.

$$\begin{array}{l} \text{Si} \quad y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \\ \text{es } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \end{array}$$

pueden presentarse los siguientes casos:

a) Si $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$

el límite del cociente existe y es finito

b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$

la función y puede tener o no límite finito

c) Si $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$

la función y no tiene límite finito y se dice que tiende al infinito.

Ejemplo: a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)}$$

como $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4) = 8 \neq 0$

el límite del cociente es finito e igual a :

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x} = \frac{0}{0}$$

el límite es indeterminado, sin embargo, como

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \cos x$$

$$\text{es } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

válido para todo valor de x comprendido entre:

$$-\frac{\pi}{2} \text{ y } +\frac{\pi}{2} \quad \text{excepto para } x = 0.$$

Ejemplo c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^2 - 6x + 9} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - x^2 - 7x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9)} = \\ &= \frac{27 - 9 - 21 + 3}{9 - 18 + 9} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Sin embargo:

$$\frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x-3)(x^2 + 2x - 1)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x-3}$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$$

pero siendo

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$$

el límite no es finito y se dice que la función tiende al infinito, escribiéndose:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 3}{x^2 - 6x + 9}$$

Teorema 4: El límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función.-

$$\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 = 7 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 7 \cdot 8 = \underline{56}$$

14.5.4.- CONTINUIDAD DE UNA FUNCION.

Consideremos la función $y = \frac{8}{x}$ cuyo gráfico se ha construido en 6.2; en él se observa que el trazo de la curva entre $x = 2$ y $x = 3$ no presenta inconvenientes, es continuo, no así entre $x = -1$ a $x = 1$, pues en su interior se halla $x = 0$ para el cual la curva no se halla definida y ella salta de $-\infty$ a $+\infty$ teniendo un salto de discontinuidad. Se observa, también, que para $x = 2$ es $y = 4$ y se ha calculado que el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{x} = 4$ coincidiendo el valor de su ordenada con el límite,

que es lo que caracteriza esa continuidad del trazado.

Definición: Se dice que una función $y = f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si, únicamente la función está definida en ese punto, y el límite de la misma para $x \rightarrow a$ es igual al valor de la función para $x = a$.

Definición: Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo $a \leq x \leq b$ si lo es en cada uno de sus puntos.-

La función $y = \frac{8}{x}$ es continua en el intervalo $2 \leq x \leq 3$ y no lo es en $-1 \leq x \leq 1$. -
MM. 30. Conf.

14.3.5. EJERCICIOS.-

1.- $\lim_{t \rightarrow 1} (t^5 - 3t^4 + 2t^3 - t^2 + 7t - 6)$

$$R = 0$$

2.- $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)$

$$R = 1$$

3.- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 4}$

$$R = \frac{3}{2}$$

4.- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 6x^2 - 9x - 54}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$

$$R = \frac{1}{2}$$

5.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 6x + 5}$

$$R = 0$$

6.- $\lim_{\mu \rightarrow 4} \frac{u - 4}{\sqrt{u^2} - 16}$

$$R = 0$$

7.- $\lim_{\ell \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \ell}{\operatorname{sen} \ell}$

$$R = 2$$

8.- $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{\cotg \alpha}$

$$R = 1$$

9.- $\lim_{\varphi} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right)}$

$$R = \alpha$$

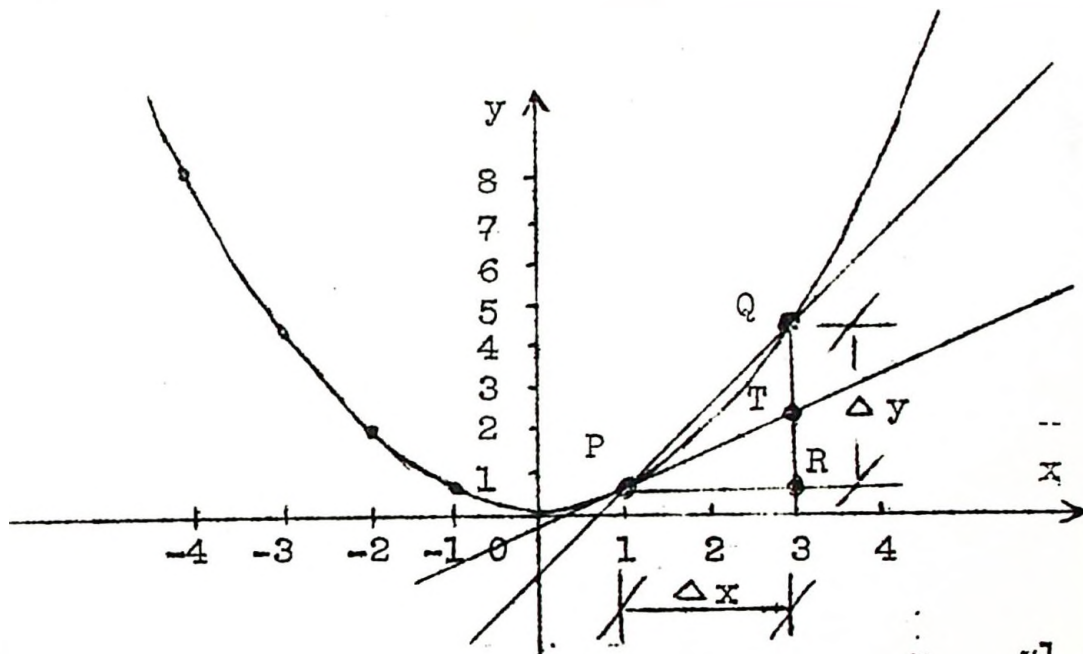
10.- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$

$$R = \frac{12}{5}$$

15.1. Tangente a una curva en un punto

Consideremos la función.

