

CURSO DE

MATEMATICAS PARA MUESTRISTAS

Prof. Ing. Pedro Dominguez

Pedro DURAN agosto - diciembre 1955

REPUBLICA



ARGENTINA

SERVICIO ESTADISTICO NACIONAL

CURSO DE

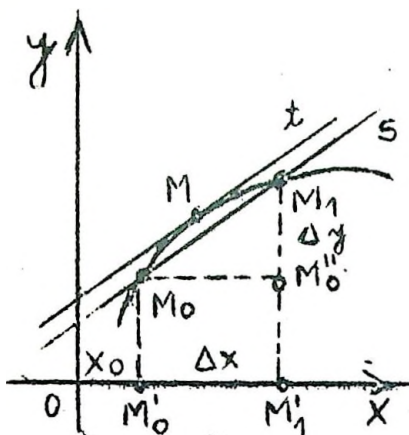
MATEMATICAS PARA MUESTRISTAS

Profesor: Ing. PEDRO DOMINGUEZ

TERCER TOMO

agosto - diciembre 1955

16.- DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES



16.1.- Teorema del incremento finito o del Valor Medio.

Sea la función $y = f(x)$ representada por la curva c y tomemos dos puntos M_0 y M_1 sobre ella. El coeficiente angular de la recta $s \equiv \overline{M_0 M_1}$ es:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Existe entre M_0 y M_1 un punto intermedio M de la curva tal que la tangente en M es paralela a $\overline{M_0 M_1}$; la abscisa de ese punto puede representarse por

$$x_0 + \xi \Delta x$$

estando

$$0 < \xi < 1$$

La tangente en M a la curva tiene por coeficiente angular a

$$f'(x_0 + \xi \Delta x)$$

y como ella es paralela a $\overline{M_0 M_1}$, resultan ser iguales los coeficientes angulares de la cuerda s y la tangente t , es decir que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \xi \Delta x)$$

o bien

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0 + \xi \Delta x)$$

para

$$0 < \xi < 1$$

Es esta relación la que expresa el teorema del incremento finito o del valor medio, que dice:

Si $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo

$x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$, y tiene derivadas para cualquier valor de x entre

$x = x_0$ y $x = x_0 + \Delta x$ existe entonces un valor $\xi \Delta x$ de x , entre x_0 y

$x_0 + \Delta x$ para el cual es

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0 + \xi \Delta x)$$

en donde

$$x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$$

16.2.- Teorema de Rolle.

MICHEL ROLLE (1652-1719, francés), contemporáneo del marqués de l'HÔPITAL, es conocido en la historia de la Matemática por este teorema que lleva su nombre; además se ocupó especialmente de la resolución de ecuaciones y en una transformación lineal de las mismas obtuvo una serie de polinomios de grado decreciente, que él denominó cascadas y que no son sino las actuales derivadas sucesivas de la ecuación. Utilizó estas cascadas para determinar un límite superior de las raíces, así como para enunciar el teorema que lleva su nombre y que él aplicó, como actualmente, a la separación de las raíces reales de una ecuación.

El teorema de Rolle dice:

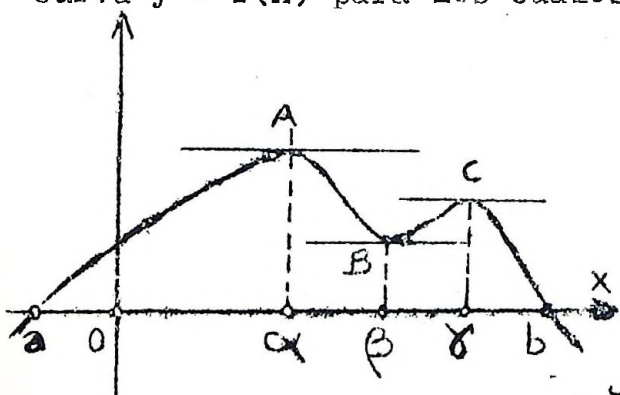
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y tiene derivadas en todos los puntos del intervalo de x entre a y b es decir, para $a < x < b$, entonces, si $f(a) = f(b) = 0$, existe un valor, ξ comprendido entre a y b , tal que en él es $f'(\xi) = 0$.

Si $f(a) = f(b) = 0$

entonces a y b son las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ y tales raíces se hallan gráficamente buscando los puntos de intersección de la curva $y = f(x)$ con el eje de las x . Para resolver la ecuación $f'(x) = 0$ no hay más que buscar las abscisas de los puntos de la curva $y = f(x)$ para los cuales el coeficiente angular de la tangente

es nulo, es decir, en donde la tangente es paralela al eje de las x .

En el gráfico adjunto, se observa que entre los puntos a y b de encuentro de la curva con el eje de abscisas, existirá siempre al menos un punto, por razón de la continuidad de la curva, para el cual la tangente es paralela al eje x ; y si existe más de uno, éstos serán en número impar. Supongamos que ese punto tenga por abscisa ξ , será entonces:



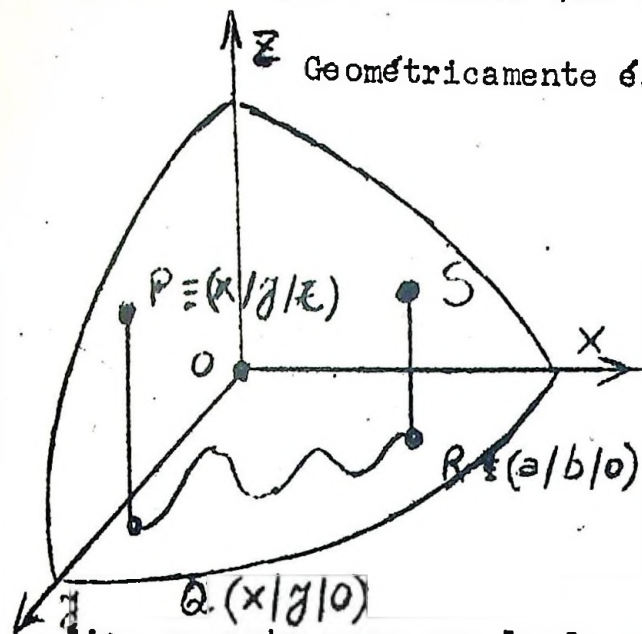
$$f'(\xi) = 0$$

Para que esto resulte cierto, es necesario que $f(x)$ sea continua en el intervalo (a, b) y además no sea infinita en él.

16.3.- Derivadas parciales - Límite de una función de más de una variable.

El concepto de límite de una función de una variable puede extenderse al caso del límite de una función de dos o más variables. En efecto, diremos que el límite de $f(xy)$ es l cuando $x \rightarrow a$; $y \rightarrow b$, si la diferencia entre l y $f(xy)$ puede hacerse numéricamente tan pequeña como se desee con tal de tomar a x suficientemente próximo a a y a y

suficientemente próximo a b . Hacemos notar que nada se dice cuando $x = a$ e $y = b$, pues puede ocurrir que tal límite no exista en este caso.



Geométricamente esto significa que la coordenada $Z = \overline{QP}$ del punto $P = (x/y/z)$ de la superficie $z = f(xy)$, tiende a la longitud $l = \overline{RS}$ como límite, cuando el punto $Q = (x/y/0)$ tiende al punto $R = (a/b/0)$ por un camino cualquiera en el plano xy . El punto S puede o no pertenecer a la superficie. Si S es un punto de la superficie, entonces $l = f(a/b)$ y en la función $z = f(xy)$ se cumple que:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x/y) = f(a/b)$$

$$x \rightarrow a$$

$$y \rightarrow b$$

se dice en este caso que la función $z = f(x/y)$ es continua en el punto (a/b) .

Si $f(xy)$ es continua para cada punto de un recinto del plano (xy) , se dice que es continua en esa región.

Definición: El límite de la función $f(xy)$ cuando $x \rightarrow a$ e $y \rightarrow b$, es l , si dado $\epsilon > 0$ tan pequeño como se desee, existe un número $\delta > 0$ tal que es

$$|f(xy) - l| < \epsilon$$

si para todo valor de $x \neq a$ e $y \neq b$ es:

$$|x - a| < \delta \quad |y - b| < \delta$$

Sea $z = f(xy)$

una función de dos variables. Si suponemos que y permanece fija, la función z se transforma en una función de la otra variable x solamente, y su derivada, si existe, puede hallarse, como ya se hizo anteriormente; se obtiene así la derivada parcial de z con respecto a x , y se la indica así

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

los:

Por lo general se emplean también los siguientes símbolos:

$$f'_x(xy); f''_x; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; z_x$$

Tendremos así, que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Si ahora es x la que permanece fija, la función $f(xy)$ se transforma en una función de la variable y únicamente, y obtendremos su derivada, si existe, de z con respecto a y , indicándola así:

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

o bien: $f_y(xy); f_y; \frac{\partial f}{\partial y}; z_y$

De modo que tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(xy)}{\Delta y}$$

Ejemplo I: Hallar las $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función
 $z = 3x^3y + x^2y^2 + 7y^4$

Es haciendo y constante:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2y + 2xy^2$$

y dejando x constante:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 + 2x^2y + 28y^3$$

Ejemplo II: Si $u = \sin(2x + 3y) + \cos(y - 2z)$

calcular $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}$

Haciendo y, z constantes se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cos(2x + 3y)$$

Haciendo x y z constantes, es:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3 \cos(2x + 3y) - \sin(y - 2z)$$

Haciendo x e y constantes, es:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2 \sin(y - 2x)$$

16.4.- Interpretación Geométrica.

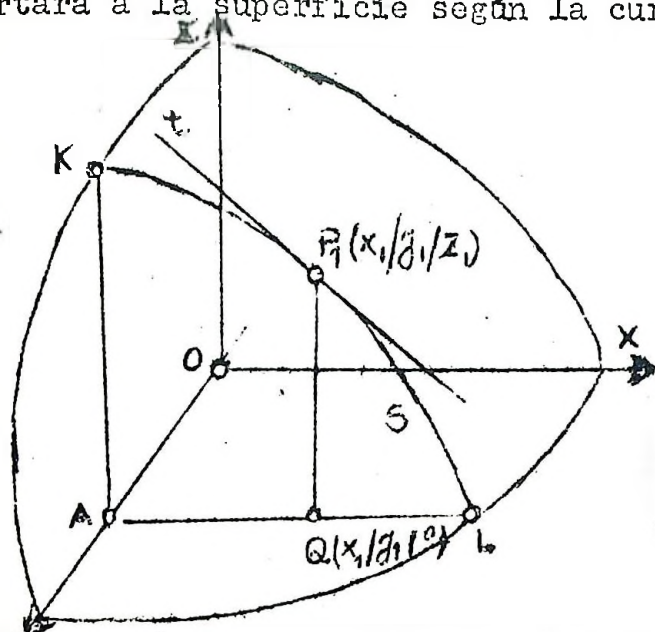
Supongamos que la función

$$z = f(xy)$$

está representada por la superficie de la figura. Sea $P_1(x_1/y_1/z_1)$ un punto de esta superficie. Cortemos la superficie con un plano $y = y_1$ que cortará a la superficie según la curva s ; en este plano es z función de x únicamente, de modo que la pendiente de la tangente t en cualquier punto de la curva s , es la derivada de z con respecto a x en este punto. En consecuencia es

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_1}$$

$$y = y_1$$



la pendiente de la recta tangente t en el punto $P_1(x_1/y_1/z_1)$. En general, $\frac{\partial z}{\partial x}$ es la pendiente de la tangente a la curva sección de la superficie $z = f(xy)$ por un plano paralelo al coordenado yz .

Análogamente, es $\frac{\partial z}{\partial y}$ la pendiente de la tangente a la curva sección por un plano paralelo al xz .

16.5.- Ejercicios

Encontrar las derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones :

1) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

2) $z = \log(x^3 + y^2)$

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + y^2} ; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^3 + y^2}$

3) $u = e^{x^2 + 3t}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x e^{x^2 + 3t} ; \frac{\partial u}{\partial t} = 3 e^{x^2 + 3t}$

4) $u = 10^{x^2 + xy + z^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x + y)10^{x^2 + xy + z^2} \cdot \log 10$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot 10^{x^2 + xy + z^2} \cdot \log 10$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cdot 10^{x^2 + xy + z^2} \cdot \log 10$$

5) $w = x \sin y + y \sec x$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sin y + y \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x \cos y + \sec x$$

6) $x = (s^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 3s(s^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -3t(s^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

7) $v = xyz + x^2y - xz^3 + y^4$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = yz + 2xy - z^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xz + x^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = xy - 3xz^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x + y)10^{x^2 + xy + z^2} \cdot \log 10$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot 10^{x^2 + xy + z^2} \cdot \log 10$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cdot 10^{x^2 + xy + z^2} \cdot \log 10$$

5) $w = x \operatorname{sen} y + y \sec x$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \operatorname{sen} y + y \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x \cos y + \sec x$$

6) $x = (s^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -3t(s^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 3s(s^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}$$

7) $v = xyz + x^2y - x^3 + y^4$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = yz + 2xy - 3x^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xz + x^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = xy - 3xz^2$$

8) $z = x e^{\operatorname{sen} y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\operatorname{sen} y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \cos y \cdot e^{\operatorname{sen} y}$$

$$9) \quad z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$10) \quad u = \frac{y}{e^x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{x}{y}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}$$

$$11) \quad z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$12) \quad z = \log(y + \sqrt{y^2 - x^2})$$

$$13) \quad z = \arcsin\left(\frac{xy}{x-y}\right)$$

$$14) \quad z = \arctan \frac{x-y}{x}$$

$$15) \quad z = e^{-\frac{x}{y}} + \log \frac{y}{x}$$

$$16) \quad z = e^{\frac{y}{x}} \cdot \sin \frac{y}{x}$$

$$17) \quad z = y^2 + \arctan(y \cdot e^{\frac{y}{x}})$$

$$18) \quad z = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot e^{(x^2 + y^2)}$$

$$19) \quad z = \sqrt{y^2 - x^2} \cdot \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$20) \quad z = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$$

16/6.- Derivadas Parciales de Orden Superior.

Si $z = f(xy)$
 es claro que $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$ son, en general, funciones de x y de y. Deriva

do nuevamente con respecto a x da:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

la segunda derivada parcial de z con respecto a x . Aquí el símbolo

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

significa derivada parcial con respecto a x . Esto mismo se indica con los siguientes símbolos:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(xy) = f_{xx} = z_{xx}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(xy) = f_{yy} = z_{yy}$$

Derivando $\frac{\partial z}{\partial x}$ parcialmente con respecto a y obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}(xy) = f_{xy} = z_{xy}$$

la derivada parcial segunda con respecto a x e y .

Si derivamos a $\frac{\partial z}{\partial y}$ con respecto a x , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}(xy) = f_{yx} = z_{yx}$$

la derivada parcial segunda con respecto a y y x .

Lema de Ossian Bonnet: Se demuestra en los cursos más avanzados que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

es indiferente el orden de derivación, si las derivadas primeras son continuas. Análogamente es:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

En general, $\frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h \partial y^k}$

indica el resultado obtenido derivando a z con respecto a x , h veces y k veces, con respecto a y , siendo indiferente el orden de la derivación.

Ejemplo I: Verificar que $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si

$$z = \sin(2x + 3y)$$

Tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cos(2x + 3y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6 \sin(2x + 3y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \cos(2x + 3y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6 \sin(2x + 3y)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Ejemplo II: Hallar la $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2}$ si $u = x^2 y z^3 + z^6$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2 y z^2 + 6z^5$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6x^2 y z + 30z^4$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = 6x^2 z$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2} = 12xz$$

16.7.- Ejercicios

Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ de las siguientes funciones:

1) $z = x^3 y^2 + y^5$

2) $z = x \operatorname{sen} y$

3) $z = \operatorname{sen} 3x \cos 2y$

4) $z = e^{x+y^2}$

5) $z = \log \sqrt{x^3 + y^4}$

6) Verificar que $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en $z = \frac{x+y}{x-y}$

7) Iden en $z = x^3 y + y^4$

8) Verificar que $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ en $z = e^{xy}$

9) Verificar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ cuando:
 $z = xy^2 + 2ye^{\frac{1}{x}}$

10) Iden en $z = \log(x + \sqrt{y^2 + x^2})$

11) Iden en $z = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$

12) Iden en $z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$

13) Si $z = e^y \operatorname{sen}(x-y)$ hallar $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

14) Si $z = \log(x^2 + y^2)$, demostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

15) Si $z = \operatorname{tg}(y + 5x) + (y - 5x)^{\frac{3}{2}}$, demostrar que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 5^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

16,8.- Formas determinadas

Se llama forma indeterminada a la forma que toma una función de una variable; cuando ésta tiende a un valor a, y da un valor que no tiene sentido. En caso contrario, se dice que la función es determinada.

a) Formas determinadas:

Son bien determinadas las expresiones de la forma:

$$\frac{0}{N}; \frac{N}{0}; \frac{\infty}{N}; \frac{N}{\infty}$$

siendo N un número cualquiera, pero finito. También lo son, las siguientes expresiones.

$$0^N; \infty^N; \infty^{\infty}; 0^{\infty}$$

siendo $N \geq 0$, finito y distinto de cero.

1) FORMA $\frac{0}{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

2) FORMA $\frac{N}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = \frac{2}{0} \rightarrow \infty$$

3) FORMA $\frac{\infty}{N}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

4) FORMA $\frac{N}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\infty} = 0$$

5) FORMA 0^N

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 = 0$$

6) FORMA ∞^N

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty^3 = \infty$$

7) FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

cuando $f(x)$ y $g(x)$ crecen indefinidamente.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{x-2} \right)^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}} = \infty^{\infty} = \infty$$

$$x \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^x = \infty^{\infty} = \infty$$

$$x \rightarrow \infty$$

8) FORMA $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2-9})^{\frac{1}{x-3}} = 0^{\infty} = 0$$

$$x \rightarrow 3$$

Si $N < 0$ las formas:

$$0^N \quad \text{y} \quad \infty^N$$

se transforman en :

$$0^N \rightarrow \infty ; \quad \infty^N \rightarrow 0$$

Además en las formas ∞^{∞} y 0^{∞} , si los exponentes son infinitamente grandes pero negativos, se obtienen las formas inversas:

$$\infty^{-\infty} \rightarrow 0 ; \quad 0^{-\infty} \rightarrow \infty$$

b) Formas indeterminadas

Las formas indeterminadas son las siguientes:

$$\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; 0 \cdot \infty ; \infty - \infty ; \infty^0 ; 0^0 ; 1^{\infty}$$

1) FORMA $\frac{0}{0}$: Sea el cociente de dos polinomios enteros $f(x)$ y $\varphi(x)$, que se anulan para $x = a$, entonces el cociente tendrá por límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0}$$

un valor indeterminado. Sin embargo, es posible hallar el verdadero valor de este límite, pues si $f(x)$ y $\varphi(x)$ se anulan para $x = a$, ellos son divisibles por $x-a$, luego tendremos que:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)\varphi_1(x)} = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

y puede ocurrir que el

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = k$$

sea un valor determinado.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{0}{0}$

pero $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}$

y $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{5}$

Sea $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ el cociente de dos funciones trigonométricas que se anulan para $x = a$, en cuyo caso, ese cociente tiende a un valor indeterminado. Como en el caso anterior es posible hallar su verdadero valor de ese límite, como lo muestra el siguiente:

Ejemplo: $\lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \omega}{1 - 2 \cos \omega} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{1 - 2 \cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{1 - 2 \cdot 0} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \frac{\pi}{3} \sin (\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{0}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{0}{0}$$

expresión que es indeterminada. Sin embargo:

$$1 - 2 \cos(\omega) = 2(\frac{1}{2} - \cos(\omega)) = 2(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \omega) = -2 \cdot 2 \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\omega}{2}) \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{2})$$

Además:

$$\sin(\omega) - \sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{6}) \cos(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{6})$$

que reemplazado en la expresión propuesta nos da:

$$\frac{\sin(\omega) \cdot \sin(\omega - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos(\omega)} = \frac{2 \sin(\frac{\omega}{2}) \sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{6}) \cos(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{6})}{4 \sin(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{6}) \sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{6})}$$

y simplificando el factor $2 \sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{6})$, nos queda

$$= \frac{\sin(\omega) \cdot \cos(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{6})}{2 \sin(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{6})}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \omega \cdot \sin(\omega - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos(\omega)} = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \omega \cdot \cos(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{6})}{2 \sin(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{6})} =$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos 0}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$$

que es el verdadero valor de expresión dada.

2) FORMA $\frac{\infty}{\infty}$: Consideremos la fracción racional

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}$$

donde $f(x)$ y $\psi(x)$ son dos polinomios enteros de la forma:

donde $f(x)$ y $\varphi(x)$ son dos polinomios enteros de la forma:

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

$$\varphi(x) = B_p x^p + B_{p-1} x^{p-1} + \dots + B_1 x + B_0$$

cuando $x \rightarrow \infty$ también lo hace $f(x)$ y $\varphi(x)$ y el cociente tiende a la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Busquemos cual es el verdadero valor.