$$y = \frac{1}{2} x^2$$



y busquemos la tangente a la curva en el punto $P = (1, \frac{1}{2})$. Suponemos que sea fijo el punto P y tomamos otro punto Q móvil sobre la curva que se desplaza hacia el punto P sobre ella. La secante PQ va tomando distintas posiciones girando en torno de P hasta ocupar una posición límite PT que se denomina tangente en el punto P. En el triángulo y rectángulo PRQ de lados Δx , y Δy , la pendiente de la secante PQ es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: que toma distintos valores para las distintas posiciones de Q. Supongamos que el punto móvil son $Q = (2, 2)$ se tendrá:

$$\Delta x = \text{absc. } Q - \text{absc. } P = 2 - 1 = 1.$$

$$\Delta y = \text{ord. } Q - \text{Ord. } P = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3/2}{1} = \frac{3}{2}$$

Otros valores de esta pendiente vienen dados en la tabla siguiente:

x_p	x_q	Δx	y_p	y_q	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1	2,0	1,0	0,5	2,0	0,5	1,5
1	1,5	0,5	0,5	1,125	0,625	1,25
1	1,1	0,1	0,5	0,605	0,105	1,05
1	1,01	0,01	0,5	0,51005	0,01005	1,005
1	1,001	0,001	0,5	0,5010005	0,00100005	1,0005

donde se aprecia que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 1$. Para encontrar este límite basta incrementar la abscisa 1 de P en Δx y tendremos

$$\text{Ord. } Q = y_Q = \frac{1}{2} (1 + \Delta x)^2 = \frac{1}{2} (1 + 2 \Delta x + \Delta x^2)$$

$$y_Q = \frac{1}{2} + \Delta x - \frac{1}{2} \Delta x^2$$

y para hallar Δy basta restarlo $y_P = \frac{1}{2}$, es decir que

$$\Delta y = \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^2$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{2} \Delta x$$

de donde

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2} \Delta x \right) = 1$$

donde obtenemos que la tg. $\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

vale decir que $\alpha = 45^\circ$

En general, dada la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ sea $P \equiv (x/y)$ un punto fijo de la curva que representa a esa función, y $Q (x + \Delta x / y + \Delta y)$ otro punto de la misma, variable en posición sobre ella. Se tendrá que:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

es la pendiente de la secante PQ , y el:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

si este límite existe, la secante PQ tiene una posición límite cuando Q , a lo largo de la curva, se aproxima a P ; esta posición límite de la secante es la tangente en punto P , siendo P el punto de contacto, siendo el:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \alpha$$

la pendiente de la tangente.
M.M. Conf. 30.-

15.2. Derivada de una función.

Dada una función $y = f(x)$ continua el intervalo $a \leq x \leq b$ y (x/y) un par de números que satisfaga a la ecuación dada, llamaremos derivada de y con respecto a x en el punto (x/y) a :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que este límite exista.

NOTACION:

Se acostumbra a indicar esta derivada con los símbolos:

$$y' ; f'(x) ; \frac{dy}{dx} ; \frac{d}{dx} f(x) ; \text{etc.}$$

que son los más usados corrientemente.

15.3. Cálculo de derivadas.15.3.1. Derivada de x^n .

Dada la función $y = x^n$, supongamos que n es un entero positivo y busquemos el Δy , para lo cual habrá que incrementar a x en Δx

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x)^n = \\ &= x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} \Delta x^2 + C_n^3 x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + \Delta x^n \\ &= x^n + x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + \Delta x^n \end{aligned}$$

restando a ambos miembros $y = x^n$ obtenemos:

$$\Delta y = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + \Delta x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} \Delta x^2 + \dots + \Delta x^{n-1}$$

como el límite de una suma, de un número finito de sumandos, es igual a la suma de los límites de éstos, y todos contienen a Δx con excepción del primero $n x^{n-1}$ tales límites serán nulos exceptuando al primero, de modo que:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1}$$

$$y' = n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

Ejemplos:

$$\text{Si } y = x^8 \quad \therefore y' = 8x^7$$

$$\text{Si } y = x \quad \therefore y' = x^0 = 1$$

Se demuestra que la fórmula (1) es también válida aún cuando n no sea positivo, vale decir, que n sea negativo, fraccionario o irracional; en una palabra, válida para todo exponente real.

Ejemplos:

$$1) \text{ Si } y = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \therefore y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$2) \text{ Si } y = \sqrt{x^5} = x^{5/2} \quad \therefore y' = \frac{5}{2} x^{5/2-1} = \frac{5}{2} x^{3/2} = \frac{5}{2} \sqrt{x^3}$$

$$3) \text{ Si } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3} \quad \therefore y' = -\frac{1}{3} x^{-1/3-1} = -\frac{1}{3} x^{-4/3} = -\frac{1}{3 \sqrt[3]{x^4}}$$

$$4) \text{ Si } y = \frac{1}{\sqrt[3]{5t^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{t^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot t^{-2/3}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot (-2/3) \cdot t^{-2/3-1}$$

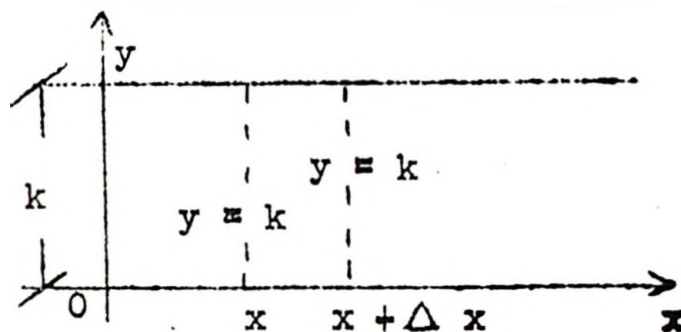
$$y' = -\frac{2}{3 \sqrt[3]{5}} \cdot t^{-5/3}$$

$$y' = -\frac{2}{3 \sqrt[3]{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t^5}} = -\frac{2}{3 \sqrt[3]{5}} \cdot \frac{1}{t \sqrt[3]{t^2}}$$

$$y' = -\frac{2}{3 t \sqrt[3]{5 t^2}}$$

Si $y = k$ (constante)

para cualquier valor que tome x , siempre y tiene el valor k , de modo que:



$$y + \Delta y = k$$

pero $y = k$

restando $\Delta y = 0$

y es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

es decir

$$y' = 0$$

la derivada de una constante es cero. Geométricamente resulta que la tangente en cualquier punto a la recta $y = k$, paralela al eje x , siempre coincide con ella.

15.3.3. Derivada de una suma.

Sean $u = f(x)$ $v = g(x)$ (1)

dos funciones de x continuas en el mismo intervalo $a \leq x \leq b$, y sea

$$y = u + v \quad (2)$$

la función suma. Si damos a x un incremento Δx , obtendremos en (1) los incrementos Δu y Δv y la (2) nos dará:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

que restándole (1) da:

350

y

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

y como por (1) es:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

es

$$y' = u' + v'$$

La derivada de una suma de un número finito de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de éstas.

Ejemplos: I)

$$y = x^4 + \sqrt[3]{x} + 7$$

$$y' = 4x^3 + \frac{1}{3\sqrt{x^2}}$$

$$\text{II)} \quad y = \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1} + t^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t^3}} = -\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} \right)$$

15.3.4 Derivada de un producto

Sea

$$y = u \cdot v$$

siendo

$$u = f(x)$$

y

$$v = g(x)$$

tendremos:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$y + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$y = uv$$

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v \quad 351$$

Si u y v son funciones continuas de x y poseen derivadas en el intervalo fijado, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, también $\Delta v \rightarrow 0$ y además

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = u'$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} = v'$$

luego es:

$$y' = uv' + u'v$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda por la derivada de la primera.

Ejemplo:

$$y = x^5 (x^3 - 7)$$

$$y' = x^5 \cdot 3x^2 + 5x^4 (x^3 - 7)$$

$$y' = 3x^7 + 5x^7 - 35x^4$$

$$y' = 8x^7 - 35x^4$$

15.3.5. Derivada de un cociente

Sean u y v dos funciones de x que poseen derivadas en el intervalo $a \leq x \leq b$. Si

$$y = \frac{u}{v}$$

tendremos

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

y será

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{uv + v \Delta u - uv - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v (v + \Delta v)}$$

y teniendo presente que el límite de un cociente es igual al cociente de los límites, será el límite del numerador, igual a:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} = v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} = vu' - uv'$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta v \rightarrow 0$$

y análogamente se tendrá en el denominador:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v (v + \Delta v) = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v) = v^2$$

$$\text{pues } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

por ser v una función de x , En consecuencia es

$$y' = \frac{v u' - u v'}{v^2}$$

La derivada de un cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador, menos, el numerador por la derivada del denominador, sobre el cuadrado del denominador,

Ejemplo:

$$y = \frac{x^2 - 16}{x^3 + 27}$$

$$y' = \frac{2x (x^3 + 27) - (x^2 - 16) \cdot 3x^2}{(x^3 + 27)^2}$$

$$y' = \frac{2x^4 + 54x - 3x^4 - 48x^2}{(x^3 + 27)^2}$$

$$y' = \frac{-x^4 + 48x^2 + 54x}{(x^3 + 27)^2}$$

15.3.6. Ejercicios.

$$1) y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{7}{3} x^3 + 5x^2 + 11x - 2$$

$$R : y' = x^3 - 7x^2 + 10x + 11$$

$$2) y = 9x^3 - 4x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{9}{x^3}$$

$$R: y' = 27x^2 - 8x + 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \frac{27}{x^4}$$

$$3) y = \frac{3}{4x^2} + \frac{7}{2x^3}$$

$$R: y' = -\frac{3}{2x^3} - \frac{21}{2x^4}$$

$$4) y = \frac{1}{\sqrt{2x}} + 15x^{4/3}$$

$$R: y' = \frac{-1}{(2x)^{3/2}} + 20x^{1/3}$$

$$5) S = (2t^2 - 3t + 4)(4t^3 + 3t + 2)$$

$$6) y = (2x^4 + 4x)(3x + 1)$$

$$7) y = \frac{2x + 7}{5x - 9}$$

$$R: y' = -\frac{53}{(5x - 9)^2}$$

$$8) y = \frac{3x^2}{4x + 1}$$

$$R: y' = \frac{6x(2x + 1)}{(4x + 1)^2}$$

$$9) y = \frac{3(x^3 - 27)}{4(x^3 + 8)}$$

$$R: y' = \frac{315x^2}{4(x^3 + 8)^2}$$

$$10) y = \frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x}}$$

$$R: y' = \frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2\sqrt{x^3}}$$

M.M.