Si $x \rightarrow \infty$, los primeros términos: $A_n x^n$ y $B_p x^p$ son los determinantes del valor de $f(x)$ y $\varphi(x)$ respectivamente, de modo que puede reducirse el problema a tomar límites de:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_n x^n}{B_p x^p}$$

$$x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty$$

Pueden presentarse tres casos, a saber:

1er. Caso:

$$n > p$$

la fracción
$$\frac{A_n x^n}{B_p x^p} = \frac{A_n}{B_p} x^{n-p}$$

en donde $n - p > 0$

luego
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_n x^n}{B_p x^p} = \infty$$

$$x \rightarrow \infty$$

2do. Caso: $n = p$

La fracción
$$\frac{A_n x^n}{B_p x^p} = \frac{A_n}{B_p}$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_n x^n}{B_p x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_p} = \frac{A_n}{B_p}$ (constante)

$$x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty$$

3er. Caso: $n < p$

$$\therefore \frac{A_n x^n}{B_p x^p} = \frac{A_n}{B_p} x^{n-p} = \frac{A_n}{B_p} \cdot \frac{1}{x^{p-n}}$$

pués $n-p < 0$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_n x^n}{B_p x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_p} \cdot \frac{1}{x^{p-n}} = 0$$

3) FORMA $\infty - \infty$: Es frecuente que se presente el problema de calcular el límite de $f(x) - \varphi(x)$ cuando ambas expresiones crecen indefinidamente, para $x \rightarrow \infty$, sobre todo si se trata de radicales. El método, para hallar el verdadero valor, consiste en poner la expresión bajo forma de cociente, multiplicándola y dividiéndola por la expresión conjugada

Ejemplo I: Calcular el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) = \infty - \infty$$

pero

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

Ejemplo II: Calcular el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} - x\sqrt{2} \right) = \infty - \infty$$

$$x \rightarrow \infty$$

pero

$$x \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} - x\sqrt{2} = x \left(\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{2} \right) = x \cdot \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x-1)}}$$

$$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1} (\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x-1)})} =$$

Cuando x crece indefinidamente, los términos de más alto grado determinan su valor, de esta manera, la expresión anterior se reduce a:

$$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x-1)} + \sqrt{2(x-1)^2}} =$$

$$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{2(x-1)^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}} - x \sqrt{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{2x} + \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{2}} =$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

que es el verdadero valor de ese límite

Las otras formas indeterminadas serán resueltas más fácilmente con la :

16.º.- Regla de L'Hôpital.

El nombre de Guillaume François Antoine L'Hôpital Marqués de Saint Mème (1661-1704) está ligado íntimamente al del sabio matemático, físico y naturalista Johann Bernoulli (1667-1748). En efecto, L'Hôpital fue durante mucho tiempo el único que estuvo en condiciones de resolver los problemas que proponían Leibniz y los miembros de la familia Bernoulli para los geómetras de su época. El hallazgo reciente de la correspondencia de Bernoulli con L'Hôpital, y los apuntes de las lecciones de Bernoulli, muestran que el libro publicado por L'Hôpital en 1696 y 1716 no eran más que las lecciones que Bernoulli le impartiera a L'Hôpital, a pedido de éste. Las lecciones de Cálculo integral impartidas a L'Hôpital durante los años 1691 a 1692, serían el primer tratado sistemático sobre este asunto. Estas lecciones con el título de ANALYSE, contienen por primera vez la célebre regla, hoy designada como primera vez la célebre regla, hoy designada como "Regla de L'Hôpital", para el cálculo de límites indeterminados y cuya paternidad reclamó Bernoulli después de la muerte del Marqués, que fue su alumno.

REGLA: Si una expresión $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ para $x \rightarrow a$, para hallar su verdadero valor, se toma el límite de sus derivadas para $x \rightarrow a$.

$$1) \text{ Supongamos que } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{0}{0}$$

Pongamos

$$x = a + \Delta x \quad \text{si } \Delta x \rightarrow 0 \quad \therefore x \rightarrow a$$

luego

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a+\Delta x)}{\varphi(a+\Delta x)}$$

de acuerdo con el teorema del incremento finito o del valor medio (16,1) podrá escribirse:

$$\frac{f(a+\Delta x)}{\varphi(a+\Delta x)} = \frac{f(a) + \Delta x f'(a + \xi \Delta x)}{\varphi(a) + \Delta x \varphi'(a + \xi \Delta x)}$$

para $0 < \xi < 1$

pués $f(a+\Delta x) - f(a) = \Delta x \cdot f'(a + \xi \Delta x)$

y análogamente con $\varphi(a+\Delta x)$.

como

$$f(a) = \varphi(a) = 0$$

para

$$x \rightarrow a$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(a + \xi \Delta x)}{\varphi'(a + \xi \Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

luego es:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}}$$

Si el límite de las derivadas primeras no fuese determinado, se toma el de las segundas, terceras, etc., si éstos existen hasta obtener expresiones determinadas, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \dots$$

Ejemplo I:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{2x + 1} = \frac{1}{5}$$

valor ya hallado en (16.8)b)1).

Ejemplo II:

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \omega \cos(\omega - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos \omega}$$

$$\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Obtiene: Calculando las derivadas del numerador y denominador, se

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \omega + \sin (\omega - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos \omega} = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos \omega \sin (\omega - \frac{\pi}{3}) + \cos (\omega - \frac{\pi}{3}) \sin \omega}{2 \sin \omega}$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{3} \sin 0 + \cos 0 \sin \frac{\pi}{3}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{0 + 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$$

valor ya hallado en (16.8) b) 1).-

2) Supongamos que el

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Se puede escribir que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}{\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{[f(x)]^2}{[\varphi(x)]^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right]^2$$

Dividiendo el primero y último miembro por:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

es:

$$1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

o sea

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}} = \frac{1}{\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

Es decir, que finalmente, se obtiene:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}}$$

Ejemplo I)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Ejemplo II)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Con la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$x \longrightarrow \infty \quad x \longrightarrow \infty$$

volvemos aplicar la misma regla:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$x \longrightarrow \infty \quad x \longrightarrow \infty$$

Ejemplo III:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + x - 1}{3x^3 + 2x + 7} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$x \longrightarrow \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 8x + 1}{9x^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$x \longrightarrow \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 8}{18x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$x \longrightarrow \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$x \longrightarrow \infty$$

OBSERVACION: Hay casos que pueden inducir, de primera intención, a aplicar la regla de l'Hôpital dando resultados erróneos, tal es el siguiente:

Ejemplo IV:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x}$$

aparentemente es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, pero si bien es cierto que $x \rightarrow \infty$ en cambio $\text{sen } x$ no tiende a infinito, en consecuencia, no toma $x \rightarrow \infty$ la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y no es aplicable la regla. Hay que tener cuidado en los casos en los cuales se presentan funciones periódicas u oscilantes.

En este caso:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x} \neq \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen } x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$$

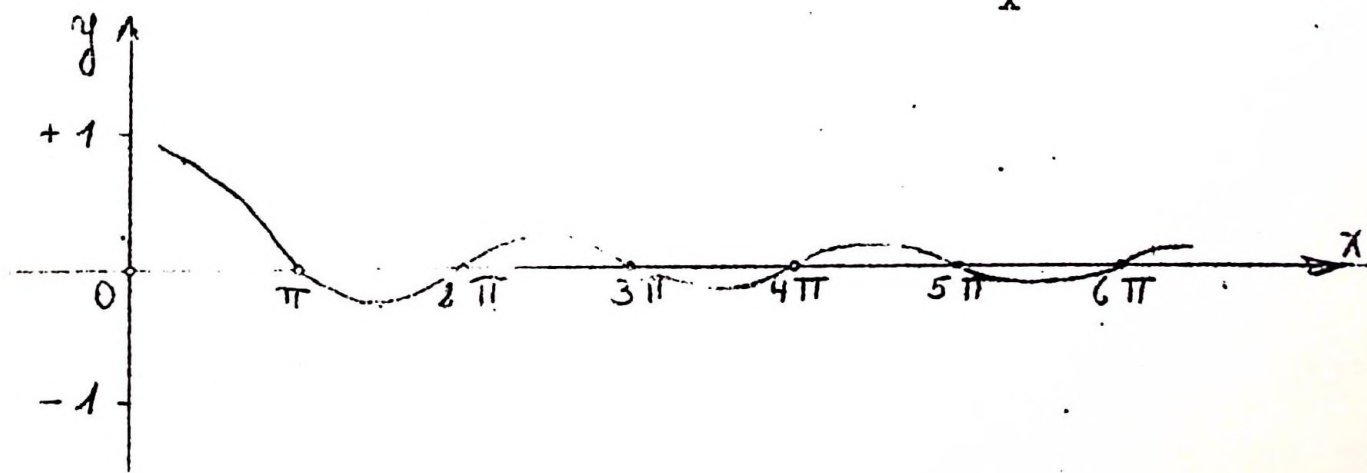
pues el numerador oscila infinitas veces entre $+1$ y -1 , es decir, que:

$$-1 \leq \text{sen } x \leq +1$$

y

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq +\frac{1}{x}$$

Observemos la curva representativa de $y = \frac{\text{sen } x}{x}$



se ve que para $x \rightarrow \infty$ tiende $\frac{\text{sen } x}{x} \rightarrow 0$

En efecto, dado que al aumentar infinitamente x , los límites de:

$$-\frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad + \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

también ocurrirá con $\frac{\sin x}{x}$ comprendido entre ellos.

En símbolos:

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(+\frac{1}{x} \right) = 0$$

$\therefore$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
--

3) FORMA $0 \cdot \infty$:

Sea el producto $f(x) \cdot \psi(x)$ para $f(x) \rightarrow 0$ y $\psi(x) \rightarrow \infty$, da la forma indeterminada $0 \cdot \infty$.
Se podrá escribir así:

$$f(x) \cdot \psi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} \rightarrow \frac{0}{0}$$

o bien

$$f(x) \cdot \psi(x) = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

en cualquiera de los dos casos es aplicable la regla de l'Hôpital.

Ejemplo: Si $y = x \cdot \log x$

entonces y toma la forma $0 \cdot \infty$ para $x \rightarrow 0$.
Coloquemos:

$$y = x \log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

el cual toma la forma $\frac{\infty}{\infty}$ para $x \rightarrow 0$. Aplicando la regla de l'Hôpital resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando nuevamente la regla mencionada es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^3}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \quad \text{y así sucesivamente.}$$

Sin embargo, observemos que:

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \quad \text{para todo } x \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

∴

$$\boxed{\begin{array}{l} \log x \cdot \log x = 0 \\ x \rightarrow 0 \end{array}}$$

También pudo haberse escrito:

$$y = x \log x = \frac{x}{\frac{1}{\log x}}$$

que toma la forma de $\frac{0}{0}$ para $x \rightarrow 0$.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-x (\log x)^2 \right] = 0 \cdot \infty \text{ nuevamente}$$

Este segundo camino complica más el problema, razón por la cual es aconsejable el primero.

4) FORMA $\infty - \infty$

Sea $f(x) - \varphi(x)$, cuando $f(x) \rightarrow \infty$ y $\varphi(x) \rightarrow \infty$.

Escribamos:

$$f(x) - \varphi(x) = f(x) \left[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right]$$

y busquemos el límite de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ que es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; sea A este límite.

El problema se reduce ahora a buscar el límite de $f(x)(1-A)$ para $x \rightarrow a$.

Pueden ocurrir dos casos:

I) $A \neq 1$. Como $f(x) \rightarrow \infty$ para $x \rightarrow a$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) - \varphi(x) \right] \rightarrow \infty$$

II) $A = 1$. Como $f(x) \rightarrow \infty$ para $x \rightarrow a$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) - \varphi(x) \right] \rightarrow \infty \cdot 0$$

y es aplicable el caso anterior.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) \rightarrow \infty - \infty$$

que toma la forma $\frac{\infty}{\infty}$ para $x \rightarrow 0^+$

Apliquemos la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cotg x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{cosec}^2 x}{\cotg x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x =$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \log y = 0$$

$$\therefore \log \lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1$$

6) FORMA 0^0 Sea $y = [f(x)]^{\psi(x)}$
cuando $f(x) \rightarrow 0$ y $\psi(x) \rightarrow 0$

Tomando logaritmo de ambos miembros, se tiene:

$$\log y = \psi(x) \log f(x) \rightarrow 0 \cdot (-\infty)$$

Ejemplo:

$$y = x^{\operatorname{sen} x} \quad \text{para } x \rightarrow 0$$

$$\log y = \operatorname{sen} x \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log y = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \cdot \log x = 0 \cdot \infty$$

Escribamos:

$$\log y = \frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}$$

que para $x \rightarrow 0$ tiende a $\frac{\infty}{\infty}$, con lo cual le es aplicable la regla mencionada antes.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \log y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cotg x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \operatorname{tg} x \right) = -1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \log y = \log. \lim_{x \rightarrow 0} y = 0$$

siendo la base de los logaritmos el número e , por la definición de logaritmos se puede escribir que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = 0^0 = 1$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} = 1}$$

7) FORMA 1^∞ : Sea $\left[f(x) \right]^{\varphi(x)}$

para $f(x) \rightarrow 1$ y $\varphi(x) \rightarrow \infty$

$$\text{Si } y = \left[f(x) \right]^{\varphi(x)}$$

tomando logaritmos de ambos miembros, resulta:

el cual tiende a $\infty \cdot 0$, con lo que queda reducido este caso a uno anterior.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x \rightarrow 1^\infty$$

Si

$$y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$$

es

$$\log y = x \log \frac{x-1}{x+1} \rightarrow \infty \cdot 0$$

$\therefore$

$$\log y = \frac{\log \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{0}{0}$$

le es aplicable la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1 - (x+1)}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2 - 1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 1} = -2$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty$$

Siendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log y = -2$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\log \lim_{x \rightarrow \infty} y = -2$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$y = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \frac{1}{e^2}$$

16.10.- EJERCICIOS

Calcular los siguientes límites, aplicando la regla de l'Hôpital:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$R = -\infty$$

$$2) \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos \omega} - \frac{2}{\sin^2 \omega} \right)$$

$$\omega \rightarrow 0$$

$$R = -\frac{1}{2}$$

$$3) \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\log(z+1)} - \frac{z+1}{z} \right]$$

$$z \rightarrow 0$$

$$R = -\frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$R = 0$$

$$5) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \cotg \alpha$$

$$R = 1$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sen x)^x$$

$$R = 1$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2}$$

$$R = 1$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sen x)^{\tg x}$$

$$R = 1$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$R = e^2$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\tg x}$$

16.11.- BIBLIOGRAFIA

- 1) M.LABOUREUR: Cours de Calcul-
Ed. Ch.Beranguer- París- 1913.-
- 2) H.M.BACON: Differential and Integral Calculus-
Ed.McGraw- Hill- New York- 1942-
- 3) F.S.WOODS Y F.H.BAILEY: Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal.
Ed. U.T.E.H.A.- México- 1952-
- 4) W.A.GRANVILLE: Cálculo diferencial e integral.
Ed. U.T.E.H.A.- México- 1952-

17.- TEOREMAS DE TAYLOR Y MACLAURIN

17.1.-Teorema de Taylor.

Brook Taylor (1685-1731) se ocupó de física y matemática. Además de una obra sobre perspectiva donde sienta las bases del actual método de proyección central, se le debe en 1715, una obra donde hace uso de las diferencias juntas y en ella demuestra la serie que lleva su nombre. Se debe también a Taylor las fórmulas para el cambio de variable independiente, así como estudios sobre ecuaciones diferenciales y resolución aproximada de ecuaciones.

El teorema del valor medio (16,1) es un caso particular del teorema que estableceremos ahora.

Supongamos que la función

$$y = f(x)$$

sea continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y posea derivadas en $a < x < b$. Según el teorema del valor medio, es:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(\xi) \quad (1)$$

en donde

$$a < \xi < b$$

Supongamos ahora que también sea

$$y = f(x)$$

tal que

- 1) $f'(x)$ exista y sea continua en $a \leq x \leq b$
- 2) $f''(x)$ exista en $a \leq x \leq b$

probaremos que:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi) \quad (2)$$

para $a < \xi < b$

En efecto, existirá un número Q tal que:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} Q \quad (3)$$

donde $a, b, f(a), f(b), f'(a)$ son constantes. Veamos cual es la expresión de Q . Transponiendo $f(b)$ se obtiene

$$-f(b) + f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} Q = 0 \quad (4)$$

si se reemplaza a por x en donde $a \leq x \leq b$, se obtiene una función de x , que llamaremos $F(x)$, que es igual a:

$$F(x) = -f(b) + f(x) + (b-x) f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2} Q \quad (5)$$

Habiéndose supuesto que $f(x)$ tiene la derivada primera continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, luego $F(x)$ es continua también en él, además, habiéndose supuesto que $f''(x)$ existe en cualquier punto del intervalo $a < x < b$ resulta que:

$$F'(x) = f'(x) + (b-x) f''(x) - (b-x) Q$$

$$F'(x) = (b-x) \{ f''(x) - Q \} \quad (6)$$

Por (4) y (5) es $F(a) = 0$

y directamente, sustituyendo en (5) a x por b , es también

$$F(b) = 0$$

luego, $F(x)$ satisface la hipótesis del teorema de Rollé (16,2) es decir, que $F'(x)$ se anulará para un valor ξ , entre a y b , o sea, que:

$$F'(\xi) = (b-\xi) \{ f''(\xi) - Q \} = 0$$

para

$$a < \xi < b$$

Como

$$b - \xi \neq 0$$

$$f''(\xi) - Q = 0$$

es decir: $Q = f''(\xi)$
como se colocó en la fórmula (2)

Análogamente, si $f(x)$ es una función tal que:

1) $f(x)$ exista y es continua en $a \leq x \leq b$

2) $f'(x)$ exista en $a < x < b$

Es entonces:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} f'''(a) +$$

$$+ \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (7)$$

que se prueba de la misma manera que se hizo antes. Tomando, en (7), un valor x del intervalo $a \leq x \leq b$, en lugar de b , y reemplazándolo en la fórmula, obtenemos el importante teorema general del valor medio, conocido como teorema de Taylor:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) +$$

$$+ \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

para

$$a < \xi < x$$

(8)

al término

$$\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

se le llama resto de la fórmula de Taylor. La expresión (8) se conoce con el nombre de fórmula de Taylor o série de Taylor o desarrollo de Taylor.

Si en (8) hacemos: $x-a=h$

$$x = a+h$$

obteniéndose:

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+Qh)$$

donde $0 < Q < 1$

siendo $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+Qh)$

(9)

la nueva expresión del resto.

El teorema de Taylor nos permite hallar un polinomio en $(x-a)$ que se aproxima a una función dada para valores de x próximos a a , siempre que la función dada tenga derivadas continuas en $x = a$. En general el valor del resto no puede hallarse, por cuanto es un valor desconocido, pero sí podrá calcularse los límites hacia los cuales pueda tender el resto.

Ejemplo I: Aproximar $y = \log x$ por un polinomio de cinco términos, utilizando el teorema de Taylor con $a = 1$. Tendremos:

$$f(x) = \log x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$$

$$f^{(6)}(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6}$$

y

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

"

pero

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = -1$$

$$f''(1) = 1$$

$$f'''(1) = -2$$

$$f^{(4)}(1) = 2$$

$$f^{(5)}(1) = -3!$$

$$f^{(6)}(1) = 4!$$

$$f^{(7)}(1) = -5!$$

$$f^{(8)}(1) = 5!$$

$$f^{(9)}(1) = -6!$$

$$f^{(10)}(1) = 6!$$

$$f^{(11)}(1) = -7!$$

$$f^{(12)}(1) = 7!$$

$$f^{(13)}(1) = -8!$$

$$f^{(14)}(1) = 8!$$

$$f^{(15)}(1) = -9!$$

$$\log x = 0 + (x-1) \cdot 1 + \frac{(x-1)^2}{2!} (-1) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot (2) +$$

$$+ \frac{(x-1)^4}{4!} (-3!) + \frac{(x-1)^5}{5!} (4!) + \frac{(x-1)^6}{6!} (-5!)$$

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{1}{36}$$

donde $1 < x < 2$

Ejemplo II: Utilizando el resultado del ejemplo I, calcular $\log 1.2$ y estimar el error máximo que se comete al utilizar solamente los cinco primeros términos del desarrollo.

Substituyendo a x por 1,2 en la fórmula del Ejemplo I, se tiene:

$$\log 1,2 = (0,2) - \frac{(0,2)^2}{2} + \frac{(0,2)^3}{3} - \frac{(0,2)^4}{4} + \frac{(0,2)^5}{5} - \frac{(0,2)^6}{6} + \frac{1}{5}$$

donde $1,0 < x < 1,2$

Tomando los cinco primeros términos, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} 0,2 & = & 0,20000000 \\ \frac{(0,2)^2}{2} & = & 0,02000000 \\ \frac{(0,2)^3}{3} & = & 0,00266667 \\ \frac{(0,2)^4}{4} & = & 0,00040000 \\ \frac{(0,2)^5}{5} & = & 0,00006400 \\ \hline & & 0,20273067 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} - \frac{(0,2)^2}{2} & = & - 0,02000000 \\ - \frac{(0,2)^4}{4} & = & - 0,00040000 \\ \hline & & - 0,02040000 \end{array}$$

$$\log 1,2 = 0,20273067 - 0,02040000$$

$$\boxed{\log 1,2 = 0,18233067}$$

valor exacto hasta la séptima decimal.

Ahora $\frac{1}{36}$ está comprendida entre $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{1,2^6}$
es decir

$$\left(\frac{1}{1,2}\right)^6 < \frac{1}{36} < \frac{1}{16}$$

El máximo valor numérico del resto $\frac{(0,2)^6}{6} \cdot \frac{1}{36}$ es:

$$\frac{(0,2)^6}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{(0,2)^6}{6} \cdot 1 = 0,0000106 < 0,000011$$

De modo que, despreciando el sexto término y tomando solamente los cinco primeros del desarrollo se comete un error que no excede de 0,000011 en valor numérico. Los cinco primeros términos dan 0,1823307, y el sexto término solo puede afectar la quinta cifra decimal en un valor a lo sumo igual a 1. Puede tomarse a

$$\log 1,2 = 0,1823$$

como un valor exacto hasta la cuarta cifra decimal, lo cual puede verificarse con una tabla logarítmica.