Conf. 30.-

15.3.7. DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION.

Dada la función

$$y = (2x^5 - 6)^{5/3}$$

ella no es potencia de x sino una potencia de una función de x y no puede aplicarse a ella la regla de derivación para $y = x^u$

Sin embargo, si hacemos

$$u = 2x^5 - 6$$

se obtendrá

$$y = u^{5/3}$$

en donde y es una función de u , siendo a su vez u una función de x ; se dice en este caso que y es una función de función de x . En general, si

$$y = f(u) \quad \text{siendo } u = f(x)$$

deseamos calcular $\frac{dy}{dx}$. Si incrementamos a x en Δx , en ese

caso se obtendrá a u incrementada en Δu y a su vez a y en Δy . Si $\Delta x \rightarrow 0$, también lo hacen Δu ya que admitimos que u es función continua de x y suponemos que tiene derivadas respecto de x

En tal caso, resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

el cual es cierto para todo valor de Δu excepto para $\Delta u = 0$. Si $\Delta x \rightarrow 0$ se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta u \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

o sea

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } y = (x^2 + 1)^{4/3}$$

hacemos

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

y es

$$y = u^{4/3}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{4}{3} u^{4/3-1} = \frac{4}{3} u^{1/3}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot 2x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3} x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

15.3.8. Derivadas de las funciones inversas.

Dada la función $y = f(x)$ se llama inversa de ella a la función:

$$x = \varphi(y)$$

Al considerar el significado geométrico de la derivada en 15.1 se ha visto que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

nos daba la pendiente de la tangente geométrica con respecto al eje x . Si esta pendiente la tomamos con respecto al eje y , haciendo las mismas consideraciones que allí se hicieron tendríamos

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

pero

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$y \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta y \rightarrow 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad (1)$$

su función inversa es:

$$x = 2\sqrt{y} \quad (2)$$

pero en (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x \quad (3)$$

y en (2)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x^2}} = \frac{2}{x} \quad (4)$$

de (3) y (4) puede comprobarse que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{como se demostró.}$$

15.3.9.) Derivadas de orden superior.

Dada una función $y = f(x)$, por ejemplo, $y = x^5$, su derivada $y' = 5x^4$ es a su vez una función de x susceptible de volver a derivarse. Si tal cosa hacemos obtenemos

$$\frac{d}{dx} (y') = 20x^3$$

que se llama derivada segunda con respecto a x , y como podemos ver, es otra función de x que volviéndola a derivar obtenemos $60x^2$ que se llama derivada tercera y así sucesivamente.

La notación más usada es la siguiente:

$$\frac{d}{dx} (y) = \frac{dy}{dx} \quad \text{1a. derivada}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{2a. derivada}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{3a. derivada.}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y \right) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad n \text{ ésima derivada}$$

llamadas derivadas de orden superior. También se acostumbra a indicárlas así:

$$y' ; y'' ; y''' ; y^{(IV)} ; \dots ; y^{(n)} ; \dots$$

$$f'(x) ; f''(x) ; f'''(x) ; f^{(IV)}(x) ; \dots ; f^{(n)}(x) ; \dots$$

Ejemplo:

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$$

$$y''' = \frac{2 \cdot 3}{x^4} = 2 \cdot 3 x^{-4} = -3! x^{-4}$$

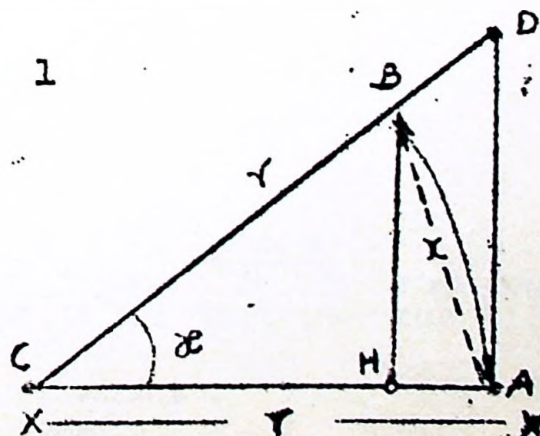
$$y^{(IV)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} = 2 \cdot 3 \cdot 4 x^{-5} = 4! x^{-5}$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$$

15.3.10. Derivadas de las funciones trigonométricas

a) Cálculo del Lim $\frac{\text{sen } x}{x} = 1$
 $x \rightarrow 0$



Consideremos el sector circular ABC y la tangente al círculo en A, así como la cuerda AB.