172.- Teorema de Maclaurin

De Geometría, de Algebra y de Análisis infinitesimal, como también de Física y de Astronomía, se ocupó el último matemático inglés del siglo XVIII, período newtoniano, quizá el más importante: Colin Maclaurin (1698-1746), quien para escapar a las críticas de Berkeley volvió a los métodos clásicos de los geómetras griegos, con lo que logró hacer más rigurosas las demostraciones, sin embargo, contribuyó indirectamente a aumentar el aislacionismo de los matemáticos ingleses frente a los matemáticos continentales.

En su Tratado de las fluxiones "obra maestra de geometría que puede compararse a todo lo que Arquimedes nos legó de más hermoso y más ingenioso" según el matemático francés Lagrange, trae deducida la conocida serie de Maclaurin, que su autor mismo reconoció no ser sino un caso especial de la serie de Taylor.

Un caso especial del teorema de Taylor se obtiene colocando $a = 0$. El resultado se conoce como teorema de Maclaurin o serie de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

en donde

$$0 < x < X$$

(10)

para lo cual se requiere que $f(x)$ tenga las $(n-1)$ primeras derivadas continuas en el intervalo 0 a X , inclusive, poseer derivada n -ésima dentro de ese intervalo.

Ejemplo I: Calcular el valor de $\sin x$ mediante un polinomio de séptimo grado, utilizando el teorema de Maclaurin.

Utilizando la fórmula (10) se tiene:

$f(x) = \sin x$	y	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	"	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	"	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	"	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	"	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	"	$f^{(5)}(0) = 1$
$f^{(6)}(x) = -\sin x$	"	$f^{(6)}(0) = 0$
$f^{(7)}(x) = -\cos x$	"	$f^{(7)}(0) = -1$
$f^{(8)}(x) = \sin x$	"	$f^{(8)}(0) = 0$

se tendrá finalmente:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \sin \xi$$

donde

$$0 < \xi < x$$

Ejemplo II: Calcular el $\sin 18^\circ 11' 19''$, 4 aproximadamente, y evaluar el error máximo que se comete al utilizar los ocho primeros términos del desarrollo de Maclaurin. Observemos que las potencias pares de x no aparecen.

desarrollo (41.1) tienen coeficientes nulos, no así las potencias impares, de modo que, el 5º término en el desarrollo anterior da el error que se comete, y corresponde al 9º de la serie de Maclaurin.

$$172\ 11' 19'', 4 \approx 0,3 \text{ radianes}$$

de modo que

$$x = 0,3$$

$$\text{sen } 172\ 11' 19'', 4 \approx (0,3) - \frac{(0,3)^3}{3!} + \frac{(0,3)^5}{5!} - \frac{(0,3)^7}{7!} + \frac{(0,3)^8}{8!} \cdot \text{sen } \xi$$

donde

$$0 < \xi < 0,3$$

$$0,3 = 0,30000000$$

$$\frac{(0,3)^5}{5!} = 0,00002025$$

$$- \frac{(0,3)^7}{7!} = -0,00000004$$

$$0,29552021$$

Dado que el máximo valor de $\text{sen } \xi$ para $0 < \xi < 0,3$ es menor que

$$\text{sen } (0,3) < 1$$

luego el máximo valor numérico del error no puede exceder de

$$\frac{(0,3)^8}{8!} \approx 0,000000002$$

el cual solo afecta al decimal de octavo lugar. En consecuencia

$$\text{sen } 172\ 11' 19'', 4 \approx 0,295520$$

es exacta hasta el decimal de sexto orden, para lo cual ha bastado utilizar solo cuatro términos del desarrollo de $\text{sen } x$, es decir, solamente ocho términos del desarrollo de la serie de Maclaurin.

173.- Ejercicios.

1) Hallar cuatro términos del desarrollo de $f(x) = \sqrt{x}$

por la fórmula de Taylor, para $a=4$. Utilizar este resultado para calcular el valor de $\sqrt{4,1}$ y estimar el error que se comete. Comparése este resultado con el que se extrae de una tabla de raíces cuadradas.

$$\text{Error} = 10^{-7}$$

2) Suponiendo conocido el valor de

$$e^2 \approx 7,3891$$

hallar el de $e^{2,1}$ utilizando cuatro términos del desarrollo de Taylor y calcular el error que se comete.

3) Calcular el valor de e utilizando 10 términos del desarrollo de Maclaurin; calcular el error y comparése el resultado obtenido con el que contiene una tabla.

4) Desarrollar $f(x) = \cos x$ por la fórmula de Maclaurin y hallar el valor de $\cos 45^\circ$ calculando el error que se comete al tomar 5 términos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5) Idem para $f(x) = \arctg x$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

6) Idem para $f(x) = L(1+x)$ y el valor de $L2$ utilizando cuatro términos del desarrollo; su error y compárese con el valor dado por una tabla de logaritmo.

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$L2 = 0,301030$$

17.4.- Relaciones de Euler

En la resolución de los ejercicios 2 y 3 se hallará que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

si reemplazamos a x por ix , donde i es la unidad imaginaria, se tiene:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^5 x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{-ix} = 1 + \frac{-ix}{1} + \frac{(-i)^2 x^2}{2!} + \frac{(-i)^3 x^3}{3!} + \frac{(-i)^4 x^4}{4!} + \frac{(-i)^5 x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

pero $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\therefore e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (1)$$

cambiando a x por $-x$ se obtiene:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (2)$$

Sumando y restando (1) y (2) se obtiene:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (3)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (4)$$

conocidas con el nombre de relaciones de Euler que se utilizarán en la integración de funciones circulares.

17.5.- Bibliografía.

- 1.- H.M. Bacon: Differential and Integral Calculus
Ed. Macgraw - Hill - (New York - 1942)
- 2.- M. Laboureur: Cours de Calcul
Ed. Ch. Béranger - París - 1913
- 3.- F.S. Woods - F.H. Bailey - Geometría Analítica y Cálculo ..
Infinitesimal.
Ed. U.T.E.H.A. - México - 1952
- 4.- W.A. Granville: Cálculo diferencial e Integral
Ed. U.T.E.H.A. - México - 1952

M.m. XXXIV

18.- DIFERENCIAL

Sea la función $y = f(x)$
daremos a x un incremento Δx , con lo que obtendremos un incremento Δy de la función $f(x)$, es decir, que:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

y aplicando en el segundo miembro, la fórmula de Taylor, obtendremos:

$$y + \Delta y = f(x) + \frac{\Delta x}{1} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots$$

$$\therefore \Delta y = \Delta x \cdot f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots$$

Se llama parte principal al polinomio del segundo miembro de Δy a la expresión:

$$\Delta x \cdot f'(x)$$

que en lo sucesivo llamaremos diferencial de y, y lo indicaremos así:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (1)$$

Si $y = x$
aplicando esta última expresión, resulta

$$dy = 1 \cdot \Delta x$$

y si hubiéramos puesto

$$x = y$$

sería

$$dy = dx$$

$\therefore$

$$dx = \Delta x$$

de modo que reemplazándolo en (1) obtenemos finalmente:

$$\boxed{dy = f'(x) \, dx} \quad (2)$$

o bien

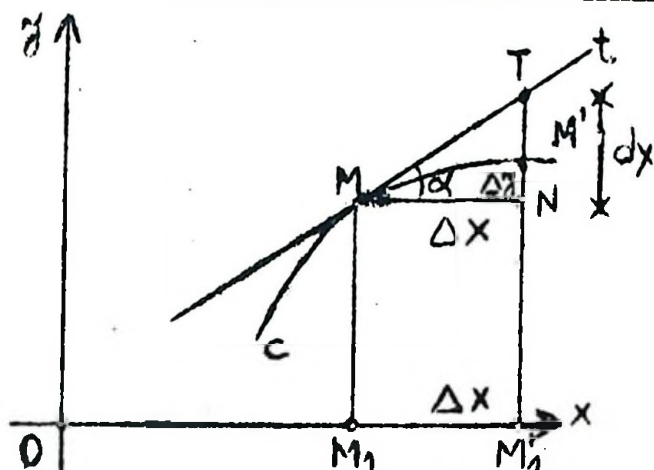
$$\boxed{dy = y' \, dx} \quad (3)$$

DEFINICION: Se llama diferencial de una función de una sola variable a la parte principal del crecimiento de la función, cuando el crecimiento de la variable tiende a cero.-

De (2) y (3) se puede decir que:

El diferencial de una función es igual a la derivada de la misma función por el diferencial de la variable

18.1.- SIGNIFICADO GEOMETRICO



Sea $y = f(x)$ la función cuya representación gráfica es la curva c . Tomemos dos puntos sobre ella: M y M' , siendo t la tangente en M y α el ángulo de inclinación de t con el eje de las x .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y'$$

El crecimiento de la variable es

$$\Delta x = \overline{M_1 M'_1} = \overline{MN} = dx$$

siendo

$$\overline{NT} = \overline{MN} \operatorname{tg} \alpha = y' dx = dy$$

luego, el diferencial de la función es el segmento de ordenada de M' comprendido entre la horizontal del punto M y la tangente a la curva en este último punto.

18.2.- CALCULO DE DIFERENCIALES

Para calcular el diferencial de una función, se halla su derivada y se la multiplica por dx , por ello que aquí se utilizan todas las reglas de derivación dadas anteriormente.

1) Diferencial de una constante:

$$\text{Si } y = k \quad \therefore \quad dy = 0, dx = 0$$

2) Diferencial de una suma:

$$\text{Si } y = u + v - w$$

$$\text{es } dy = (u' + v' - w')dx = u'dx + v'dx - w'dx = du + dv - dw$$

3) Diferencial de un producto:

$$\text{Si } y = u \cdot v$$

$$\text{es } dy = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + u dv$$

4) Diferencial de un cociente:

$$\text{Si } y = \frac{u}{v}$$

$$\text{es } dy = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

5) Diferencial de una constante por una función:

Si $y = ku$

es $dy = ku'dx = kdu$

6) Diferencial de una función de función:

Si $y = f(u)$ y $u = \varphi(x)$

es $dy = y'_u \cdot u'_x \cdot dx = y'_u \cdot du$

7) Diferencial de una exponencial:

Si $y = a^x$

es $dy = a^x \cdot L a \cdot dx$

Si $y = e^x$

es $dy = e^x dx$

8) Diferencial de un logaritmo:

Si $y = L x$

es $dy = \frac{1}{x} dx$

9) Diferencial de una potencia:

Si $y = x^n$

es $dy = nx^{n-1} dx$

10) Diferencial de una raíz:

Si $y = \sqrt[m]{x}$

es $dy = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} dx$

11) Diferencial de las funciones circulares directas:

Si $y = \text{sen } x$ $dy = \cos x \, dx$

Si $y = \cos x$ $dy = -\text{sen } x \, dx$

Si $y = \text{tg } x$ $dy = \sec^2 x \, dx$

12) Diferencial de las funciones circulares inversas:

Si $y = \text{arc sen } x$ $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\text{Si } y = \arccos x \quad \therefore dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{Si } y = \arctg x \quad \therefore dy = \frac{1}{1+x^2} dx$$

18.3.- DIFERENCIAL TOTAL

$$\text{Sea } Z = f(x, y) \quad (1)$$

una función de dos variables. Daremos a x e y dos incrementos independientes Δx y Δy , se obtendrá un incremento Δz para la variable dependiente z , de modo que:

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y)$$

y desarrollando por la fórmula de Taylor para funciones de dos variables se tiene:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x; y + \Delta y) = & f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \\ & + (\Delta y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) y (2), restándolas, resulta:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (\Delta y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

la expresión

$$\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}$$

es la parte principal del polinomio del segundo miembro, que designaremos como diferencial total de la función, y la indicaremos así:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

Como $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$ por ser x e y variables independientes, se obtiene finalmente:

$$\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy} \quad (3)$$

o bien

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

18.4.- CONDICION PARA QUE UNA EXPRESION DE LA FORMA $Mdx + Ndy$ SEA UNA DIFERENCIAL TOTAL

Supongamos que la expresión $Mdx + Ndy$ sea la diferencial total de la función $z = f(xy)$, es decir que:

$$dz = Mdx + Ndy$$

Como por (4), de 18.3) es:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

identificando ambas expresiones, deberá ser:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

derivando nuevamente:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

pero $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ por el lema de Ossian

Bonnet (16.6).-

luego

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La condición necesaria y suficiente para que $Mdx + Ndy$ sea una diferencial exacta es que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

18.5.- DERIVADAS DE LAS FUNCIONES IMPLICITAS

Supongamos que y venga dada en función de x por la ecuación

$$f(xy) = 0 \quad (1)$$

ello significa que $y = \varphi(x)$ donde $\varphi(x)$ se halla definida por la ecuación (1). Por ejemplos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una función implícita de y que se halla representada por una elipse en un sistema cartesiano. Despejando a y se obtiene:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

la función explícita de y.

Vamos a hallar la $\frac{dy}{dx}$ sin necesidad de pasar a las funciones explícitas, para ello

$$\text{hagamos } z = f(xy)$$

es, entonces

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

sean x e y independientes o no. Por (1) es

$$dz = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

de donde se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

(2)

siempre que

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

Ejemplo:

$$\text{Si } x^2 + 3xy^2 + y^3 - 1 = 0$$

hallar la $\frac{dy}{dx}$

$$\text{Aquí es: } f(xy) = x^2 + 3xy^2 + y^3 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 3y^2$$

Sustituyendo en (2) se obtiene:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = - \frac{2x + 3y^2}{6xy + 3y^2}}$$

18.6.- BIBLIOGRAFIA

- 1) H.M. BACON: Differential and Integral Calculus - Ed. Mc Graw-Hill-
New York- 1942.-
- 2) M. LABOUREUR: Cours de Calcul - Ed. Ch. Béranger - Paris - 1913.-

CALCULO INTEGRAL

19.- FUNCIONES PRIMITIVAS E INTEGRALES

19.1.- FUNCIONES PRIMITIVAS:

La determinación de la función derivada $f(x)$, habiendo si-
do dada una función $F(x)$, llamada primitiva, es el problema que se plan-
tea y resuelve el cálculo diferencial. El problema inverso, vale decir,
dada la función derivada $f(x)$ encontrar la función primitiva $F(x)$, es el
problema que resolverá el cálculo integral.

$$y = F(x) \xrightarrow{\text{cálculo diferencial}} y' = f(x) \\ \xleftarrow{\text{cálculo integral}}$$

En otros términos es:

$$d F(x) = f(x) dx$$

en donde la función $F(x)$ suele llamarse primitiva, antidiferencial o in-
tegral de $f(x) dx$, y esto lo expresaremos mediante la notación:

$$\int f(x) dx$$

Ejemplo: La integral de $x^3 dx$

decimos que es

$$F(x) = \frac{x^4}{4}$$

en efecto

$$d \left[F(x) \right] = x^3 dx$$

pero esta función derivada $x^3 dx$ no solo admite la función integral $\frac{x^4}{4}$,
sino aún infinitas otras que se obtienen de la anterior con solo agregar
un término constante C ; de modo que:

$$F_1(x) = \frac{x^4}{4} + C$$

es también una función primitiva de $x^3 dx$, pues

$$d \left[F_1(x) \right] = x^3 dx$$

De aquí se deduce que una función primitiva o integral da
origen a una sola función derivada, mientras que una función derivada o-
riginá infinitas funciones integrales relacionadas entre sí por una cons-
tante.

19.2. - CONSTANTE DE INTEGRACION - SIGNIFICADO GEOMETRICO

Las infinitas funciones primitivas o integrales de una función derivada difieren solo por el valor de una constante. Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de una misma función, derivada, $f(x) dx$, serán:

$$d[F_1(x)] = d[F_2(x)] = f(x) dx \quad (1)$$

Si designamos con

$$y = F_2(x) - F_1(x)$$

y representamos esta función en un sistema cartesiano, obtendremos una curva cuya tangente será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF_2(x)}{dx} - \frac{dF_1(x)}{dx}$$

pero por (1) es: $\frac{dy}{dx} = 0$

vale decir que la tangente a la curva es horizontal y coincide con ella, luego:

$$y = C$$

es decir:

$$y = F_2(x) - F_1(x) = C$$

Luego, si dos funciones continuas son primitivas de la misma función diferencial, solo difieren en una constante.

Tomando en cuenta esto, podremos escribir:

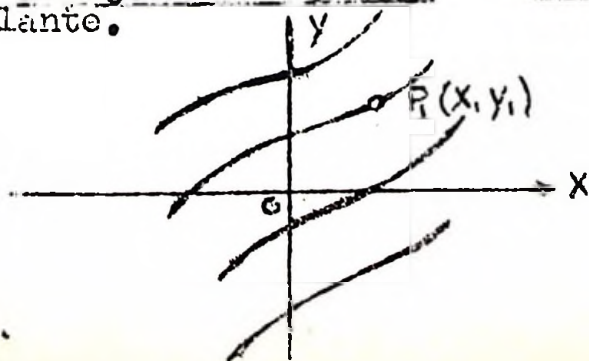
$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

y obtendremos todas las funciones integrales posibles.

Al escribir

$$\int f(x) dx$$

quedan implícitamente comprendidas todas las integrales de $f(x) dx$, es decir sobreentendiendo, con sus constantes, y esta función se suele llamar integral indefinida. La integral llamada definida se estudiará más adelante.



Si se representan gráficamente las funciones primitivas en coordenadas cartesianas, obtendremos una cantidad de curvas, cuya tangente genérica en un punto de coordenadas también genéricas viene dada por

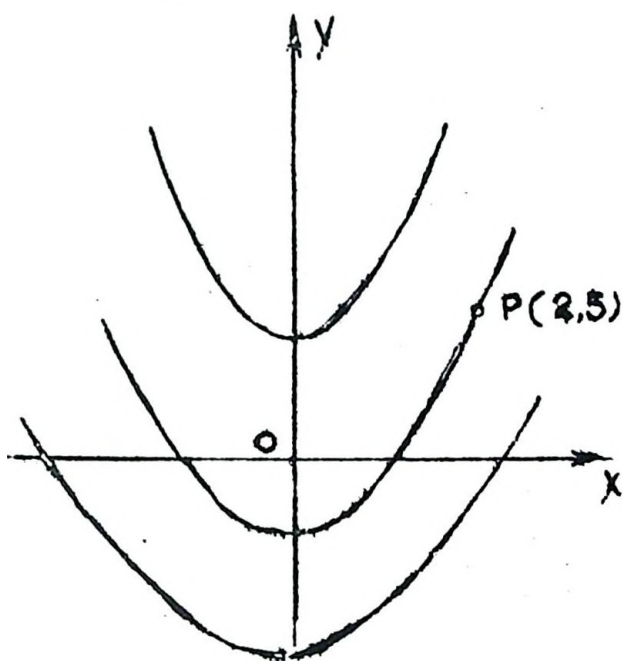
$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es decir $dy = f(x) dx$ y cuya función integral: $y = \int f(x) dx + C$ da las ecuaciones de esas curvas.

Dando valores arbitrarios a la constante C , obtendremos infinitas curvas que tienen la misma pendiente de su tangente en puntos de abscisa x . Pero si se exige que la curva pase por un punto $P_1 = (x_1/y_1)$ bien determinado, las coordenadas de ese punto verifican a la ecuación de la curva, y entonces la constante C puede hallarse con toda facilidad quedando determinada la ecuación de una sola curva de esa familia.

Ejemplo: La curva que pasa por el punto $P = (2/5)$ tiene una tangente cuya pendiente vale $2x$.

Determinar la ecuación de esa curva.



Como $\frac{dy}{dx} = 2x$

es $dy = 2x dx$
e integrando resulta:

$$y = 2 \int x dx + C$$

$$\therefore \boxed{y = x^2 + C} \quad (2)$$

ecuación de una familia de parábolas simétricas respecto del eje y . Dando a C valores arbitrarios

$$C = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \pm n$$

se van a obtener las curvas siguientes:

$$y = x^2 ; y = x^2 + 1 ; y = x^2 + 2 ; \dots ; y = x^2 + n.$$

de esa familia, todas parábolas iguales y solo desplazadas verticalmente unas de las otras.

La curva que pasa por el punto dado $P = (2/5)$ es verificada por estas coordenadas, es decir:

$$5 = 2^2 + C \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore y = x^2 + 1$$

es la ecuación de esa curva.

19.3.- AREA ENCERRADA POR UNA CURVA

Consideremos, en un sistema cartesiano, la gráfica de la función continua creciente:

$$y = f(x) = x^2$$

deseamos obtener el valor del área encerrada por la curva, el eje de las x , y las dos ordenadas extremas:

$$\underline{x = 1} \qquad y \qquad \underline{x = 3}$$

Para ello dividimos el intervalo $(x_3 - x_1)$ en diez intervalos iguales, de modo que:

$$\Delta x = 0,1(x_3 - x_1)$$

es decir

$$\Delta x = 0,1 \times 2$$

$$\Delta x = 0,2$$

y por los extremos de esos subintervalos levantamos las ordenadas correspondientes.

Si

$$x_0 = 1; x_1; x_2; x_3; \dots; x_9;$$

$$x_{10} = 3$$

son las abscisas de los extremos de esos intervalos, designaremos con:

$$f(x_0); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_{10})$$

las ordenadas respectivas.

En los puntos en que estas ordenadas cortan a la curva, se trazan las horizontales correspondientes quedando dividido el recinto en rectángulos que por exceso y por defecto comprenden el área buscada, y en donde se cumple que:

$$f(x_0) \Delta x \leq \Delta A < f(x_1) \Delta x$$

con ΔA se designa a un elemento del área

$$f(x_1) \Delta x \leq \Delta A < f(x_2) \Delta x$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

resulta que: Efectuando la suma de las áreas parciales así obtenidas,

$$\sum_{i=0}^9 f(x_i) \Delta x < A < \sum_{i=1}^{10} f(x_i) \Delta x$$

en donde se ha representado con A el área del recinto de la curva.

Es posible buscar el valor de estas sumas y en las tablas siguientes se los ha calculado;

$$s(10) = \sum_{i=0}^9 f(x_i) \Delta x$$

$$S(10) = \sum_{i=1}^{10} f(x_i) \Delta x$$

x	f(x)	f(x) Δx	x	f(x)	f(x) Δx
1,0	1,00	0,200	1,2	1,44	0,288
1,2	1,44	0,288	1,4	1,96	0,392
1,4	1,96	0,392	1,6	2,56	0,512
1,6	2,56	0,512	1,8	3,24	0,648
1,8	3,24	0,648	2,0	4,00	0,800
2,0	4,00	0,800	2,2	4,84	0,968
2,2	4,84	0,968	2,4	5,76	1,152
2,4	5,76	1,152	2,6	6,76	1,352
2,6	6,76	1,352	2,8	7,84	1,568
2,8	7,84	1,568	3,0	9,00	1,800
$\sum_{i=0}^9 f(x_i) \Delta x =$		7,880	$\sum_{i=1}^{10} f(x_i) \Delta x =$		9,480

$$\therefore 7,880 < A < 9,480$$

Si el intervalo $(x_3 - x_1)$ lo hubiéramos dividido en 20 partes iguales la longitud de cada parte sería:

$$\frac{1}{20} (x_3 - x_1) = 0,1$$

con lo que se obtendría en idéntica forma:

$$s(20) = 8,270$$

$$S(20) = 9,070$$

Si el intervalo $(x_3 - x_1)$ lo hubiéramos dividido en 200 partes, se hubiera obtenido:

$$s(200) = 8,6267$$

$$S(200) = 8,7067$$

Si, finalmente a $(x_3 - x_1)$ lo hubiéramos dividido en 2,000 partes iguales, obtendríamos:

$$s(2000) = 8,662167 \quad S(2000) = 8,670167$$

de modo que finalmente habremos obtenido las siguientes aproximaciones del área buscada:

$$s(10) = 7,880 < A < S(10) = 9,480$$

$$s(20) = 8,270 < A < S(20) = 9,070$$

$$s(200) = 8,6267 < A < S(200) = 8,7067$$

$$s(2000) = 8,662167 < A < S(2000) = 8,670167$$

donde se observa que a medida que aumenta el número de intervalos, éstos se hacen más pequeños, con lo cual aumenta el valor de las áreas interiores y disminuye el de los exteriores, acercándose ambas a un valor que es el área encerrada por la curva. Siempre es posible obtener que la diferencia $S(n) - s(n)$ se haga tan pequeña como se desea para lo cual basta tomar el intervalo lo suficientemente pequeño, y en particular, cuando $n \rightarrow \infty$ la diferencia, se hace nula y ambas sumas tienden a un límite común, que es el Área de la Curva; es decir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = A$$

con lo que podremos escribir que:

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_i x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta_i x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_i x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta_i x$$

en cuyo caso

$$n \rightarrow \infty$$

El razonamiento anterior es válido por cuanto la función dada es continua y creciente, pero lo mismo sucede si la función es decreciente, pues en tal caso es:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > \dots > f(x_n)$$

pues

$$f(x_1) > f(x_1 + 1)$$

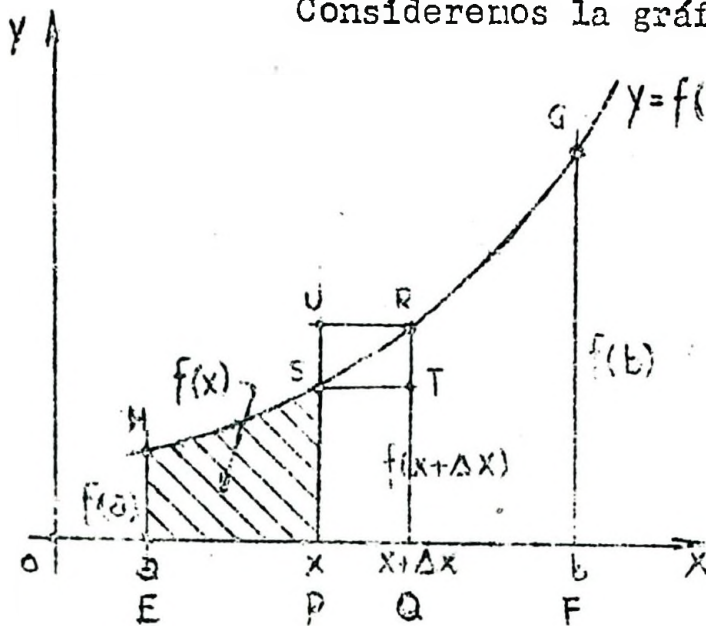
y es

$$s(n) > A > S(n)$$

y ambas sumas tienen el mismo límite para $n \rightarrow \infty$

19.4- LA INTEGRAL DEFINIDA

Consideremos la gráfica de la función:



$$y = f(x)$$

que suponemos continua y creciente en el intervalo

$$a \leq x \leq b$$

Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son puntos interiores del intervalo $(b-a)$ tal que:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$$

serán $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \dots \leq f(x_n)$

Calculemos el área E F G H encerrada por la curva, las dos ordenadas extremas para $x = a$ y $x = b$, y el eje de abscisas.

Si P es un punto móvil del eje OX y su ordenada es $f(x)$ el área rayada en la figura es una función de x que designamos con $A(x)$.

Si damos a x un incremento Δx , el área $A(x)$ adquiere un incremento $\Delta A(x)$ representado en la figura por el área del recinto P Q R S. Siendo $f(x)$ una función continua creciente, el área del rectángulo P Q T S de base Δx y altura $f(x)$ es menor que $\Delta A(x)$ y ésta a su vez es menor que el área del rectángulo P Q R U, de altura $f(x + \Delta x)$ y base Δx , es decir que:

$$f(x) \cdot \Delta x \leq \Delta A(x) \leq f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

La igualdad corresponde para el caso que $y = f(x)$ sea una recta.

Siendo $\Delta x \neq 0$, dividimos por Δx , obteniéndose:

$$f(x) \leq \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x)$$

haciendo tender:

$$\Delta x \longrightarrow 0, \text{ será:}$$

$$f(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x)$$

$$\Delta x \longrightarrow 0 \quad \Delta x \longrightarrow 0$$

Como $f(x)$ es una función continua, resulta que:

$$f(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{dA}{dx}$$

$$\Delta x \longrightarrow 0$$

luego $A(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, o sea, que $A(x)$ es una integral de la función $f(x) dx$, que escribiremos así:

$$A(x) = \int f(x) dx$$

Salvo una constante aditiva, el área queda determinada por la función $\int f(x) dx$; si $F(x)$ es también una función tal que:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

es $A(x) = F(x) + C \quad (1)$

Vamos a determinar el valor de dicha constante.

Cuando $x = a$ el área E P S H se anula, luego:

$$A(a) = F(a) + C = 0$$

$$C = -F(a)$$

y reemplazando este valor de C en (1) nos da:

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

Si $x = b$ es entonces:

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

Siendo $A(b)$ el área buscada entre a y b, y como

$A(x) = \int f(x) dx$ da también del área, salvo una constante a determinar, cuyo valor $C = -F(a)$ ya se halló, podemos escribir que

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

expresión denominada integral definida entre a y b de la función $f(x)$.

Como a este mismo resultado se llega razonando con una función $y = f(x)$ continua y decreciente, concluimos diciendo que: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y se divide este intervalo en n subintervalos $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \dots, \Delta_n x$, tales que sus longitudes tiendan a cero cuando el número de ellos crezca indefinidamente y llamando con ξ_i a un punto intermedio del subintervalo genérico $\Delta_i x$, es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es una función primitiva, cuya derivada respecto a x es $f(x)$.

Llamamos a este límite integral definida; a y b , límites inferior y superior respectivamente de esta integral; $a \leq x \leq b$ es el intervalo de integración; $f(x)$ es la función integrante y x la variable de integración.

En los cálculos corrientes se usa el símbolo siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

para indicar a esta integral entre los límites a y b ; se podrá observar que la misma no es una función de x , como la integral indefinida, sino que es un número, que sólo depende de los límites de integración.

Ejemplo I: Hallar el valor de:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} = L(x+1) \Big|_0^1 = L2 - L1 =$$

$$= L2 = M \log 2 = 0,6931$$

en donde se ha indicado con

$$M = \frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{0,43429} = 2,30259$$

al módulo de la base de los logaritmos.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha (\cos \alpha \, d\alpha) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \, d(\sin \alpha) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \alpha \, d(\sin \alpha) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \, d(\sin \alpha) =$$

$$= \left. \frac{1}{6} \sin^6 \alpha \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left. \frac{1}{4} \sin^4 \alpha \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{12}}$$

20.1.- INTEGRACION DE FUNCIONES SIMPLES

Las fórmulas de las derivadas, leídas en sentido inverso, nos dan de inmediato una serie de integrales.-

Así se tiene:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + \underline{\text{cte}} \text{ indefinidas.}$$

pues la derivada de sen x es cos x.

Daremos a continuación las fórmulas de integración de las funciones simples, deducidas de las fórmulas de derivadas correspondientes.-

FORMULAS

$$1) \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \underline{\text{cte}}$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln x + \underline{\text{cte}}$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \underline{\text{cte}}$$

$$4) \int \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \underline{\text{cte}}$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \underline{\text{cte}}$$

$$6) \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$7) \int a^n \, dx = \frac{a^n}{\ln a} + C$$

$$8) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$9) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$10) \int \sec^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x + C$$

$$11) \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cotg x + C$$

$$12) \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$13) \int \operatorname{cosec} x \cotg x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C$$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$$

$$16) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$$

$$17) \int dx = x + C$$

OBSERVACION: Si a es una constante, puede introducirse como sumando en el diferencial sin que por ello se modifique este ál tmo, es decir:

$$dx = d(x+a)$$

esto permite resolver comodamente a integrales simples en las cuales aparece a , como por ejemplo:

$$1) \int (x+a)^n \, dx = \int (x+a)^n \, d(x+a) = \int u^n \, du = \\ = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$2) \int \frac{dx}{(x+a)^n} = \int (x+a)^{-n} \, dx = \int (x+a)^{-n} \, d(x+a) = \\ = \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{(x+a)^{-(n-1)}}{-(n-1)} + C$$

$$= -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C$$

$$3) \int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = L(x+a) + C$$

$$4) \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} \cdot (-2) dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

20.2.- MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACION

Para integrar una función dada distinta a las precedentes, se reduce la operación a transformarla en una fórmula de integración de funciones, por intermedio de uno de los tres métodos siguientes:

20.2.1.- 1er MÉTODO: DESCOMPOSICION EN ELEMENTOS SIMPLES

Está basado en la siguiente propiedad:

La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de sus sumandos.-

$$\int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx$$

en donde, cada una de éstas integrales sumandos es una integral más simple. Se emplea éste método cuando la función a integrar es una suma de funciones o puede ser descompuesta en una suma.-

Ejemplo I: Calcular $\int (2x^3 - 4x + 1) dx$

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 4x + 1) dx &= \int 2x^3 dx - \int 4x dx + \int 1 dx \\ &= 2 \int x^3 dx - 4 \int x dx + \int dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + C \end{aligned}$$

Ejemplo II: Calcular $\int \frac{x-1}{x+1} dx$

Se puede escribir:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x-1}{x+1} dx &= \int \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) dx = \int dx - 2 \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= \int dx - 2 \int \frac{d(x+1)}{x+1} = x - 2 L(x+1) + C = \\ &= x - L(x+1)^2 + C \end{aligned}$$

Ejemplo III: Calcular $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$

Se puede escribir:

$$\operatorname{tg}^2 x = (1 + \operatorname{tg}^2 x) - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \operatorname{tg}^2 x &= \int \left[(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 1 \right] dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx - \int dx = \\ &= \int \sec^2 x \, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C \end{aligned}$$

20.2.2.- 2º METODO: INTEGRACION POR PARTES

El método de integración por partes está basado en la fórmula del diferencial de un producto:

grandando ambos miembros se obtiene:
o sea

$$u \, v = \int u \, dv + \int v \, du$$

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du} \quad (1)$$

Este método se emplea cuando la función a integrar es un producto de dos funciones, una de las cuales da una derivada conocida de inmediato o bien puede llevarse a esa forma enseguida.-

Ejemplo I:

Calcular $\int x e^x dx$

$$\int x e^x dx = \int \underbrace{x}_u \underbrace{d(e^x)}_v = \underbrace{x e^x}_{uv} - \int \underbrace{e^x}_v \underbrace{dx}_u =$$

$$= x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Ejemplo II:

Calcular $\int x^2 Lx dx$

$$\int x^2 Lx dx = \int \underbrace{Lx}_u \underbrace{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}_v = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_v \underbrace{Lx}_u - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_v \underbrace{d(Lx)}_u =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} Lx - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} Lx - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} \left(Lx - \frac{1}{3} \right) + C$$

Ejemplo III:

Calcular $\int e^{2x} \text{sen } x dx$

$$\int e^{2x} \text{sen } x dx = \int \underbrace{e^{2x}}_u \underbrace{[-d(\cos x)]}_v = - \int \underbrace{e^{2x}}_u \underbrace{d(\cos x)}_v =$$

$$= - \left[\underbrace{e^{2x}}_u \underbrace{\cos x}_v - \int \underbrace{\cos x}_v \underbrace{d(e^{2x})}_u \right] = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx \quad (1)$$

Aplicaremos nuevamente el método a $\int e^{2x} \cos x dx$:

$$\int e^{2x} \cos x dx = \int \underbrace{e^{2x}}_u \underbrace{d(\text{sen } x)}_v = \underbrace{e^{2x} \text{sen } x}_{uv} - \int \text{sen } x d(e^{2x}) =$$

$$= e^{2x} \text{sen } x - 2 \int e^{2x} \text{sen } x dx$$

Sustituyendo este resultado en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= -e^{2x} \cos x + 2 \left(e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx \right) \\ \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= -e^{2x} \cos x + 2 e^{2x} \operatorname{sen} x - 4 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx + C \\ 5 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= e^{2x} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C \\ \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= \frac{e^{2x}}{5} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{C}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^{2x}}{5} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C'}$$

20.2.3.- 3er. METODO: CAMBIO DE VARIABLE

Dada $\int f(x) \, dx$

hagamos $\varphi(x) = u \quad \therefore \quad x = \psi(u)$

y es $dx = \psi'(u) \, du$

La integral dada se transforma así:

$$\int f(x) \, dx = \int f[\psi(u)] \cdot \psi'(u) \, du$$

con el cambio de variable podrá lograrse un integrando más simple que el dado, con lo cual, será posible aplicar los métodos anteriores.-

Este método se empleará para las integrales de la forma

$$I = \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) \, dx$$

en donde, haciendo $\varphi(x) = u \quad \therefore \quad \varphi'(x) \, dx = du$

con lo que obtendremos:

$$I = \int f(u) \, du$$

Ejemplo I: Calcular $\int \operatorname{tg} x \, dx$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx$$

hagamos $\cos x = u \quad \therefore \quad -\operatorname{sen} x \, dx = du$

$$\therefore \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = - \operatorname{Ln} u + Cte = - \operatorname{Ln} \cos x + C$$

luego $\int \operatorname{tg} x dx = - \operatorname{Ln} \cos x + C$

Ejemplo II: Calcular $\int (2x-1)(x^2-x+1)^3 dx$

Siendo $(2x-1)$ la derivada de (x^2-x+1)

hagamos $u = x^2-x+1$ $\therefore du = (2x-1) dx$

$$\begin{aligned} \int (2x-1)(x^2-x+1)^3 dx &= \int (x^2-x+1)^3 (2x-1) dx = \\ &= \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2-x+1)^4}{4} + C \end{aligned}$$

Ejemplo III: Calcular $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

hagamos $u = 1-x^2$ $u = 1-x^2$

$$\therefore du = -2x dx$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= - \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = - \frac{1}{2} \sqrt{u} + C = -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C$$

Ejemplo IV: Calcular $\int x e^{-x^2} dx$

hagamos $-x^2 = u$ $\therefore -2x dx = du$

$$\begin{aligned} \int x e^{-x^2} dx &= \int e^u \cdot x dx = \int e^u \cdot \left(-\frac{1}{2} du\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

20.2.4. EJERCICIOS

1) INTEGRALES SIMPLES

1) $\int (\sqrt{y} - 9y^{\frac{3}{4}}) dy$

M.m. XXXVI

$$2) \int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{5z}} + \frac{1}{z^{3/2}} \right) dz$$

$$3) \int \frac{x^2 + 4}{x} dx$$

$$4) \int \frac{\sin 2\varphi}{\cos^4 2\varphi} d\varphi$$

$$5) \int \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \sec^2 \frac{1}{2} \alpha d\alpha$$

$$6) \int \frac{(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{x} dx$$

$$7) \int \frac{\sqrt{1 + e^{-x}}}{e^x} dx$$

$$8) \int \frac{x^2 + 4}{x - 1} dx$$

$$9) \int \frac{(x^2 + 3x + 4) dx}{x + 3}$$

$$10) \int \frac{\sec^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} d\varphi$$

II) INTEGRALES EXPONENCIALES

$$1) \int e^{-3x} dx$$

$$2) \int y^3 e^{y^4} dy$$

$$3) \int e^{2x} - 1 dx$$

$$4) \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$$

$$5) \int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx$$

$$6) \int e^x (1 + e^x)^2 dx$$

- 7) $\int \frac{e^x dx}{(e^x + 3)^5}$
- 8) $\int e^{\operatorname{tg} 2\varphi} \sec^2 2\varphi d\varphi$
- 9) $\int (1 + e^x)^2 dx$
- 10) $\int (ex^2 + 16) x e^{x^2} dx$
- 11) $\int 10^{\cotg 3\varphi} \operatorname{cosec}^2 3\varphi d\varphi$

III) INTEGRACION POR PARTES

- 1.) $\int x \sec^2 x dx$
- 2) $\int x^2 e^{3x} dx$
- 3) $\int x e^{x^2} dx$
- 4) $\int x^3 e^{-x^2} dx$
- 5) $\int y^2 \cos y dy$
- 6) $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$
- 7) $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$
- 8) $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} x dx$
- 9) $\int \operatorname{arc} \operatorname{csc} x dx$
- 10) $\int e^{-x} \cos x dx$
- 11) $\int \frac{L^2 x dx}{x}$
- 12) $\int L^2 x dx$

IV) INTEGRACION POR SUSTITUCION DE VARIABLES

$$1) \int \frac{-x \, dx}{x^2 + 16}$$

$$2) \int \frac{y \, dy}{(y^2 + 25)^2}$$

$$3) \int \cos^2 \varphi \, \text{sen} \, \varphi \, d\varphi$$

$$4) \int \frac{\cos 3 \varphi}{\sqrt{\text{sen} 3 \varphi}} \, d\varphi$$

$$5) \int \sqrt{\text{Cotg} \alpha} \, \text{cosec}^2 \alpha \, d\alpha$$

$$6) \int \text{sen}^{3/2} \varphi \, \cos \varphi \, d\varphi$$

$$7) \int t^5 (2t^6 + 1)^4 \, dt$$

$$8) \int (x^{3/2} + a^{3/2})^3 \sqrt{x} \, dx$$

$$9) \int \frac{\sqrt{\log x}}{x} \, dx$$

$$10) \int \frac{dx}{x \log^2 x}$$

$$11) \int \frac{e^t \, dt}{(1+e^t)^{3/2}}$$

$$12) \int \frac{\text{arc sen } x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

20.3.- INTEGRACION DE FRACCIONES RACIONALES.

Se llama fracción racional al cociente de dos polinomios enteros. Veremos que se puede integrar una fracción racional, a condición de que se conozcan las raíces del denominador.

Sea la fracción racional de x :

$$R(x) = \frac{F(x)}{\varphi(x)}$$

Supongamos que el grado de $F(x)$ es superior o igual al de $\varphi(x)$. Se podrá efectuar el cociente de $F(x)$ por $\varphi(x)$ y ordenar por las potencias decrecientes de x . Sea $\psi(x)$ el cociente y $f(x)$ el resto; se podrá escribir:

$$F(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) + f(x)$$

el resto $f(x)$ es de un grado inferior al divisor $\varphi(x)$, es decir que:

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \psi(x) + \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

lo que da:

$$\int \frac{F(x)}{\varphi(x)} dx = \int \psi(x) dx + \int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$$

con lo que el problema queda reducido a integrar un polinomio entero $\psi(x)$ y una fracción racional $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, en la cual, el grado del numerador es inferior al del denominador.

Ejemplo I:

Calcular $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} dx$

Siendo el grado del polinomio numerador, superior al del denominador, al efectuar el cociente indicado, se obtiene:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} = x - \frac{x - 2}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} dx = \int x dx - \int \frac{x - 2}{x^2 + 1} dx$$

$$= \int x dx - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} - \int \frac{2 dx}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} - 2 \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - 2 \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} L(x^2 + 1) - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C}$$

Puede observarse que para resolver el problema basta solo plantear y resolver el caso de las fracciones racionales cuyos numeradores son de grado inferior a sus denominadores; para ello es necesario tener en cuenta la naturaleza de las raíces del denominador, para lo cual distinguiremos cuatro casos:

- 1º) Raíces reales simples.
- 2º) Raíces reales múltiples.
- 3º) Raíces imaginarias simples.
- 4º) Raíces imaginarias múltiples.

20.3.1.- RAÍCES REALES SIMPLES

Sea la fracción racional

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

siendo $f(x)$ de grado inferior a $\varphi(x)$, y esta última solo tiene raíces reales simples, es decir, que

$$\varphi(x) = A_m (x - a)(x - b) \dots (x - \ell)$$

donde $a, b, \dots, \ell$ son las raíces. Se puede descomponer la fracción dada en otras de elementos más simples, es decir:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-\ell} \quad (1)$$

donde $A, B, \dots, K, L$ son coeficientes a determinar.