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BH$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \sin x \quad (1)$$

$$\text{Area sector ABC} = \frac{1}{2} r^2 x \quad (2)$$

siendo x el ángulo al centro, cuya medida es la del arco $\widehat{AB}$

$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle ACD &= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AD} \sin x = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AC} \cdot \text{tg} x \\ &= \frac{1}{2} r^2 \text{tg} x \quad (3) \end{aligned}$$

pero

$$\text{Area } \triangle ABC < \text{Area sector ABC} < \text{Area } \triangle ACD$$

o sea por

$$(1) \quad (2) \quad \text{y} \quad (3) : \frac{1}{2} r^2 \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2 \text{tg} x$$

que al dividir por $r^2 \geq 0$ no cambia el sentido de la desigualdad ó sea:

$$\sin x < x < \text{tg} x$$

y si $x < \frac{\pi}{2}$ es $\sin x > 0$, luego dividiendo por $\sin x$ se obtiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\text{tg} x}{\sin x}$$

o sea

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

pero sí

$$a > b \quad \circ \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

luego

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

como $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$$x \rightarrow 0$$

tomando límites en esa desigualdad, como $\frac{\sin x}{x}$ está contenida entre 1 y $\cos x < 1$ cuando $x \rightarrow 0$ los tres valores tienen el mismo límite, es decir, que el

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) Derivada del sen x

$$\text{Si } y = \text{sen } x$$

$$\text{es } y + \Delta y = \text{sen } (x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y = \text{sen } (x + \Delta x) - \text{sen } x$$

$$\text{ahora, como } \text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{ sen } \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

aplicándola aquí nos da:

$$\Delta y = 2 \text{ sen } \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}$$

$$\Delta y = 2 \text{ sen } \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \text{ sen } \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

o sea

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Sen } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

y tomando límites, como :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

resulta que

$$y' = \cos x$$

Ejemplo:

$$y = \text{sen } \left(\frac{3}{5} x + \frac{\pi}{4} \right)$$

haciendo

$$\frac{3}{5} x + \frac{\pi}{4} = u$$

se tiene

$$y = \text{sen } u$$

siendo y una función de función de x, y en consecuencia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cos \left(\frac{3}{5}x + \frac{\pi}{4} \right)$$

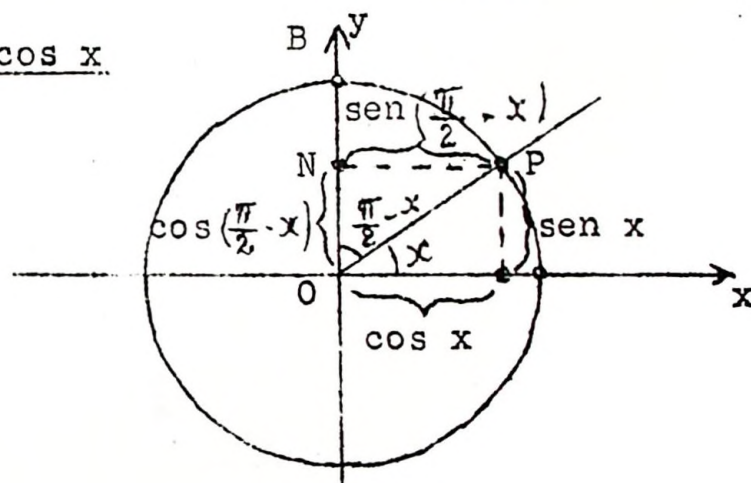
En general:

Si $y = \sin u$

es:

$$\frac{d}{dx} (\sin u) = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

c) Derivada del $\cos x$



Dada la función $y = \cos x$, si observamos las relaciones que hay en la circunferencia trigonométrica, podremos escribir:

$$\overline{OA} = \overline{NP}$$

o sea

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

siendo $\frac{\pi}{2} - x$ el ángulo complementario de x . Luego, es:

$$y = \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

cuya derivada se sabe calcular por 15.3.10 en efecto

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (\cos x) = \frac{d}{dx} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) \\ &= -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \end{aligned}$$

Pero $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \overline{ON} = \overline{MP} = \sin x$

luego es: $\boxed{\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x}$

y en general

si $y = \cos u$

es

$$y' = \operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = \cos^3 x$$

hacemos

$$u = \cos x$$

$\therefore$

$$y = u^3$$

y es;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 u^2 \cdot (-\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -3 \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x$$

d) Derivada de la tg x

Dada $y = \operatorname{tg} x$

es

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

que derivaremos como cociente y obtendremos:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

es decir:

$$y' = \sec^2 x$$

En general:

$$y' = \sec u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{4}$$

hacemos $u = \operatorname{tg} \frac{x}{4} \quad \therefore \quad y = u^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

es decir $\frac{dy}{dx} = \cancel{2u} \cdot \sec^2 \frac{x}{4} \cdot \cancel{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{4} \cdot \sec^2 \frac{x}{4}$$

e) Derivada de la cotg x.

Sea $y = \operatorname{cotg} x$

es $y = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x^{-1}$

y haciendo $u = \operatorname{tg} x$

es $y = u^{-1}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2} \sec^2 x = -\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

luego;

$$y' = -\operatorname{cosec}^2 x$$

y en general

$$y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = \cotg^3 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right)$$

hacemos

$$u = \cotg \left(\frac{t}{3} + \alpha \right)$$

$$\therefore y = u^3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cancel{3u^2} \cdot \left[-\operatorname{cosec}^2 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right) \right] \cdot \frac{1}{\cancel{3}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\cotg^2 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right) \cdot \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\cos^2 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right)}$$

$$y' = -\frac{\cos^2 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right)}{\operatorname{sen}^4 \left(\frac{t}{3} + \alpha \right)}$$

f) Derivada de la sec x.