Esta determinación es posible, pues igualando los numeradores de ambos miembros, se obtendrá:

$$f(x) = A_m \left[A(x-b) \dots (x-\ell) + \dots + L(x-a)(x-b) \dots (x-k) \right] \quad (2)$$

Los dos miembros son dos polinomios de grado $(m-1)$, que tienen m coe-

ficientes; identificándolos, se obtendrán m ecuaciones de primer grado, que nos permiten determinar los coeficientes A, B, ..., K, L.

Hallados estos coeficientes, el problema se reduce a integrar una suma, uno de cuyos términos es:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A L(x-a) + C$$

Ejemplo I: Calcular

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 3x + 2}$$

Haciendo:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Las raíces del denominador son:

$$a = 2$$

$$b = 1$$

∴

o.º

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

luego es

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

o sea

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

para lo cual es necesario que los numeradores sean iguales, es decir:

$$x = A(x-2) + B(x-1)$$

para $x = 1$

o.º

$$1 = A(1-2) + 0$$

∴

$$\underline{A = -1}$$

para $x = 2$

o.º

$$2 = 0 + B(2-1)$$

∴

$$\underline{B = 2}$$

luego se tendrá:

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x-2}$$
$$= -L(x-1) + 2L(x-2) + C$$

y haciendo

$$C = LK$$

lo cual puede hacerse, pues C es una constante, se tiene:

$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = -L(x-1) + L(x-2) + LK$$
$$\boxed{\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = L \left(K \frac{(x-2)^2}{x-1} \right)}$$

20.3.2.- RAÍCES REALES MÚLTIPLES

Sea la fracción $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; f(x) es de grado inferior a $\varphi(x)$

Además $\varphi(x)$ tiene raíces reales múltiples, es decir, que:

$$\varphi(x) = A_m (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots \dots \dots (x-\ell)^\lambda$$

en donde

$$\alpha + \beta \dots \dots \dots + \lambda = m$$

y m es el grado del polinomio $\varphi(x)$.

Se descompone primeramente la fracción racional en elementos simples, para lo cual se procura determinar los coeficientes:

$$A_1, A_2, \dots, A_\alpha; B_1, B_2, \dots; C_1, C_2, \dots$$
$$\dots; L_1, L_2, \dots, L_\lambda$$

de manera que:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_1}{x-a} +$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_1}{x-b} + \dots +$$
$$+ \frac{L_\lambda}{(x-\ell)^\lambda} + \frac{L_{\lambda-1}}{(x-\ell)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_2}{(x-\ell)^2} + \frac{L_1}{x-\ell}$$

La determinación de los coeficientes se hace posible igualando los numeradores de ambos miembros, con lo cual se obtiene un sistema de m ecuaciones que permiten hallar los valores buscados. Finalmente el problema se reduce a integrar términos de la forma:

$$\int \frac{A\alpha}{(x-a)^\alpha} dx \quad ; \quad \frac{A_1}{x-a} dx$$

que se integran de inmediato, en efecto:

$$\begin{aligned} \int \frac{A\alpha}{(x-a)^\alpha} dx &= \int A\alpha (x-a)^{-\alpha} dx = A\alpha \cdot \frac{1}{1-\alpha} (x-a)^{-\alpha+1} + C \\ &= A\alpha \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{A_2 dx}{(x-a)^2} &= A_2 \int (x-a)^{-2} dx = -A_2 (x-a)^{-1} + C \\ &= -A_2 \cdot \frac{1}{x-a} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{A_1 dx}{x-a} = A_1 \int \frac{dx}{x-a} = A_1 \cdot L(x-a) + C$$

EJEMPLO 1

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x-1)^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^2 (x-1)^3} &= \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{B_3}{(x-1)^3} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} \\ \frac{1}{(x+1)^2 (x-1)^3} &= \frac{A_2 (x-1)^3 + A_1 (x+1)(x-1)^3 + B_3 (x+1)^2 + B_2 (x+1)^2 (x-1) + B_1 (x+1)^2 (x-1)^2}{(x+1)^2 (x-1)^3} \end{aligned}$$

$$1 = A_2 (x-1)^3 + A_1 (x+1)(x-1)^3 + B_3 (x+1)^2 + B_2 (x+1)^2 (x-1) + B_1 (x+1)^2 (x-1)^2$$

Desarrollando el segundo miembro, ordenando por las potencias decrecientes de x e igualando los coeficientes de las potencias semejantes, se obtiene:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Términos en } x^4: & 0 & = A_1 + B_1 \\
 \text{" " } x^3: & 0 & = -3A_1 + A_2 + B_2 \\
 \text{" " } x^2: & 0 & = -3A_2 - 2B_1 + B_2 + B_3 \\
 \text{" " } x & 0 & = 2A_1 + 3A_2 - B_2 + 2B_3 \\
 \text{" constantes: } & 1 & = -A_1 - A_2 + B_1 - B_2 + B_3
 \end{array} \quad (2)$$

Efectuando los cálculos, se obtiene:

$$A_1 = -3/16$$

$$B_1 = 3/16$$

$$A_2 = -1/8$$

$$B_2 = -1/4$$

$$B_3 = 1/4$$

∴

$$\frac{1}{(x+1)^2 (x-1)^3} = \frac{-1/8}{(x+1)^2} + \frac{-3/16}{x+1} + \frac{1/4}{(x-1)^3} + \frac{-1/4}{(x-1)^2} + \frac{3/16}{x-1}$$

luego es:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x+1)^2 (x-1)^3} &= -1/8 \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 3/16 \int \frac{dx}{x+1} + 1/4 \int \frac{dx}{(x-1)^3} - \\
 &\quad - 1/4 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 3/16 \int \frac{dx}{x-1} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{3}{16} L(x+1) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{3}{16} L(x-1) + C
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x-1)^3} = \frac{3x^2 - 3x - 2}{8(x+1)(x-1)^2} + \frac{3}{16} L \frac{x-1}{x+1} + C}$$

OBSERVACION: En lugar de resolver el sistema (2) que obliga a efectuar cálculos largos y laboriosos, se puede proceder más rápidamente de la siguiente manera:

En (1), haciendo $x = -1$ y $x = +1$ se anulan algunos términos, obteniéndose:

$$\text{Para } x = -1 \quad \therefore 1 = -8 A_2 \quad \therefore A_2 = -\frac{1}{8}$$

$$\text{" } x = +1 \quad \therefore 1 = 4 B_3 \quad \therefore B_3 = \frac{1}{4}$$

Derivando a (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= 3 A_2 (x-1)^2 + A_1 (x-1)^3 + 3 A_1 (x+1)(x-1)^2 + \\ &+ 2 B_3 (x+1) + 2 B_2 (x+1)(x-1) + B_2 (x+1)^2 + \\ &+ 2 B_1 (x+1)(x-1)^2 + 2 B_1 (x+1)^2 (x-1) \end{aligned}$$

Hagamos:

$$x = -1 \quad \therefore 0 = 12 A_2 - 8 A_1 \quad \therefore A_1 = -\frac{3}{16}$$

$$x = +1 \quad \therefore 0 = 4 B_3 + 4 B_2 \quad \therefore B_2 = -\frac{1}{4}$$

Derivemos a (1) por segunda vez:

$$\begin{aligned} 0 &= 6 A_2 (x-1) + 6 A_1 (x-1)^2 + 6 A_1 (x+1)(x-1) + 2 B_3 + \\ &+ 2 B_2 (x-1) + 4 B_2 (x+1) + 2 B_1 (x-1)^2 + 8 B_1 (x+1)(x-1) + \\ &+ 2 B_1 (x+1)^2 \end{aligned}$$

hagamos:

$$x = 1 \quad \therefore 0 = 2 B_3 + 8 B_2 + 8 B_1$$

$$\therefore B_1 = \frac{3}{16}$$

Ejemplo II : Calcular

$$\int \frac{4x^3 - 2x^2 + x + 1}{(x-2)(x+1)^3} dx$$

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + x + 1}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{B_3}{(x+1)^3} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} 4x^3 - 2x^2 + x + 1 &= A_1(x+1)^3 + B_3(x-2) + B_2(x-2)(x+1) + B_1(x-2)(x+1)^2 \\ &= A_1(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + B_3(x-2) + B_2(x^2 - x - 2) + \\ &\quad + B_1(x^3 - 3x - 2) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias semejantes, se tiene:

$$(3) \quad \begin{cases} 4 = A_1 + B_1 \\ -2 = 3A_1 \\ 1 = 3A_1 - 3B_1 - B_2 + B_3 \\ 1 = A_1 - 2B_1 - 2B_2 - 2B_3 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtienen los siguientes valores:

$$A_1 = 1 \quad ; \quad B_1 = 3 \quad ; \quad B_2 = -5 \quad ; \quad B_3 = 2$$

La integral dada se reduce a la suma:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{dx}{(x+1)^3} - 5 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 3 \int \frac{dx}{x+1} &= \\ = L(x-2) + 3L(x+1) - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{5}{x+1} + C \end{aligned}$$

$$= L \left[(x-2)(x+1)^3 \right] + \frac{5x+4}{(x+1)^2} + C$$

OBSERVACION: Se puede resolver el sistema (3) más cómodamente, haciendo:

$$x = 2 \quad \therefore \quad 27 = 27 A_1 \quad \therefore \quad \underline{A_1 = 1}$$

$$x = -1 \quad \therefore \quad -6 = -3 B_3 \quad \therefore \quad \underline{B_3 = 2}$$

$$x = 0 \quad \therefore \quad 1 = A_1 - 2 B_1 - 2 B_2 - 0 B_3$$

que teniendo en cuenta los valores de A_1 y B_3 se reduce a

$$B_1 + B_2 = -2 \quad (4)$$

Si $x = 1$

$$\therefore \quad 4 = 8 A_1 - 4 B_1 - 2 B_2 - B_3$$

que se reduce a

$$2 B_1 + B_2 = 1 \quad (5)$$

De (4) y (5) se obtienen:

$$B_1 = \quad ; \quad B_2 = -5$$

20.3.3.- RAICES IMAGINARIAS SIMPLES

Sea $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ la función a integrar, en donde $f(x)$ es de grado inferior a $\varphi(x)$ y esta última tiene raíces imaginarias simples, es decir, que:

$$\varphi(x) = (a x^2 + b x + c)(a' x^2 + b' x + c') \dots (a^{(n)} x^2 + b^{(n)} x + c^{(n)})$$

La fracción racional dada podrá descomponer en la suma siguiente:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{px+q}{ax^2+bx+c} + \frac{p'x+q'}{a'x^2+b'x+c'} + \dots + \frac{p^{(n)}x+q^{(n)}}{a^{(n)}x^2+b^{(n)}x+c^{(n)}}$$

para lo cual habrá que determinar los coeficientes:

$$p, q ; p', q' ; \dots ; p^{(n)}, q^{(n)}$$

mediante un sistema de ecuaciones de primer grado.

El problema queda reducido a integrar una suma de términos de la forma

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c}$$

Pueden presentarse los dos casos siguientes:

I) Integrales de la forma $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

donde $ax^2 + bx + c$ tiene raíces imaginarias.

Cuando las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c$ son imaginarias, éste puede escribirse como suma de dos cuadrados: (10.4.4) pág 251:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}} \quad (1)$$

Recordando que:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + m^2} = \int \frac{dx}{m^2 \left[1 + \left(\frac{x}{m} \right)^2 \right]} = \frac{1}{m} \arctg \frac{x}{m} + c \quad (2)$$

Volviendo a (1) se observa que x ha sido reemplazado por $(x + \frac{b}{2a})$ y m por $\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{2a}}$

luego

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4ac - b^2}{2a}}} \cdot \arctan \frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{4ac - b^2}{2a}}} + c$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + c$$

EJEMPLO: Calcular

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 5}$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

tiene raíces imaginarias pues:

$$b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$$

Se puede llevar a la forma (2) descomponiendo el trinomio del denominador en la forma siguiente:

$$2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} - \frac{9}{4}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$$

obtenida de:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right]$$

luego

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

en donde, por (2), es:

$$x \longrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right) \quad y \quad m = \frac{1}{2}$$

∴

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 5} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (2x - 3) + c$$

II) Integrales de la forma $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$

donde $ax^2 + bx + c$ tiene raíces imaginarias.

Sea la integral $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$

pongamos en evidencia la derivada del denominador, escribiendo:

$$px + q = \frac{p}{2a} (2ax + b) + q - \frac{pb}{2a}$$

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{\frac{p}{2a} (2ax + b) + (q - \frac{pb}{2a})}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$= \frac{p}{2a} \frac{2a + b}{ax^2 + bx + c} dx + (q - \frac{pb}{2a}) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Se sabe calcular la $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ Es necesario resolver la

$\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx$ para resolver el problema. Hagamos para ello:

$$ax^2 + bx + c = u$$

$$(2ax + b)dx = du$$

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{du}{u} = L u + C = L(ax^2 + bx + c) + C$$

EJEMPLO: Calcular

$$I_2 = \int \frac{3x - 1}{2x^2 - 6x + 5} dx$$

$2x^2 - 6x + 5 = 0$ tiene raíces imaginarias, en efecto:

$$b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$$

Teniendo en cuenta que la derivada del denominador es $(4x - 6)$ y $px + q = 3x - 1$

$$px + q = \frac{p}{2a} (2ax + b) + (q - \frac{pb}{2a})$$

$$3x - 1 = \frac{3}{4} (4x - 6) + \frac{7}{2}$$

$$\int \frac{3x - 1}{2x^2 - 6x + 5} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x - 6}{2x^2 - 6x + 5} dx + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 5}$$

$$(4x - 6) dx = du$$

luego

$$\int \frac{4x - 6}{2x^2 - 6 + 5} dx = \int \frac{du}{u} = Lu + C = L(2x^2 - 6 + 5) + C$$

y como ya se obtuvo en el ejemplo 20.3.3.I) es:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 6 + 5} = \text{arc tg}(2x - 3) + C$$

se tendrá finalmente

$$\frac{3x - 1}{2x^2 - 6 + 5} dx = -\frac{3}{4}(2x^2 - 6 + 5) + \frac{7}{2} \text{arc tg}(2x - 3) + C$$

20.3.4.~ RAICES IMAGINARIAS MÚLTIPLES

Sea la fracción $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ en la cual $f(x)$ es de grado inferior

a $\varphi(x)$, y esta última tiene raíces imaginarias múltiples, vale decir, que:

$$\varphi(x) = (ax^2 + bx + c)^m (a'x^2 + b'x + c')^{m'} \dots\dots\dots$$

Se descompone la fracción dada en otras fracciones con elementos simples, para lo cual es necesario determinar los coeficientes

$$p_m, q_m; p_{m-1}, q_{m-1}; p_1, q_1; p_{m'}, q_{m'}; \dots\dots\dots$$

de manera que se tiene:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{p_mx + q_m}{(ax^2 + bx + c)^m} + \frac{p_{m-1}x + q_{m-1}}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} + \dots\dots\dots \frac{p_1 + q_1}{(ax^2 + bx + c)} +$$

$$+ \frac{p_{m'} + q_{m'}}{(a'x^2 + b'x + c')^{m'}} + \frac{p_{m'-1}x + q_{m'-1}}{(a'x^2 + b'x + c')^{m'-1}} + \dots\dots\dots$$

La determinación de los coeficientes es posible, ya que basta igualar los de las potencias de igual grado para tener un sistema de ecuaciones de primer grado.

Todo se reduce a saber integrar una suma de términos de la forma:

$$\int \frac{px + q}{(ax^2 + bx + c)^m} dx$$

Se presentan dos casos, a saber:

I) Integrales de la forma $\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m}$

donde $(ax^2 + bx + c)$ tiene raíces imaginarias.

Sea
$$I_m = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

se trata de llevar I_m a la forma

$$J_m = \int \frac{dz}{(1 + z^2)^m}$$

para lo cual es necesario descomponer a $(ax^2 + bx + c)$ en suma de dos cuadrados, uno de los cuales es 1, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (ax^2 + bx + c) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \\ &= \frac{4ac - b^2}{4a^2} \cdot \left(\frac{4a^2}{4ac - b^2} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = \frac{4ac - b^2}{4a} \left(\frac{4a^2}{4ac - b^2} \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + 1 \right)$$

se tiene así:

$$I_m = \left(\frac{4a}{4ac - b^2} \right)^m \int \frac{dx}{\left(\frac{4a^2}{4ac - b^2} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + 1 \right)^m} \quad (1)$$

hagamos ahora:

$$\frac{2a}{\sqrt{4ac - b^2}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = z$$

$$\frac{2a}{\sqrt{4ac - b^2}} dx = dz$$

$$dx = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} dz$$

que reemplazando en (1) da:

$$I_n = \left(\frac{4a}{4ac - b^2} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \int \frac{dz}{(1 + z^2)^n}$$

Se ha conseguido llevar a I_n a la forma pedida.

CALCULO DE

$$J_n = \int \frac{dz}{(1 + z^2)^n}$$

Hagamos

$$1 = (1 + z^2) - z^2$$

$$J_n = \int \frac{1 + z^2}{(1 + z^2)^n} dz = \int \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^n} \quad (1)$$

o bien

$$J_n = \int \frac{dz}{(1 + z^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^n} \quad (2)$$

Calculemos

$$\int \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^n} = \int \frac{z}{(1 + z^2)^n} \cdot z dz =$$

que podemos integrar por partes; en efecto:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \int z \cdot \frac{[-2(n-1)] z dz}{(1 + z^2)^n} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \int z \cdot d \left[\frac{1}{(1 + z^2)^{n-1}} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \left[\frac{z}{(1 + z^2)^{n-1}} - \int \frac{1 dz}{(1 + z^2)^{n-1}} \right] = \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{z}{(1 + z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dz}{(1 + z^2)^{n-1}} \end{aligned}$$

Reemplazando en (2) se obtiene:

$$J_n = J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{z}{(1 + z^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \cdot J_{n-1}$$

que nos da la siguiente fórmula de recurrencia

$$(2m-2) J_m - (2m-3) J_{m-1} = \frac{z}{(1+z^2)^{m-1}}$$

(3)

Haciendo en (3) sucesivamente

$$m = 2, 3, 4, \dots m$$

se obtiene

$$m = 2 : \quad 2J_2 - J_1 = \frac{z}{1+z^2}$$

$$m = 3 \quad 4J_3 - 3J_2 = \frac{z}{(1+z^2)^2}$$

.....

.....

$$m = m \quad (2m-2)J_m - (2m-3)J_{m-1} = \frac{z}{(1+z^2)^{m-1}}$$

que nos permite calcular sucesivamente $J_2, J_3, \dots J_m$ cuando se conoce:

$$J_1 = \int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg } z + C \quad (\text{para } m = 2)$$

ya que:

$$J_0 = \int dz = z + C \quad (\text{para } m = 1)$$

EJEMPLO: Calcular

$$I_2 = \int \frac{dx}{(2x^2 - 6x + 5)^2}$$

$2x^2 - 6x + 5 = 0$ tiene raíces imaginarias, pues:

$$b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$$

Es necesario llevar la integral dada a la forma

$$J_2 = \int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

para lo cual se debe descomponer el trinomio del denominador en la suma de dos cuadrados, uno de los cuales es 1; en efecto:

$$2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \left[4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{2} \left[4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1\right]$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(2x^2 - 6x + 5)^2} = \int \frac{dx}{\left[\frac{1}{2} \left(4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1\right)\right]^2} =$$

$$= 4 \int \frac{dx}{\left[4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1\right]^2}$$

hagamos

$$2\left(x - \frac{3}{2}\right) = z$$

$$2dx = dz$$

y

$$dx = \frac{1}{2} dz$$

reemplazando en I_2 con lo que obtenemos:

$$I_2 = 4 \int \frac{\frac{1}{2} dz}{(z^2 + 1)^2} = 2 \int \frac{dz}{(1 + z^2)^2} = 2J_2$$

Hemos reducido el problema a calcular:

$$J_2 = \int \frac{dz}{(1 + z^2)^2}$$

para ello hagamos

$$1 = (1 + z^2) - z^2$$

$$J_2 = \int \frac{1 + z^2}{(1 + z^2)^2} dz - \int \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^2}$$

o sea

$$J_2 = \int \frac{dz}{1 + z^2} - \int \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^2}$$

$$J_2 = \arctan z - \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2} \quad (4)$$

Finalmente sólo basta calcular:

$$\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2} = \int \frac{z}{(1+z^2)^2} z dz = -\frac{1}{2} \int z \cdot \frac{(-2)z}{(1+z^2)^2} dz =$$

$$= -\frac{1}{2} \int z \cdot d \left(\frac{1}{1+z^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{z}{1+z^2} - \int \frac{dz}{1+z^2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{-z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2} \arctan z + C^{te}$$

Sustituyendo en (4) se tiene;

$$J_2 = \arctan z + \frac{z}{2(1+z^2)} - \frac{1}{2} \arctan z + C^{te}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2} \arctan z + C^{te}$$

$$\therefore I_2 = 2 J_2 = \frac{z}{1+z^2} + \arctan z + C^{te}$$

$$I_2 = \frac{2x-3}{1+(2x-3)^2} + \arctan (2x-3) + C^{te}$$

$$I_2 = \frac{2x-3}{1+4x^2-12x+9} + \arctan (2x-3) + C^{te}$$

$$I_2 = \frac{2x-3}{2(2x^2 - 6x + 5)} + \arctg(2x-3) + C$$

II) Integrales de la forma $\int \frac{px + q}{(ax^2 + bx + c)^m}$

donde $ax^2 + bx + c$ tiene raíces imaginarias

Sea integrar:

$$I_m = \int \frac{px + q}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

(m entero y positivo)

pongamos en evidencia la derivada del denominador:

$$2ax + b$$

y escribamos:

$$px + q = \frac{p}{2a}(2ax + b) + q - \frac{pb}{2a}$$

descomponiendo la integral dada, resulta:

$$I_m = \frac{p}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^m} dx + \left(q - \frac{pb}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} \quad (1)$$

Ya se sabe calcular la:

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} \quad \text{en I) 20.3.4.}$$

para calcular la primera, hagamos:

$$ax^2 + bx + c = u$$

$$(2ax + b) dx = du$$

$$\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^m} dx = \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{u^{m-1}} + C^{te}$$

$$= -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} + C^{te}$$

EJEMPLO: Calcular

$$I_2 = \int \frac{3x - 1}{(2x^2 - 6x + 5)^2} dx$$

$2x^2 - 6x + 5 = 0$ tiene raíces imaginarias, pues:

$$b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$$

Podemos escribir:

$$3x - 1 = \frac{3}{4}(4x - 6) + \frac{7}{2}$$

$$I_2 = \frac{3}{4} \int \frac{4x - 6}{(2x^2 - 6x + 5)^2} dx + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{(2x^2 - 6x + 5)^2}$$

hagamos $2x^2 - 6x + 5 = u$ $\therefore (4x - 6)dx = du$

$$\int \frac{4x - 6}{(2x^2 - 6x + 5)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C^{te} = -\frac{1}{2x^2 - 6x + 5} + C^{te}$$

Ya se calculó en el Ejemplo I) 20.3.4 el valor de:

$$\int \frac{dx}{(2x^2 - 6x + 5)^2} = \frac{2x - 3}{2(2x^2 - 6x + 5)} + \arctg(2x - 3) + C^{te}$$

$$I_2 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2 - 6x + 5} + \frac{7}{2} \frac{2x - 3}{2(2x^2 - 6x + 5)} + \frac{7}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x-3) + C^{te}$$

$$I_2 = \frac{-3 + 14x - 21}{4(2x^2 - 6x + 5)} + \frac{7}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x - 3) + C^{te}$$

$$I_2 = \frac{7x - 12}{2(2x^2 - 6x + 5)} + \frac{7}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x-3) + C^{te}$$

OBSERVACION: Pueden presentarse ejemplos más generales en donde aparecen a la vez raíces reales e imaginarias combinándose los cuatro casos aquí estudiados; cabe entonces aplicar simultáneamente los cálculos efectuados hasta aquí.

20.3.5.- EJERCICIOS

$$1) \int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx = L \frac{x^{5/3}(x-1)}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}$$

$$2) \int \frac{2x+1}{x^3-7x+6} dx = \frac{1}{4} L \frac{(x-2)^4}{(x-1)^3(x+3)} + C^{te}$$

$$3) \int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x} = L \frac{x^2-2x}{(x+1)^2} + C^{te}$$

$$4) \int \frac{(5x^2-3)dx}{x^3-x} = L x^3(x^2-1) + C^{te}$$

$$5) \int \frac{(4x^3+2x^2+1)dx}{4x^3-x} = x + \frac{1}{2} L \frac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2} + C^{te}$$

$$6) \int \frac{(3x^2 - 5x) dx}{(x-1)(x+1)^2} = L(x+1)(x-1)^2 - \frac{1}{x+1} + C^{te}$$

$$7) \int \frac{z^2 dz}{(z-1)^3} = L(z-1) - \frac{2}{z-1} - \frac{1}{2(z-1)^2} + C^{te}$$

$$8) \int \frac{4 dx}{x^3 + 4x} = I_1 \frac{cx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$9) \int \frac{dx}{x^3 + 8} = \frac{1}{24} L \frac{(x+2)^2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{1}{12} \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$$

$$10) \int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx = L(x^2 + 1) + \frac{1+3x}{2(x^2 + 1)} + \frac{3}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C^{te}$$

20.4.- INTEGRACION DE FUNCIONES CIRCULARES

20.4.1.- Integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{tg} x) dx$

Sea integrar $I = \int R(\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{tg} x) dx$

siendo R una fracción racional.-

Hagamos:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \therefore \quad x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

luego será:

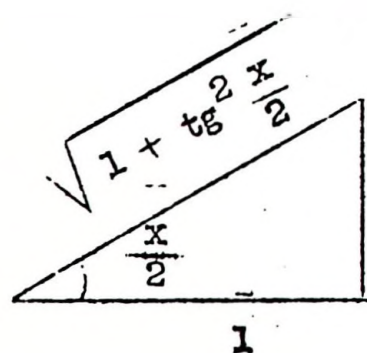
$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

para lo cual bastará poner:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$



$$\operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}$$

$$I = \int R \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2} \right) \frac{2 dt}{1+t^2}$$

que conduce a integrar una función racional de t .

EJEMPLO: Calcular

$$I = \int \frac{dx}{3 + 4 \cos x}$$

haciendo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ $\therefore x = 2 \operatorname{arctg} t$

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{3+4 \cos x} = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{3+4 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{3(1+t^2)+4(1-t^2)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{7-t^2} = 2 \int \frac{dt}{(\sqrt{7})^2 - t^2} = 2 \int \frac{dt}{(\sqrt{7}+t)(\sqrt{7}-t)} =$$

$$= 2 \left[\int \frac{A dt}{\sqrt{7}+t} + \int \frac{B dt}{\sqrt{7}-t} \right] = A(\sqrt{7}-t) + B(\sqrt{7}+t) = 1$$

$$\text{Si } t = -\sqrt{7} \quad \therefore \quad 2\sqrt{7}A = 1 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{Si } t = \sqrt{7} \quad \therefore \quad 2\sqrt{7}B = 1 \quad \therefore \quad B = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \left[\int \frac{dt}{\sqrt{7}+t} + \int \frac{dt}{\sqrt{7}-t} \right] = \frac{1}{\sqrt{7}} \left[L(\sqrt{7}+t) - L(\sqrt{7}-t) \right] + c$$

$\therefore$

$$\boxed{\int \frac{dx}{3+4 \cos x} = \frac{1}{\sqrt{7}} L \left[\frac{\sqrt{7} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{7} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right] + c}$$

20.4.2.- INTEGRALES DE LA FORMA:

$$\int R(\sin^2 x, \sin x, \cos x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x) dx$$

Sea integrar:

$$I = \int R(\sin^2 x, \sin x, \cos x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x) dx$$

siendo R una fracción racional.

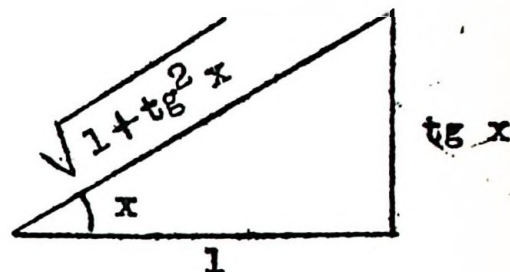
Se coloca:

$$\operatorname{tg} x = t \quad \therefore x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Se expresa a $\operatorname{sen}^2 x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\cos^2 x$ y $\operatorname{tg} x$ en función de $\operatorname{tg} x$, con lo que se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$



$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = t$$

$$I = \int R \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t \right) \frac{dt}{1+t^2}$$

con lo que se reduce a integrar una fracción racional de t .

EJEMPLO: Calcular:

$$I = \int \operatorname{tg}^4 x \, dx$$

Hagamos

$$\operatorname{tg} x = t \quad \therefore x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt$$

como

$$t^4 = (t^2 + 1)(t^2 - 1) + 1$$

$$I = \int \frac{(t^2 + 1)(t^2 - 1) + 1}{1 + t^2} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2} \right) dt =$$

$$= \int t^2 dt - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^3}{3} - t + \arctan t + C$$

$$I = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C$$

20.4.3.- Integrales de la forma:

$$\int \frac{R(\cos^2 x, \operatorname{sen} x) \cos x}{dx} \quad \text{y} \quad \int \frac{R(\operatorname{sen}^2 x, \cos x) \operatorname{sen} x}{dx}$$

I) Sea integrar: $I = \int R(\cos^2 x, \operatorname{sen} x) \cos x dx$

siendo R una fracción racional.-

Se coloca:

$$\operatorname{sen} x = t \quad \therefore \cos x dx = dt$$

$$I = \int R(1 - \operatorname{sen}^2 x, \operatorname{sen} x) d(\operatorname{sen} x)$$

$$I = \int R(1-t^2, t) dt$$

quedando por integrar una fracción racional de t .

II) Sea a integrar: $I = \int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx$

siendo R una fracción racional hacemos:

$$\cos x = t \quad \therefore -\sin x dx = dt$$

$\therefore$

$$I = - \int R(1 - \cos^2 x, \cos x) d(\cos x)$$

$$I = - \int R(1 - t^2, t) dt$$

lo que se reduce a integrar una fracción racional de t .

EJEMPLO: I) Calcular $I = \int \sin^2 x \cos^3 x dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \underline{\cos x dx} = \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) \end{aligned}$$

hacemos $\sin x = t \quad \therefore d(\sin x) = dt$

$\therefore$

$$= \int t^2 (1-t^2) dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c$$

$\therefore$

$$I = \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

EJEMPLO II) Calcular:

$$I = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx$$

$$I = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= - \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} \, d(\cos x) =$$

hacemos

$$\cos x = t$$

$$= - \int \frac{1-t^2}{t^3} \, dt = - \int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} \right) \, dt =$$

$$= - \int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} + \ln t + C$$

$$I = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec^2 x + \ln(\cos x) + C$$

20.4.4.- Integrales de la forma:

$$\int \operatorname{sen}^m x \, dx ; \int \cos^m x \, dx ; \int \operatorname{tg}^m x \, dx$$

I) Integración de $\int \operatorname{sen}^m x \, dx$ y $\int \cos^m x \, dx$, siendo m entero y positivo.

Sea

$$I = \int \operatorname{sen}^m x \, dx ; \quad J = \int \cos^m x \, dx$$

Se expresan $\frac{\sin^m x}{\cos^m x}$ y $\frac{\cos^m x}{\sin^m x}$ como funciones lineales de $\sin x$ y $\cos x$; para ello hagamos:

$$\cos x + i \sin x = u$$

$$\cos x - i \sin x = v$$

$$\cos x = \frac{u+v}{2}$$

$$\sin x = \frac{u-v}{2i}$$

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m} (u+v)^m = \frac{1}{2^m} \left(u^m + v^m - \frac{m}{1} uv (u^{m-2} + v^{m-2}) + \dots \right)$$

$$\sin^m x = \frac{1}{(2i)^m} (u-v)^m = \begin{cases} \frac{1}{(2i)^m} \left(u^m + v^m - \frac{m}{1} uv (u^{m-2} + v^{m-2}) + \dots \right) & \text{para } m \text{ par} \\ \frac{1}{(2i)^m} \left(u^m - v^m - \frac{m}{1} uv (u^{m-2} - v^{m-2}) + \dots \right) & \text{para } m \text{ impar} \end{cases}$$

EJEMPLO I) Calcular:

$$I = \int \sin^2 x \, dx$$

$$J = \int \cos^2 x \, dx$$

Como $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$J = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$J = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$I = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C$$

$$J = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C$$

EJEMPLC II) Calcular:

$$I = \int \sin^3 x \, dx$$

$$J = \int \cos^3 x \, dx$$

Se ha visto en 11.4.- pág. 268, ej.10 y 11 que:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)$$

$$I = \frac{1}{4} \int (3 \sin x - \sin 3x) \, dx = \frac{3}{4} \int \sin x \, dx - \frac{1}{4} \int \sin 3x \, dx$$

$$J = \frac{1}{4} \int (\cos 3x + 3 \cos x) dx = \frac{1}{4} \int \cos 3x dx + \frac{3}{4} \int \cos x dx$$

Integrando se obtiene:

$$I = \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x + C$$

$$J = \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + C$$

II) Integración de $\int \sin^m x dx$ y $\int \cos^m x dx$ para m entero,
positivo o negativo, pero par.

Sea

$$I = \int \sin^m x dx$$

$$J = \int \cos^m x dx$$

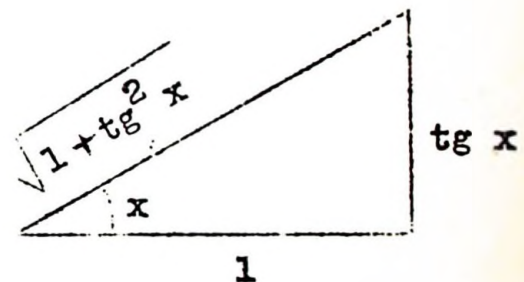
hacemos

$$\operatorname{tg} x = t$$

$$\therefore x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\pm \sqrt{1+t^2}}$$



$$\cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1+t^2}}$$

Con lo que cada integral se reduce una fracción racional de t .

EJEMPLO:

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}$$

$$\operatorname{tg} x = t$$

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\pm \sqrt{1+t^2}}$$

$$\therefore I = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t^4} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + C$$

$$I = - \left(\frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) + C$$

III) Integración de $\int \operatorname{sen}^m x \, dx$ y $\int \cos^2 x \, dx$ para m ente-

ro, positivo o negativo, pero impar

a) Sea integrar $I = \int \operatorname{sen}^m x \, dx$

hacemos

$$\cos x = t$$

$$-\operatorname{sen} x \, dx = dt$$

$$\therefore I = \int \operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = - \int (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot dt$$

com lo que se reduce a integrar una fraccional de t , pues $\frac{m-1}{2}$ es entero, ya que $m-1=2$ (múltiplo de 2).

b) Sea integrar $J = \int \cos^m x \, dx$

hacemos

$$\sin x = t$$

$\therefore$

$$\cos x \, dx = dt$$

$\therefore$

$$I = \int \cos^{m-1} x \cos x \, dx = \int (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt$$

que es una integral análoga a la anterior.

EJEMPLO: Calcular $J = \int \cos^3 x \, dx$

hagamos

$$\sin x = t$$

$\therefore$

$$\cos x \, dx = dt$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \\ &= \int (1 - t^2) dt = \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{t^3}{3} + C \end{aligned}$$

$\therefore$

$$J = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

IV) Integración de $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$ y $\int \operatorname{cotg}^m x \, dx$

1^{er} Caso:

m par

Se hace

$$\operatorname{tg} x = t$$

$\therefore$

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int t^m \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

EJEMPLO: Calcular $I = \int \operatorname{tg}^6 x \, dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{tg}^6 x \, dx = \int t^6 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \left[(t^4 - t^2 + 1) + \frac{-1}{1+t^2} \right] dt \\ &= \int t^4 \, dt - \int t^2 \, dt + \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C \end{aligned}$$

$$I = \int \operatorname{tg}^6 x \, dx = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x + C$$

2.º Caso: m impar

Se hace $\cos x = t$ si $m > 0$
 $\operatorname{sen} x = t$ si $m < 0$

EJEMPLO: Calcular

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}$$

$$m < 0$$

$$\operatorname{sen} x = t$$

$$\cos x \, dx = dt$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} \cos x dx \\
 &= \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} \cos x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^3} dt = \\
 &= \int \frac{1}{t^3} dt - \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} - Lt + C
 \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - L \operatorname{sen} x + C$$

20,4,5.- EJERCICIOS

$$1) \int \operatorname{sen}^3 x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$2) \int \operatorname{sen}^3 6x \cos 6x dx = -\frac{1}{24} \operatorname{sen}^4 6x + C$$

$$3) \int \cos^3 2\varphi \operatorname{sen} 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{8} \cos^4 2\varphi + C$$

$$4) \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \operatorname{cosec} x - \frac{1}{3} \operatorname{cosec}^3 x + C$$

$$5) \int \operatorname{sen}^5 x dx = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

$$6) \int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + L \cos x + C$$

$$7) \int \cotg^3 \frac{x}{3} dx = -\frac{3}{2} \cotg^2 \frac{x}{3} - 3L \operatorname{sen} \frac{x}{3} + C$$

$$8) \int \cotg^3 2x \operatorname{cosec} 2x dx = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 2x - \frac{1}{6} \operatorname{cosec}^3 2x + C$$

$$9) \int \operatorname{tg}^5 3\varphi d\varphi = \frac{1}{12} \operatorname{tg}^4 3\varphi - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 3\varphi + \frac{1}{3} L \sec 3\varphi + C$$

$$10) \int \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi + C$$

20.4.6.- BIBLIOGRAFIA

- 1) H. LAMB: An Elementary Course of Infinitesimal Calculus. Ed. Cambridge at the University Press. Londres - 1919-
- 2) W.A.GRANVILLE: Cálculo diferencial e integral. Ed. U.T.E.H.A. México - 1952-
- 3) M.LABOUREUR: Cours de Calcul. Ed. Ch.Béranger. Paris - 1913-
- 4) H.M.BACON: Differential and Integral Calculus. Ed. Mc Graw Hill. New york - 1942-
- 5) R.D.GILLESPIE: Cálculo Integral. Ed. Dossat. Madrid - 1944-
Trad. de L.Bravo Gala.

21.- INTEGRALES IMPROPIAS21.1.- INTEGRALES DE FUNCIONES CON PUNTOS EN EL INFINITO21.1.1.- INTRODUCCION.

Al estudiar la integral definida, se admitió que la función a integrar era continua y se mantenía finita entre los límites de integración. Sin embargo, existen funciones que no cumplen estas condiciones y cuya integración es necesario efectuar por presentarse en variados e importantes problemas del Análisis, de Geometría, de Física, de Estadística, etc.-

Veamos como se presentan algunos casos, donde se puede apreciar la necesidad de ampliar la definición de la integral definida que ya conocemos.-

Ejemplo 1: Calcular el valor de la integral:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

La función

$$y = \frac{1}{x}$$

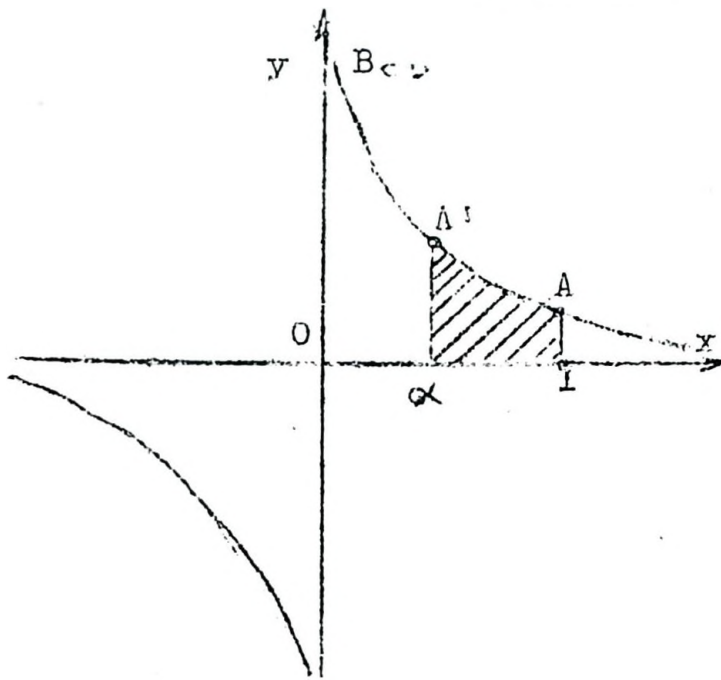


Figura N°1

nos da una hipérbola equilátera que tiene por asíntotas a los ejes cartesianos; para $x=\alpha$, se obtiene el punto B_∞ de la curva que se aleja al infinito de la misma. La integral pedida representa la cuadratura del arco AB_∞ ; dicho arco es ilimitado y su área, entre 0 y 1, no se sabe de antemano si ha de ser finita.-

Si en lugar de la integral dada, se considera la siguiente:

$$I' = \int_\alpha^1 \frac{dx}{x}$$

donde $0 < \alpha < 1$

entonces I' tiene significado preciso en el intervalo $(\alpha, 1)$, en donde la función es continua y finita, y representa el área rayada de la figura N°1. En efecto,

$$I' = \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \log x \Big|_\alpha^1 = \log 1 - \log \alpha = -\log \alpha$$

pero, para $\alpha \rightarrow 0$ es:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I' = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x} = -\infty$$

La integral, en este caso, no tiene significado.-

Ejemplo 2: Calcular el valor de la integral:

$$I = \int_0^1 \frac{\cos \frac{\pi}{2x}}{x^2} dx$$

La función a integrar se hace infinita para $x = 0$, mientras que se mantiene finita y continua en el intervalo $(\alpha, 1)$, siendo $0 < \alpha < 1$; en consecuencia tiene significado la integral

$$I' = \int_{\alpha}^1 \frac{\cos \frac{\pi}{2x}}{x^2} dx = -\frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^1 \cos \frac{\pi}{2x} \left(-\frac{\pi}{2x^2} dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^1 \cos \frac{\pi}{2x} d\left(\frac{\pi}{2x}\right) = -\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2x} \Big|_{\alpha}^1 =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left(1 - \sin \frac{\pi}{2\alpha} \right)$$

y es $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I' = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \cos \frac{\pi}{2x} \frac{dx}{x^2} = \underline{\text{no existe}}$

Tampoco en este caso tiene significado la integral.-

Ejemplo 3: Calcular el valor de la integral:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Como en los casos anteriores, la función, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es infinita para $x = 0$, manteniéndose en cambio finita para el intervalo $(\alpha, 1)$ siendo además continua; en donde $0 < \alpha < 1$. Calculemos entonces la integral

$$I' = \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 = 2(1 - \sqrt{\alpha})$$

$$\therefore \lim_{\alpha \rightarrow 0} I' = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

donde surge que es natural tomar como valor de la integral dada el valor 2, es decir, admitir que:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

con lo que se asegura, para esta integral, un valor finito, del cual carecen las dos anteriores.-

Teniendo presente las observaciones anteriores, vamos a admitir las siguientes definiciones:

21.1.2.- DEFINICIONES.-

Definición L: Sea la función $y = f(x)$, continua en el intervalo $(a, b - \xi)$, y que presenta una singularidad en el extremo b , ya que en él se hace infinita. Supondremos que la función dada es limitada e integrable en todo el intervalo $(a, b - \xi)$, donde $\xi > 0$ es un número arbitrariamente pequeño, pero, la función no es integrable en el intervalo



Figura Nº 2

$(b - \xi, b)$; la integral

$$J(\xi) = \int_a^{b-\xi} f(x) dx$$

existe cualquiera sea el valor de ξ y es una función de ξ . Si existe el límite $J(\xi)$, dicho límite se llamará la integral definida generalizada o impropia en el intervalo (a, b) y se indicará con la notación siguiente:

$\xi \rightarrow 0$
siguiente:
 M.m.XXXVIII

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_a^{b-\xi} f(x) dx$$

EJEMPLO: Calcular la integral: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

La función a integrar toma valores infinitos para $x=1$. Calculemos para ello la integral:

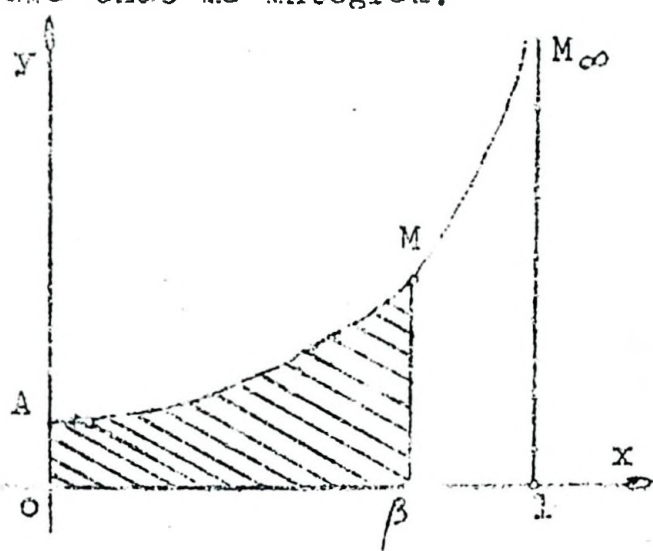


Figura Nº 3

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x \Big|_0^\beta = \text{arc sen } \beta$$

donde $0 < \beta < 1$.