Sea; $y = \sec x = \frac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x$

hacemos

$$u = \cos x$$

$$\therefore y = u^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = u^{-2} \cdot (-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x}$$

en general:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}}$$

Ejemplo:

$$y = \sec \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cdot (-1)$$

$$\boxed{y' = -\sec \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}$$

g) Derivada de la cosoc x

Sea $y = \operatorname{cosoc} x$

Como $\operatorname{cosoc} x = \frac{1}{\sin x} = \sin x^{-1}$

hacemos $u = \sin x$

Luego $y = u^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2} \cos x = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$y' = - \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$$

En general:

$$y' = - \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = \operatorname{cosec} x^3$$

$$y' = - \operatorname{cosec} x^3 \cdot \operatorname{cotg} x^3 \cdot 3x^2$$

$$y' = - 3x^2 \cdot \operatorname{cosec} x^3 \cdot \operatorname{cotg} x^3$$

1) Derivada de $y = \arcsen x$

Sea la función $y = \arcsen x$ que es la función inversa de $\sen x$.
 se tiene:

$$x = \sen y$$

Según el teorema de las funciones inversas (15.3.8) es:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

pero

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sen^2 y}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - x^2}}}$$

En general, si $y = \arcsen u$ y es $u = f(x)$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Ejemplo:

$$y = \arcsen \left(\frac{x^3}{3} \right)$$

$$y' = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{x^3}{3} \right)^2}} \cdot \frac{3x^2}{3}$$

$$y' = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \frac{x^6}{9}}} \cdot x^2$$

$$y' = \frac{3x^2}{\sqrt{9 - x^6}}$$

2) Derivada de $y = \arccos x$

Sea la función:

$$y = \arccos x$$

que es la función inversa de $\cos x$. Se tiene:

$$x = \cos y$$

Según el teorema de las funciones inversas (15.3.8) es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

pero

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\pm \sqrt{1 - x^2}}}$$

Si es $y = \arccos u$ y $u = f(x)$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\pm \sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Ejemplo:

$$y = \arccos \frac{2x - 3}{3}$$

$$y' = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{2x - 3}{3}\right)^2}} \cdot 2$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\frac{9 - 4x^2 - 9 + 18x}{9}}} = \frac{6}{\pm \sqrt{18x - 4x^2}}$$

3) Derivada de $y = \arctg x$

Sea la función

$$y = \arctg x$$

que es la función inversa de $\arctg x$ - ~~sechdepaepnes~~:

$$x = \operatorname{tg} y$$

y por el teorema de las funciones inversas (15.3.8) es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

pero

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Si $y = \arctg u$ siendo $u = f(x)$

es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Ejemplo

$$y = \arctg \sqrt{1 + x^2}$$

hacemos $u = \sqrt{1 + x^2} = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$y = \arctg u$$

por (15.3.7) es: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + (\sqrt{1 + x^2})^2} = \frac{1}{2 + x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$\frac{du}{dx} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

En forma análoga se demuestra:

$$4) \text{ Si } y = \operatorname{arc} \cotg x \quad \text{es} \quad y' = - \frac{1}{1+x^2}$$

$$5) \text{ Si } y = \operatorname{arc} \sec x \quad \text{es} \quad y' = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$6) \text{ Si } y = \operatorname{arc} \cos x \quad \text{es} \quad y' = \frac{-1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

15.3.11 Derivada de la función logarítmica

sea

$$y = \log_a x$$

será

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log x$$

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{\Delta x}{x}}$$

hacemos $t = \frac{x}{\Delta x} \therefore \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{t}$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

Si $\Delta x \longrightarrow 0 \therefore t \longrightarrow \infty$

luego $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{t \longrightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t$

$$\Delta x \longrightarrow 0 \quad t \longrightarrow \infty$$

siendo el logaritmo una función continua, se puede escribir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

pero $\lim_{t \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$

luego

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

En general

$$y' = \frac{1}{u} \cdot (\log_a e) \cdot \frac{du}{dx}$$

Si la base

$$a = e \therefore \log_e e = L e = 1$$

luego para

$$y = L(u)$$

$$\text{siendo } u = f(x)$$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo: I)

$$y = \log_{10}(x^2 + 9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \log_{10}^e \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 9} \cdot \log_{10}^e \cdot 2x$$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 9} \cdot \log_{10}^e$$

Ejemplo: II)

$$y = L \sqrt{1-x^2}$$

hacemos

$$u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = L(u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1-x^2}$$

Muchas veces el cálculo se simplifica utilizando el cálculo logarítmico; con solo tomar logaritmos de ambos miembros de una igualdad y aplicar luego esta derivada logarítmica; en efecto, por vía de ejemplo, sea la función

$$y = x^2$$

$$Ly = n Lx$$

tanto en el primero, como en el segundo miembro, tenemos la derivada de un logaritmo; bastará para ello aplicar la expresión (1) y tendremos:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot y \cdot \frac{1}{x}$$

y reemplazando a

$$y = x^n$$

es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n \cdot x^n}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

fórmula ya conocida para la derivada potencial

Ejemplo:

$$y = \frac{(3x^3 - 5)^5}{(x^2 - 9)^3}$$

$$Ly = 5 L(3x^3 - 5) - 3 L(x^2 - 9)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{9x^2}{3x^3 - 5} - 3 \cdot \frac{2x}{x^2 - 9}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^3 - 5)^5}{(x^2 - 9)^3} \left[\frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9} \right]$$