Esta integral representa el área rayada de la figura Nº 3, o más bien, la cuadratura del área AM. Tomemos límites para $\beta \rightarrow 1$:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \text{arc sen } \beta = \frac{\pi}{2}$$

luego, por definición es:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

DEFINICION II: Supongamos ahora que se da la función $y=f(x)$ en el intervalo (a, b) , con excepción del extremo a . Sea entonces $f(x)$ limitada en todo el intervalo $(a+\xi, b)$, y en cambio no lo sea en el intervalo $(a, a+\xi)$. Para $x=a$ la función puede ser infinita. Haciendo

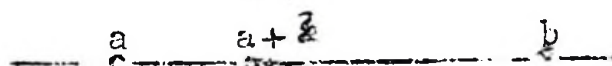


Figura Nº 4

$$J_1(\xi) = \int_{a+\xi}^b f(x) dx$$

se llamará integral generalizada o impropia de la función dada al:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} J_1(\xi)$$

si existe, es decir, que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{a+\xi}^b f(x) dx$$

EJEMPLO: Calcular la integral:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$$

la función a integrar

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$$

donde n es real y positivo, para $x=a$ tiene un punto impropio, y la función se hace infinita de orden $\frac{n}{1}$.

Considerando el intervalo $(a+\xi, b)$ la integral se halla definida en él, y es:

$$I = \int_{a+\xi}^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \left[\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} \right]_{a+\xi}^b = \frac{1}{1-n} \left[(b-a)^{1-n} - \xi^{1-n} \right] & \text{para } n \neq 1 \\ \left[\log(x-a) \right]_{a+\xi}^b = \log(b-a) - \log \xi & \text{para } n = 1 \end{cases}$$

Tomando límites para $\xi \rightarrow 0$ se tiene:

para $n < 1$ es:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} I = \frac{1}{1-n} (b-a)^{1-n}$$

para $n \geq 1$ es:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} I = \infty$$

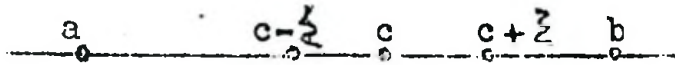
Luego, la función $\frac{1}{(x-a)^n}$ no es integrable en el intervalo (a,b) para $n \geq 1$, mientras lo es para $n < 1$. Para este caso se tiene:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n} (b-a)^{1-n}$$

Finalmente podemos poner que:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{a+\xi}^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n} (b-a)^{1-n}$$

Definición III: Estando definida la función $f(x)$ en el intervalo (a, b) , existe en el mismo un punto c , llamado punto singular, tal que, mientras $f(x)$ se halla limitada en los intervalos $(a, c-\xi)$ y $(c+\xi_1, b)$ donde $\xi > 0$ y $\xi_1 > 0$



son arbitrariamente pequeños, no está limitada en el intervalo $(c-\xi, c+\xi_1)$

Figura Nº5

En la generalidad de los casos, es c un punto donde la función adquiere valor infinito. Si colocamos:

$$J(\xi, \xi_1) = \int_a^{c-\xi} f(x) dx + \int_{c+\xi_1}^b f(x) dx$$

y existe el $\lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \xi_1 \rightarrow 0}} J(\xi, \xi_1)$

tendiendo $\xi \rightarrow 0$ y $\xi_1 \rightarrow 0$, independientemente uno del otro, se llama a este límite, la integral definida impropia de $f(x)$ en el intervalo (a, b) .

Podremos escribir entonces que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_a^{c-\xi} f(x) dx + \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \int_{c+\xi_1}^b f(x) dx$$

Si el límite no existe, o existe solo uno de ellos, no existe la integral. En el caso particular de que $\xi = \xi_1$ y existe el

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\xi} f(x) dx + \int_{c+\xi}^b f(x) dx \right)$$

este límite es llamado por Cauchy con el nombre de: valor principal de la integral.

EJEMPLO 1: Calcular el valor de la integral:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

un razonamiento poco cuidadoso conduciría al siguiente cálculo:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} \Big|_0^2 = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

pero esto es absurdo, pues, para cualquier valor de x es siempre

$$\frac{1}{(x-1)^2} > 0$$

y si la integral existe, debe ser positiva. Debemos observar que para $x = 1$, el integrando es discontinuo, de manera que para $x \rightarrow 1$ es el

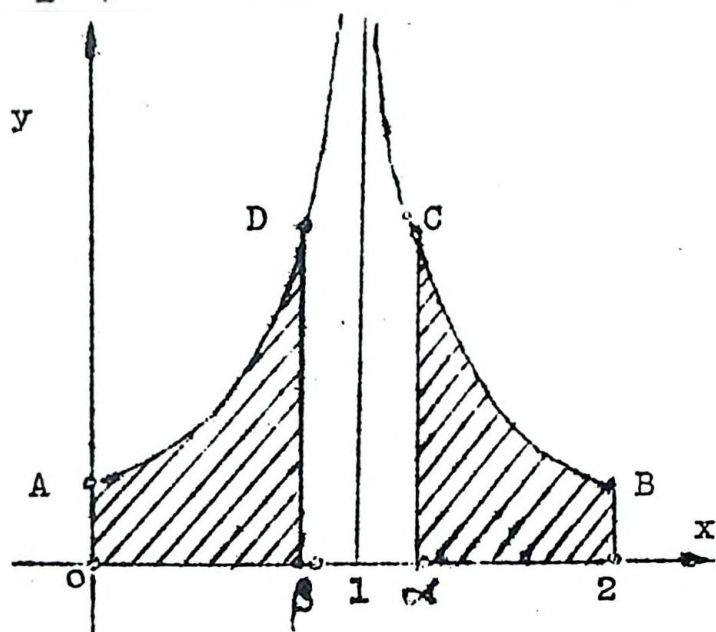


Figura N°6

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^{\beta} \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow 1} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^{\beta} =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{1-\beta} - 1 \right) = +\infty$$

La integral dada no existe, de acuerdo con la definición, no importa cual sea el valor, finito o no, de la segunda integral de la suma.

EJEMPLO 2: Calcular el valor de la integral:

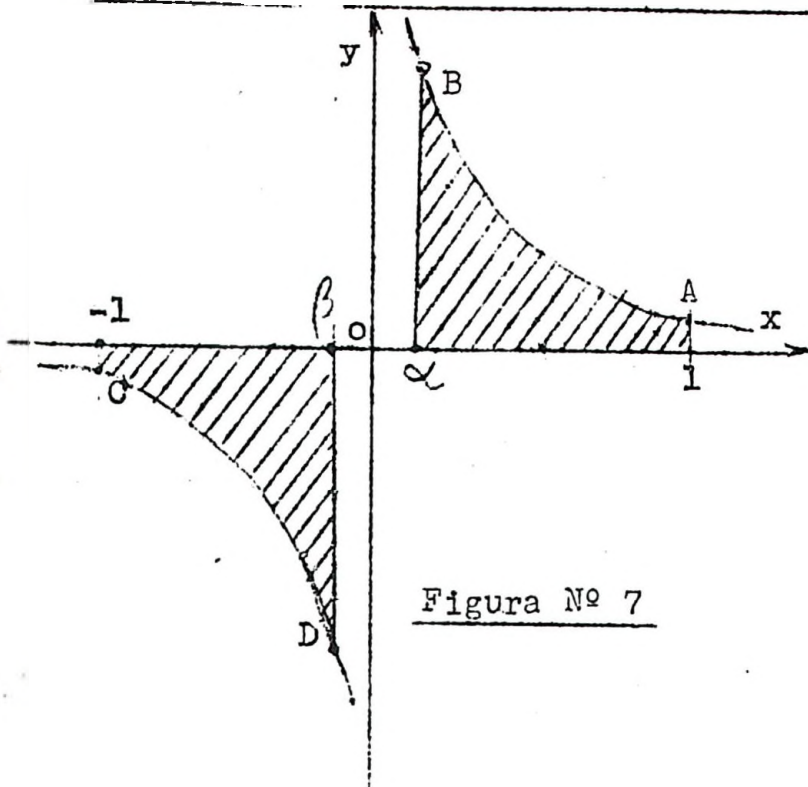


Figura No 7

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^1 \frac{dx}{x^3} =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\beta} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^3} =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{2\beta^2} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha^2} \right)$$

para $\beta \rightarrow 0^-$ es $\lim_{\beta \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\beta^2} = \infty$

para $\alpha \rightarrow 0^+$ es $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\alpha^2} = \infty$

ninguna de las integrales de la derecha existen, luego la

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$$

no tiene significado.

Geométricamente, puede verse que las áreas rayadas entre 1 y β , y entre α y 1, no tienen límites finitos, en consecuencia, no puede hacerse su suma.

EJEMPLO 3: Calcular el valor de la integral:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^{2/3}} + \int_0^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\beta} \frac{dx}{x^{2/3}} + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}}$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow 0^-} 3x^{1/3} \Big|_{-1}^{\beta} + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 3x^{1/3} \Big|_{\alpha}^{+1} = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} (3\beta^{1/3} + 3) + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (3 - 3\alpha^{1/3}) = 6$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}} = 6 \quad \text{tiene significado}$$

DEFINICION IV: La función $f(x)$ admite en intervalo (a, b) un número finito de puntos singulares $a_1, a_2, \dots, a_r$, en los cuales la función toma valores infinitos. La integral impropia existe cuando se divide el intervalo (a, b) en r partes mediante los puntos $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$, de modo tal que se tenga:

$$a < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{r-1} < a_r < b$$

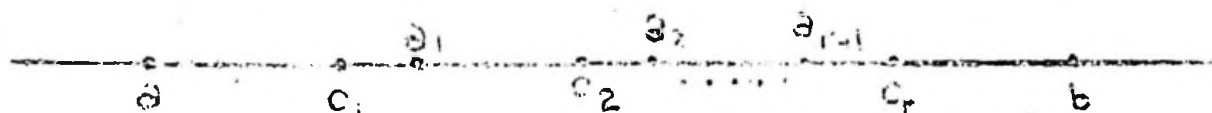


FIGURA N° 8

en cada una de cuyas partes se satisface la condición de la definición III, es decir, cuando existen las integrales impropias siguientes:

$$\int_a^{a_1} f(x) dx; \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx; \dots; \int_{a_{r-1}}^{a_r} f(x) dx$$

La integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ será la suma de las integrales parciales anteriores.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{r-1}}^{a_r} f(x) dx$$

La elección de los puntos a_i , que satisfacen a las desigualdades es indiferente y puede hacerse de los modos más variados.

DEFINICION V: Supongamos que la función $f(x)$ sea continua en el intervalo $a < x < b$ y tome valores infinitos en los extremos del intervalo dado, es decir, cuando

$$x \longrightarrow b \quad y \quad x \longrightarrow a^+$$

Si existe el límite

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow a^+ \\ \beta \rightarrow b^-}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = I$$

existe en consecuencia la $\int_a^b f(x) dx$

Ejemplo: Calcular el valor de la integral:

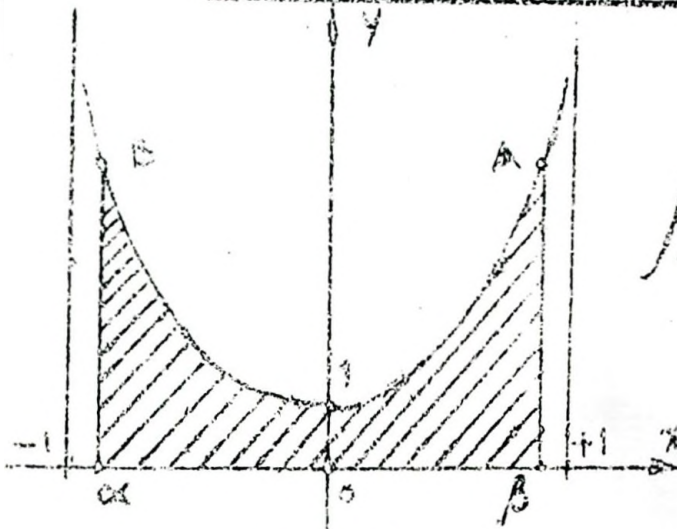


FIGURA Nº 9

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -1^+ \\ \beta \rightarrow +1^-}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -1^+ \\ \beta \rightarrow +1^-}} (\arcsen \beta - \arcsen \alpha) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi \end{aligned}$$

Geométricamente interpretada, esta integral representa el área rayada cuando el límite izquierdo se acerca a $x = -1$ por la izquierda y a $x = +1$ por la derecha.

OBSERVACION: Estas integrales, así definidas, han sido llamadas integrales definidas singulares por Cauchy, y bajo esta denominación son tratadas por varios autores, como Ulisse Dini: Lezione di Analisi Infinitesimale, Vol. II, 1ra. parte, VI, Cap.55

21.2.~ INTEGRALES CON LIMITES INFINITOS

21.2.1. INTRODUCCION

Cuando se estableció la definición de la integral definida, se hizo la hipótesis esencial de que el intervalo de integración, dentro del cual se daba la función, era limitado, y nada se sabía cuando dicho intervalo era infinito. Veremos ahora la forma de extender este concepto de integral definida para dichos límites.

21.2.2.- DEFINICIONES

Definición I: Tengamos una función $f(x)$ finita y continua en el intervalo $(a, +\infty)$, vale decir, que $f(x)$ tiene por límite a un número ℓ , cuando $|x|$ crece indefinidamente, si, fijado un número $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, existe un valor x_0 de x , tal que para todo $|x| > x_0$ el correspondiente valor de $f(x)$ difiere de ℓ , en valor absoluto, en menos de ϵ , es decir que

$$\begin{array}{c} a \qquad b \qquad +\infty \\ \hline |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array}$$

Fijemos un punto b del intervalo $(a, +\infty)$ y consideremos la integral

FIGURA Nº 10

$$\int_a^b f(x) dx$$

si existe y es finito el límite de dicha integral para $b \rightarrow +\infty$, se adopta a tal límite como valor de la integral y se escribe:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

si por el contrario, el límite no existe o es infinito, se dice que $f(x)$ no es integrable en el intervalo $(a, +\infty)$.

Definición II: Si $f(x)$ es continua y finita, en el intervalo $(-\infty, b)$, fijado un punto cualquiera $a < b$, si existe y es finito el límite de la integral $\int_a^b f(x) dx$ para $a \rightarrow -\infty$,

FIGURA Nº 11

se toma por definición:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

como valor de la integral singular.

Definición III: Si la función $f(x)$ está definida en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ la integral $\int_a^b f(x) dx$ en el intervalo (a, b) contenido en el anterior, tiene un valor finito, y si existe y es finito el límite de dicha integral cuando $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$, se tomará a dicho valor como el correspondiente a la integral singular o impropia, es decir, será:

FIGURA Nº 12

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx$$

21.2.3.- OBSERVACION

Las integrales así definidas suelen ser llamadas integrales singulares, impropias o infinitas.

Además se suele decir que si el

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$$

- a) si existe y es tal que el $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = K$, siendo K un número finito, se dice que la integral converge.
- b) si no existe, decimos que la integral no existe.
- c) si el $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \pm \infty$ decimos que la integral diverge definidamente hacia $\pm \infty$.
- d) si $F(t)$ no converge ni diverge definidamente hacia $\pm \infty$ decimos que la integral diverge indefinidamente.

Ejemplo 1:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-t}) = 1$$

la integral converge hacia el valor 1.

Ejemplo 2:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$$

la integral diverge definidamente hacia $+\infty$.

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{+\infty} x \cdot \sin x dx &= \int_{2\pi}^{+\infty} x \cdot d(\cos x) \\ &= - \left[x \cos x - \int_{2\pi}^{+\infty} \cos x dx \right] = - \left[x \cos x - \int_{2\pi}^{+\infty} d(\sin x) \right] = \end{aligned}$$

$$= \left[-x \cos x + \sin x \right]_{2\pi}^{+\infty}$$

para $x = +\infty$, las funciones sen x y cos x cambian infinitas veces de signo y sus integrales no tienen sentido entre los límites $(2\pi, +\infty)$ la integral es indefinidamente divergente.

21.2.4.- EJEMPLOS EXPLICATIVOS

Ejemplo 1:

Sea la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

La función a integrar es finita y continua en el intervalo $(0, +\infty)$ y su gráfica, en un sistema cartesiano, viene dada en la figura N° 14. Tomando $b > 0$, existe la integral dada en el intervalo $(0, b)$ y su valor es:

$$\int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^b = 1 - e^{-b}$$

una función de b . Tomando límites de esta expresión para $b \rightarrow +\infty$, es:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

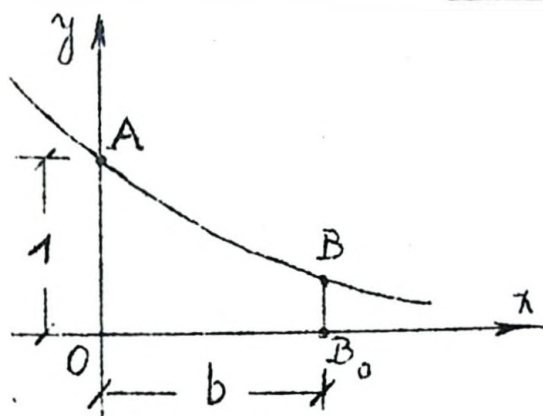


FIGURA N° 13

$$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

Ejemplo 2:

Calcular el valor de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$

Tomando un punto b interior al intervalo $(0, +\infty)$, existe la

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) \Big|_0^b = \log(1+b)$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \log(1+x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \log(1+b) = +\infty$$

luego, la integral propuesta no existe.

EJEMPLO 3:

Estudiar el comportamiento de la integral:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \quad \text{para } \underline{n > 0} \quad \text{y } \underline{a > 0}$$

a) Supongamos que $\underline{n \neq 1}$; para $\underline{b > 0}$ es:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} \Big|_a^b = \frac{1}{1-n} \left(b^{1-n} - a^{1-n} \right)$$

b) Supongamos que $\underline{n = 1}$; para $\underline{b > 0}$ es:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^n} = \log x \Big|_a^b = \log b - \log a$$

Tomando límites y haciendo tender $b \rightarrow +\infty$ resulta

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^n} = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-n} \left(b^{1-n} - a^{1-n} \right) = +\infty & \text{para } \underline{n < 1} \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-n} \left(b^{1-n} - a^{1-n} \right) = \frac{a^{1-n}}{1-n} & \text{para } \underline{n > 1} \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} (\log b - \log a) = +\infty & \text{para } \underline{n = 1} \end{cases}$$

De aquí se deduce que la función $\frac{1}{x^n}$ es solo integrable en el intervalo $(a, +\infty)$ solo cuando $\underline{n > 1}$ y en tal caso es

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{a^{1-n}}{1-n}$$

21.3. INTEGRAL DE LA CURVA NORMAL DE LA PROBABILIDAD

21.3.1.- LEY DE LAPLACE - GAUSS.-

Midiendo repetidas veces una magnitud X , cuidando de obtener la máxima exactitud en cada medida, llegaremos sin embargo a constatar que cada operación conduce a resultados discordantes, es decir, que cada determinación hecha:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ se halla afectada de error.

Si el verdadero valor de X de la magnitud X , que se mide, fuese conocido, los verdaderos errores cometidos serían:

$x - x_1; x - x_2; x - x_3; \dots; x - x_n$

En la mayor parte de los casos, x es desconocido, razón por la cual se adopta a:

$$\xi = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

como valor más probable de x , siendo:

$$\xi - x_1; \xi - x_2; \xi - x_3; \dots; \xi - x_n$$

los errores más probables que se cometen.-

Los errores cometidos en la medición de x , pueden ser:

- constantes o sistemáticos, que pueden apreciarse a priori,
- accidentales, que son variables a cada operación.-

El problema que se plantea de inmediato es la determinación de la ley matemática que nos dé la forma de como se van distribuyendo los errores accidentales.