Muchas veces el cálculo se simplifica utilizando el cálculo logarítmico; con solo tomar logaritmos de ambos miembros de una igualdad y aplicar luego esta derivada logarítmica; en efecto, por vía de ejemplo, sea la función

$$y = x^2$$

$$Ly = n Lx$$

tanto en el primero, como en el segundo miembro, tenemos la derivada de un logaritmo; bastará para ello aplicar la expresión (1) y tendremos:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot y \cdot \frac{1}{x}$$

y reemplazando a

$$y = x^n$$

es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n \cdot x^n}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

fórmula ya conocida para la derivada potencial

Ejemplo:

$$y = \frac{(3x^3 - 5)^5}{(x^2 - 9)^3}$$

$$Ly = 5 L(3x^3 - 5) - 3 L(x^2 - 9)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{9x^2}{3x^3 - 5} - 3 \frac{2x}{x^2 - 9}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^3 - 5)^5}{(x^2 - 9)^3} \left[\frac{45x^2}{3x^3 - 5} - \frac{6x}{x^2 - 9} \right]$$

Sea $y = a^x$

siendo a una constante. Tomamos logaritmos neperianos de ambos miembros, y se tiene:

$$\ln y = x \ln a$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln a \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln(a)}$$

Si $y = a^u$
siendo $u = f(x)$

es
$$\boxed{\frac{d}{dx} (a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}}$$

Si $a = e$ base de los logaritmos neperianos, resulta
 $y = e^u$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplos: I) $y = e^{-x^2}$
 $y' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$$\boxed{y' = -2xe^{-x^2}}$$

II) $y = 10^{\sin x}$
 $y' = 10^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 10$

$$\boxed{y' = \cos x \cdot 10^{\sin x} \cdot \ln 10}$$

15.3.13 Derivada de la función $y = u^v$

Dada la función

$$y = u^v$$

siendo

$$u = f(x) \quad y \quad v = \varphi(x)$$

Ambas funciones de x ; tomamos logaritmos neperianos de ambos miembros y se tiene

$$\text{Ly} = v \cdot \text{Lu}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \text{Lu} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \text{Lu} \cdot \frac{dv}{dx} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot u^v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \text{Lu} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} (u^v) = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \text{Lu} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = x^{x^5}$$

en este caso

$$u = x \quad v = x^5$$

$$\frac{d}{dx} (x^{x^5}) = x^5 \cdot x^{(x^5)-1} \cdot 1 + x^{x^5} \cdot \text{Lx} \cdot 5x^4$$

$$\frac{d}{dx} (x^{x^5}) = x^{x^4} \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot x^{x^5} + 4 \cdot \text{Lx}$$

$$\frac{d}{dx} (x^{x^5}) = x^{x^4} + 4 \cdot 5 \cdot x^{x^5} + 4 \cdot \text{Lx}$$

15.3.14 Tabla de derivadas

- 1) $\frac{d}{dx} k = 0$ (derivada de una constante)
- 2) $\frac{d}{dx} (u + v) = u' + v'$ (derivada de una suma)
- 3) $\frac{d}{dx} (u \cdot v) = uv' + u' v$ (derivada de un producto)
- 4) $\frac{d}{dx} (k \cdot u) = k \cdot u'$ (derivada de una constante por una función)
- 5) $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u' v - uv'}{v^2}$ (derivada de un cociente)
- 6) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (derivada de función de función)
- 7) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (derivada de la función inversa)
- 8) $\frac{d}{dx} (u^n) = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$ (derivada de la función potencial)
- 9) $\frac{d}{dx} (\operatorname{sen} u) = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$
- 10) $\frac{d}{dx} (\cos u) = -\operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{dx}$
- 11) $\frac{d}{dx} (\operatorname{tg} u) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$
- 12) $\frac{d}{dx} (\operatorname{cotg} u) = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$
- 13) $\frac{d}{dx} (\sec u) = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot \frac{du}{dx}$
- 14) $\frac{d}{dx} (\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u \cdot \frac{du}{dx}$

$$15) \frac{d}{dx} (\arcsen u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$16) \frac{d}{dx} (\arccos u) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$17) \frac{d}{dx} (\arctg u) = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$18) \frac{d}{dx} (\operatorname{arccotg} u) = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$19) \frac{d}{dx} (\operatorname{arcsec} u) = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$20) \frac{d}{dx} (\operatorname{arccosec} u) = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$21) \frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \log_a e$$

$$22) \frac{d}{dx} (L u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$23) \frac{d}{dx} (a^u) = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot L a$$

$$24) \frac{d}{dx} (e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

15.3.15 Ejercicios sobre derivadas

Resolver los siguientes ejercicios utilizando las reglas de derivación demostradas anteriormente.

1) Derivadas de función de función

Si $y = f(u)$ siendo $u = \varphi(x)$

es

$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$1) y = (3x + 4)^{5/2}$$

$$y' = \frac{15}{2} (3x + 4)^{3/2}$$

$$2) y = (x^2 + 2x + 5)^{-3/5}$$

$$y' = \frac{3}{4} x^{-7/4} + 2x^{-2/3}$$

$$3) S = t^3 (t^2 + 1)^{3/2}$$

$$y' = 3t^2 (2t^2 + 1) t^2 + 1$$

$$4) y = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x}$$

$$y' = \frac{18}{4x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$$

$$5) y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$y' = \frac{18}{(x^2 - 9)^{3/2}}$$

2) Derivadas de orden superior

$$1) \text{ Calcular la } \frac{d^5 y}{dx^5} \text{ de } y = x^5 + 3x^3 - x$$

$$2) \text{ Calcular la } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ de } y = \sqrt{\frac{R}{x^2 - 4}} \quad R = 5$$

$$R = \frac{4}{(x^2 - 4)^{3/2}}$$

$$3) \text{ Idem de } S = \frac{\sqrt{3t + 4}}{t}$$

$$R = \frac{3t^2 + 16}{t^4}$$

3) Derivadas de las funciones trigonométricas

a) funciones directas

$$y = \sin x \quad y' = \cos x \quad y = \operatorname{cosec} x \quad y' = -\operatorname{cosec} x \cotg x$$

$$y = \cos x \quad y' = -\sin x \quad y = \sec x \quad y' = \sec x \tg x$$

$$y = \tg x \quad y' = \sec^2 x \quad y = \cotg x \quad y' = -\operatorname{cosec}^2 x$$

- 1) $y = \sin \varphi x$ $y' = 4 \cos 4x$
- 2) $y = \operatorname{tg} (3x^2)$ $y' = 6x \sec^2 (3x^2)$
- 3) $y = \sec \left(\frac{x}{2} \right)$ $y' = \frac{1}{2} \sec \left(\frac{x}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$
- 4) $y = \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ $y' = -\frac{1}{2} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
- 5) $y = \operatorname{cosec} x^3$ $y' = 3x^2 \operatorname{cosec} x^3 \cotg x^3$
- 6) $y = \operatorname{tg}^4 3 \varphi$ $y' = \frac{12 \sin^3 3 \varphi}{\cos^5 3 \varphi}$
- 7) $y = \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi$ $y' = \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi + \sin \varphi$
- 8) $y = \frac{\sin 3x}{1 + \sin 3x}$ $y' = \frac{3 \cos 3x}{(1 + \sin 3x)^2}$
- 9) $y = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ $y' = -\frac{2 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2}$
- 10) $y = \sqrt{\frac{\operatorname{cosec} x + \cotg x}{\operatorname{cosec} x - \cotg x}}$ $y' = -\operatorname{cosec} x (\cotg x + \operatorname{cosec} x)$

b) funciones inversas

- | | |
|---|-----------------------------------|
| $y = \arcsin x$ | $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = \arccos x$ | $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = \operatorname{arctg} x$ | $y' = \frac{1}{1+u^2}$ |
| $y = \operatorname{arc} \cotg x$ | $y' = -\frac{1}{1+u^2}$ |
| $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$ | $y' = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$ |
| $y = \operatorname{arc} \sec x$ | $y' = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$ |

$$1) y = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$2) y = \arccos\left(\frac{3x}{4}\right)$$

$$y' = -\frac{3}{\sqrt{16 - 9x^2}}$$

$$3) y = \arctg(x^2)$$

$$y' = \frac{2x}{1 + x^4}$$

$$4) y = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{x}{3}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{x} (3+x)}$$

$$5) y = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$6) y = \operatorname{arccosec}(x^3)$$

$$y' = -\frac{3}{x \sqrt{x^6 - 1}}$$

$$7) y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{3x^2 - x^4 - 2}}$$

$$8) y = \arctg\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$$

$$y' = \frac{2}{1 + x^2}$$

$$9) y = \arcsin \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$$

$$y' = \frac{6}{9 + x^2}$$

$$10) y = 2\sqrt{x} - 2 \arctg \sqrt{x} \quad y' = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

4) Derivadas logarítmicas

$$y = \operatorname{Ln} u$$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = \log_a u$$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \operatorname{Log}_a e \cdot \frac{du}{dx}$$

$$1) y = \operatorname{Ln}(x^3 - 9)$$

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 - 9}$$

$$2) y = L (5x+1)^3$$

$$y' = \frac{15}{5x+1}$$

$$3) y = L \sqrt{x^2 + 16}$$

$$y' = \frac{x}{x^2 + 16}$$

$$4) y = L \operatorname{cosec}^2 x$$

$$y' = -2 \cotg x$$

$$5) y = \frac{\log_{10} x}{x}$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \log_{10} \frac{a}{x}$$

5) Derivadas de las funciones exponenciales

$$y = a^u$$

$$y' = a^u \cdot La \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \frac{du}{dx}$$

$$1) y = e^{3x}$$

$$y' = 3e^{3x}$$

$$2) y = e^{\operatorname{tg} x}$$

$$y' = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$$

$$3) y = e^{\log x}$$

$$y' = e^{\log x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$4) y = 2^{3x}$$

$$y' = 3 \cdot 2^{3x} \cdot L2$$

$$5) y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} e^{2x}$$

$$y' = \frac{2 \cdot e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}$$

6) Derivada de $y = u^v$

$$y = u^v$$

$$y' = v \cdot u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \cdot Lu \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$1) y = x^{3x}$$

$$y' = 3x^{3x} (1 + Lx)$$

$$2) \quad y = (Lx)^x$$

$$3) \quad y = x^{x^x}$$

$$4) \quad y = x^{\frac{1}{Lx}}$$

$$5) \quad y = x^{x^2}$$

$$y' = \left[1 + (Lx) \cdot L(Lx) \right] (Lx)^{x-1}$$

$$y' = x(x^x + x) \left[\frac{1}{x} + Lx + L^2 x \right]$$

$$y' = 0$$

$$y' = x(x^2 + 1) \cdot \left[1 + 2Lx \right]$$

M.m
XXXI