Matemáticos insignes, tales como Euler, Bernoulli, Laplace, y Gauss, efectuaron hipótesis más o menos felices, lo mismo que Gauss, que dedujo de ellas una ley simple, en base a un postulado que lo condujo a una función conocida generalmente con el nombre de Ley de Laplace - Gauss, cuya expresión es:

$$y = k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1)$$

donde k es una constante que enseguida deduciremos Laplace la dedujo razonando desde el punto de vista de las probabilidades y Gauss dentro de la teoría de los errores.-

21.3.2 INTEGRAL DE LAPLACE - GAUSS

La curva normal de la probabilidad es ~~simétrica respecto del eje y~~, y además asintótica respecto del eje x. Como la suma de todas las probabilidades de que se produzca un error ~~accidental~~ es la certeza, se tendrá que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-x^2/2} dx = 1$$

$$k = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx} \quad (2)$$

El denominador de la expresión (2) representa el área encerrada por la curva (1) y el eje de las x, variando las abscisas de $-\infty$ a $+\infty$. El cálculo de este denominador nos conduce al estudio de la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (1)$$

Para obtener el valor de esta integral haremos uso del método de Chawenot.

Hagamos por consiguiente:

$$A = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (2')$$

y puesto que la integral definida es función de los límites, tendremos que también:

$$A = \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv$$

Multiplicando estas dos expresiones entre sí y siendo las variables t y v también independientes entre sí, será

$$A^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t^2 + v^2)} dt \cdot dv$$

Pongamos

$$v = t \cdot u$$

considerando a t como constante con respecto a v, tendremos

y la integración con respecto a v $\frac{dv}{dt} = t \frac{du}{dt}$ queda así sustituida por aquella con respecto a u, luego será:

$$A^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t e^{-t^2} (1 + u^2) du dt$$

Como u y t son independientes entre sí, en la segunda integral podemos considerar a u constante e integrar con respecto a t. En los límites tendremos una función de u; integrando ahora con respecto a esta variable y limitando, tendremos el valor numérico de A. He aquí el cálculo:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2} (1+u^2)}{2(1+u^2)} \cdot t \cdot dt = -\frac{1}{2(1+u^2)} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left[e^{-t^2} (1+u^2) \right] t \cdot dt$$

$$= -\frac{1}{2(1+u^2)} \left[e^{-t^2} (1+u^2) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2(1+u^2)}$$

Dado que:

$$A^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \left[\arctan u \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

la (2') se transforma ahora en:

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

y por consiguiente es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Otra forma de resolverla es pasando a coordenadas polares, mediante las fórmulas de transformación:

$$x = \rho \cos \omega \quad ; \quad y = \rho \sin \omega$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \omega & -\rho \sin \omega \\ \sin \omega & \rho \cos \omega \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \omega + \rho \sin^2 \omega = \rho$$

siendo J el jacobiano de esa transformación.-

$$\therefore dx dy = \rho d\rho d\omega$$

la (3) se convierte en:

$$A^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho \cdot d\rho \cdot d\omega$$

$$A^2 = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho \cdot d\rho \quad (4)$$

Cabe advertir que se han cambiado las variables x y y por las ρ y ω . Resolviendo la primera integral se obtiene 2π , y en la segunda integral resulta:

$$\int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho \cdot d\rho = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} d(-\rho^2) = -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

$$A = \sqrt{\pi}$$

Es decir, tendríamos finalmente:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

como expresión de la Ley de Laplace - Gauss.-

OBSERVACION:

Habiéndonos limitado solamente al estudio de las integrales impropias, no entramos en la discusión de las importantes propiedades de esta curva, que llena un capítulo importante de la Estadística y del Cálculo de errores, además de las aplicaciones a la ley normal de distribución de frecuencias y otras aplicaciones a la Geodesia y a la teoría cinética de los gases, que con la discusión de la ley de Maxwell, sería muy largo para exponer y caería fuera de los límites previamente impuestos a este trabajo. Un estudio más completo puede verse en los tratados que se indican en la bibliografía referente al Cálculo de las probabilidades y a la Estadística.-

21.4. INTEGRALES DE LAPLACE - APLICACIONES AL CALCULO DE LAS PROBABILIDADES

21.4.1.- Cálculo de la integral $I_{2n} = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx$

(para n entero y positivo)

$$I_{2n} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} x \cdot x^{2n-1} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} (-2x) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{2n-1} d(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2} \left(x^{2n-1} e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x^2} d(x^{2n-1}) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} x^{2n-1} e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} + \frac{2n-1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-2} dx$$

Como el $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2n-1} e^{-x^2} = 0$

$x \rightarrow 0$

es
$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-2} dx$$

fórmula de reducción que nos va a permitir calcular la integral pedida; en efecto:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{2n-1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-2} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-2} dx = \frac{2n-3}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-4} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Un caso particular de esta integral es esta otra:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} x^2 dx$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} x^2 dx = \frac{1}{h^3} \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} (hx)^2 \cdot d(hx)$$

hacemos la sustitución siguiente: $hx = t$

$$\therefore I = \frac{1}{h^3} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^2 \cdot dt$$

que es del tipo de la estudiada para $n = 1$, en consecuencia, en la expresión

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2} \cdot I_{2n-2}$$

aplicada para este caso da:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{4h^3}$$

Aparece esta integral al hacer el estudio del error standard, cuya expresión allí es:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} z^2 \cdot dz = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2 z^2} z^2 \cdot dz$$

$$\sigma^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4h^3} = \frac{1}{2h^2}$$

21.4.2.- Cálculo de la integral $I_{2n+1} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} dx$

para n entero y positivo.-

Integrando por partes, resulta:

$$I_{2n+1} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} x \cdot x^{2n} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cdot (-2x) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{2n} d(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2} \left[x^{2n} \cdot e^{-x^2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x^2} d(x^{2n}) =$$

$$= -\frac{1}{2} x^{2n} e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot 2n \cdot x^{2n-1} dx$$

Como el $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} \cdot x^{2n} = 0$

$$x \rightarrow 0$$

$$\therefore I_{2n+1} = n \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} dx$$

Es decir, que:

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2} I_{2n-1}$$

fórmula de reducción que nos permite calcular la integral pedida; en efecto:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} dx = \frac{2n}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} dx = \frac{2(n-2)}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-3} dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} \cdot dx = \frac{2 \cdot n \cdot 2(n-2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{2^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} \cdot dx = \frac{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{2^{n+1}} = \frac{n!}{2}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} \cdot dx = \frac{n!}{2}}$$

En cambio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} \cdot dx = 0$$

por ser:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Un caso particular de esta integral es el siguiente:

$$I = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-h^2 x^2} \cdot dx$$

$$I = -\frac{1}{2h^2} \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} (-2h^2 x) \cdot dx = -\frac{1}{2h^2} \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} \cdot d(-h^2 x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2h^2} \cdot e^{-h^2 x^2} \Big|_0^{\infty}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2h^2}$$

Esta integral aparece en el cálculo del error promedio, en la forma siguiente:

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} dz = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2 z^2} dz = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2h} = 1$$

$$\therefore n = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

21.5.- INTEGRALES DE EULER21.5.1.- Generalización del concepto de factorial

Definición: El producto de los n primeros números naturales se lo conoce con el nombre de factorial de n y se abrevia su escritura con la siguiente notación:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots 3.2.1 \quad (1)$$

De aquí se deduce que:

$$n! = n(n-1)!$$

la cual es válida para todo el valor de n positivo. Si $n=0$, de (2) resulta:

$$1! = 1.0! = 1$$

y para que sea válida esta relación admitimos que:

$$0! = 1$$

Tomada la función $y = n!$ sobre un gráfico cartesiano, se obtiene una gráfica puntual como puede verse en la figura nº 14, sólo válida para valores de $n \geq 0$ que varían en forma discreta. El problema que ahora se plantea es ver si existe una curva continua que pase por tales puntos cuando $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ y que proporcione una serie continua de valores para n no entero.

Considerando para ello la integral:

$\int x^n e^{-x} dx$ e integrándola por partes, se obtiene:

$$\int x^n e^{-x} dx = - \int x^n d(e^{-x}) = - \left[x^n e^{-x} - \int e^{-x} d(x^n) \right] =$$

$$= - x^n e^{-x} + n \int e^{-x} \cdot n \cdot x^{n-1} dx$$

$$\therefore \int x^n e^{-x} dx = - x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

Elegimos los límites de integración de modo que se anule el primer término del segundo miembro. Para todo valor de $n \geq 0$, sin necesidad de ser entero, sucede que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \cdot e^{-x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty e^x$$

aplicando a esta última expresión la regla de L'Hôpital n veces, resulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \cdot e^{-x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{e^x} = 0$$

$$\therefore \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \quad (n > 0) \quad (4)$$

comparando la expresión (4) con la (2), se observa la similitud en sus expresiones. Designando ahora con

$$T(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

y con $T(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx$

se tiene en la (4) que:

$$T(n+1) = nT(n) \quad (5)$$

que constituye una generalización de la expresión (2), válida no solo para valores naturales de n, sino aún más, para valores de n > 0 no enteros..

Esta expresión

$$T(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx$$

se la conoce con el nombre de función gamma de Euler.

21.5.2.- Funciones de Euler.

Legendre A.M. (1752-1833) ha dado el nombre de integral de Euler de primera Especie a la expresión:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} \cdot dx$$

también conocida con el nombre de función beta.

Con el nombre de integral euleriana de segunda especie o función gamma se designa a la expresión:

$$T(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx \quad (n > 0)$$

Ambas integrales intervienen en importantes cuestiones de la Técnica y de la Estadística que justifican su estudio detallado; solo haremos aquí una exposición didáctica, matizada con algunas aplicaciones, ya que un estudio detallado requeriría un espacio mayor.

21.5.3.- Función Gamma:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (n > 0) \quad (6)$$

Veamos si esta integral converge, para lo cual aplicaremos el criterio de convergencia dado por el teorema 5.2. pág. 29. Si elegimos $v = 2$, se tendrá el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^v e^{-x} x^{n-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^{v+n-1} = 0$$

pues la exponencial e^{-x} tiende a cero más rápidamente que cualquier potencia de x , para $n > 0$; por otra parte, dado que tal límite conduce a una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$; la aplicación reiterada de la regla de L'Hôpital $(v + n - 1)$ veces, da un límite cero. Siendo $v > 1$, el teorema citado nos permite asegurar que la integral dada es convergente.

Calculemos su valor; para ello, integrando por partes, resulta:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = - \int_0^{\infty} x^{n-1} d(e^{-x}) = - \left[x^{n-1} e^{-x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} d(x^{n-1})$$

$$\Gamma(n) = (n-1) \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1) \quad (7)$$

fórmula de recurrencia llamada ecuación funcional de la función gamma, que nos permite escribir:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \Gamma(n-2) = (n-1)(n-2) \dots 3,2,1. \Gamma \quad (1)$$

pero por (6) es:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots 3,2,1.$$

es decir

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!} \quad (8)$$

para n positivo y entero.

Utilizando cualquier medio de integración, por ejemplo, el desarrollo en serie, se calculan los valores de $\Gamma(n)$ para todos los correspondientes de n comprendidos entre (1 y 2), tal como lo ha hecho B.O.Pierce: A Short Table of Integrals, pag. 140; se podrá calcular con el auxilio de la ecuación funcional de recurrencia, los valores de la función gamma en el intervalo inmediato, $2 < n \leq 3$, y a su vez, conocidos éstos, los de la integral en el intervalo $3 < n \leq 4$, y así sucesivamente.

Queda por definir la función $\Gamma(n)$ para valores negativos de n . La ecuación funcional de recurrencia (7) nos permite escribir:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad (9)$$

la fórmula (9) carece de significado cuando $n \rightarrow 0$, pues el

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \Gamma(n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \Gamma(n) = -\infty$$

de lo que deducimos que la función gamma es discontinua en el punto (0/0).

Si un número n , comprendido en el intervalo $-1 < n < 0$, se lo sustituye en la (9), el segundo miembro da el valor $\Gamma(-n)$, pues, para $n < 0$ y $n > -1$ ocurre que $n+1$ se halla en el intervalo positivo $(0/1)$ en el cual los valores de $\Gamma(n)$ son conocidos. Si por ejemplo es

$$n = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad n+1 = \frac{1}{2}$$

por consiguiente

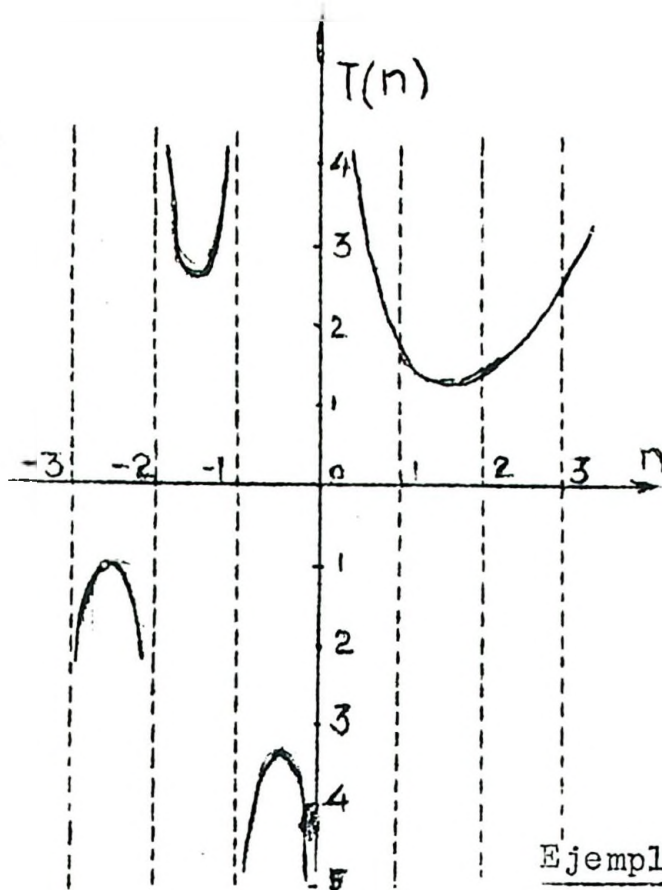
$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Si $n = -0,9$ será $n+1 = 0,1$

$$\therefore \Gamma(-0,9) = \frac{\Gamma(0,1)}{-0,9}$$

De esta manera se calculan los valores de $\Gamma(n)$ para $-1 < n < 0$; conocidos éstos, con la ecuación funcional de recurrencia (9) se calculará de la misma manera los valores de $\Gamma(n)$ para $-2 < n < -1$, y así sucesivamente.

Para $n = -1, -2, -3, \dots$, la función $\Gamma(n)$ toma valores infinitos como puede verse en la figura nº 15.

Ejemplo 1:Calcular el valor de $T(3,6)$ 

$$T(3,6) = 2,6 T(2,6) = 2,6 \cdot 1,6 T(1,6)$$

por la fórmula (7):

$$\log T(3,6) = \log 2,6 + \log 1,6 + \log T(1,6) \text{ de las tablas de Pierce.}$$

 $1 < n \leq 2$ se obtiene:

$$\log T(1,6) = 1,9511$$

$$\log T(3,6) = 0,4150 + 0,2041 + 1,9511$$

$$\log T(3,6) \approx 0,5702$$

$$T(3,6) = 3,717$$

Ejemplo 2:Calcular el valor de $T(0,5)$

Por la expresión (9):

$$T(0,5) = \frac{T(1,5)}{0,5} = 2 T(1,5)$$

$$T(1,5) = 0,8862 \text{ (Tablas de Pierce)}$$

$$\therefore T(0,5) = 2 \cdot 0,8862 \approx 1,772$$

Ejemplo 3:Calcular el valor de $T(0,5)$

Por la expresión (9)

$$T(-0,5) = \frac{T(0,5)}{-0,5} = -2 T(0,5) = -4 T(1,5) \quad (\text{Ej. 9})$$

$$\therefore T(0,5) = -4 \cdot 0,8862 = -3,545$$

21.5.4.- Cálculo de $T\left(\frac{1}{2}\right)$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

hagamos $x = y^2 \quad \therefore \quad dx = 2y \cdot dy$

$$\therefore T\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\left[T\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

pasando ahora a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

es $dx dy = \rho d\rho d\theta$

en donde:

$$\rho = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix}$$

es el jacobiano de la transformación.

A demás $x^2 + y^2 = \rho^2$

$$\begin{aligned} \therefore \left[T\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \Big|_0^{\infty} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi \end{aligned}$$

$$\boxed{T\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

las tablas dan $\sqrt{\pi} = 1,772$ como valor aproximado de $T(0,s)$

21.5.5.- Extensión del factorial a los números racionales

De la fórmula (8) :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

si $n = \frac{3}{2}$, obtenemos

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)!$$

si $n = \frac{1}{2}$, es

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)!$$

y si $n = 1$, resulta: $\Gamma(1) = 0! = 1$

de modo que si se logra calcular $\left(\frac{1}{2}\right)!$, mediante la ecuación funcional de recurrencia (9), se podrá calcular el $\left(\frac{m}{n}\right)!$, siendo m y n números enteros.

Cálculo del $\left(\frac{1}{2}\right)!$

Por definición de función gamma es:

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{1/2} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

Si hacemos $x = y^2$ es $dx = 2y \cdot dy$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} \cdot y^2 \cdot dy$$

Dado que la integral definida (propia o impropia) es función de los límites de integración, se puede escribir que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)! &= 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cdot z^2 \cdot dz \\ \therefore \left[\left(\frac{1}{2}\right)!\right]^2 &= 4 \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cdot z^2 \cdot dz \int_0^{\infty} e^{-y^2} \cdot y^2 \cdot dy \\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)!\right]^2 &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(z^2+y^2)} \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot dz \cdot dy \end{aligned}$$

pasando a coordenadas polares, mediante la transformación

$$\begin{cases} z = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

es $dy \cdot dz = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$ y $\rho =$ jacobiano de la transformación

$$z^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1}{2} \right)! \right]^2 &= 4 \int_0^\infty d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^5 e^{-\rho^2} \cdot \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta) d\theta \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta &= \left[\frac{3}{8} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$$

$$\therefore \left[\left(\frac{1}{2} \right)! \right]^2 = 4 \cdot \frac{\pi}{16} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^5 d\rho$$

$$\int_0^\infty e^{-\rho^2} \cdot \rho^5 d\rho = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \rho^4 [-2\rho e^{-\rho^2} d\rho] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \rho^4 d(e^{-\rho^2}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \left[e^{-\rho^2} \cdot \rho^4 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\rho^2} d(\rho^4) \right] = \frac{1}{2} \cdot 4 \int_0^\infty \rho^3 e^{-\rho^2} d\rho \\
 &= \int_0^\infty \rho^2 d(e^{-\rho^2}) = 2 \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho = - \int_0^\infty d(e^{-\rho^2}) = -e^{-\rho^2} \Big|_0^\infty = 1 \\
 \therefore \left[\left(\frac{1}{2} \right)! \right]^2 &= 4 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Aplicando la fórmula (9) de recurrencia, se obtiene:

$$\left(-\frac{1}{2} \right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} \right)}{\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{1}{2} \right)!$$

$$\left(-\frac{1}{2} \right)! = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \therefore \boxed{\left(-\frac{1}{2} \right)! = \sqrt{\pi}}$$

21.5.6.- APLICACIONES DE LA FUNCION GAMMA

a) Cálculo de integrales trigonométricas

$$I) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \Theta \cdot \sin^{2n-1} \Theta \cdot d\Theta \quad (1)$$

para $\underline{m > 0}$ y $\underline{n > 0}$

Aplicando la definición de función gamma, es:

$$\Gamma(m) \cdot \Gamma(n) = \int_0^\infty s^{m-1} e^{-s} ds \cdot \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

para $\underline{m > 0}$ y $\underline{n > 0}$

haciendo $s = x^2 \quad \therefore \quad ds = 2x \, dx$

$t = y^2 \quad \therefore \quad dt = 2y \, dy$

resulta:

$$\begin{aligned} T(m) T(n) &= \int_0^\infty 2x^{2m-1} e^{-x^2} dx \int_0^\infty 2y^{2n-1} e^{-y^2} dy = \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

pasando a coordenadas polares con la transformación:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} T(m) T(n) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty (\rho \cos \theta)^{2m-1} (\rho \operatorname{sen} \theta)^{2n-1} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \operatorname{sen}^{2n-1} \theta \, d\theta \int_0^\infty \rho^{2m+2n-2} e^{-\rho^2} 2\rho \, d\rho \end{aligned}$$

hagamos $\rho^2 = z \quad \therefore \quad 2\rho \, d\rho = dz$

$$\therefore T(m) T(n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \operatorname{sen}^{2n-1} \theta \, d\theta \int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-z} \, dz$$

pero $\int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-z} \, dz = T(m+n)$

$$\therefore T(m) \cdot T(n) = 2 T(m+n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \cdot \sin^{2n-1} \theta \cdot d\theta$$

o sea

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta \cdot d\theta = \frac{T(m) \cdot T(n)}{2 T(m+n)}} \quad (2)$$

$$\text{II) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \cdot d\theta$$

para $n > -1$

Si en la integral anterior hacemos la siguiente sustitución:

$$2m-1 = n \quad 2n-1 = 0$$

será

$$m = \frac{n+1}{2} \quad \text{y} \quad n = \frac{1}{2}$$

obtenemos en (2):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \cdot d\theta = \frac{T\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot T\left(\frac{1}{2}\right)}{2 T\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \frac{T\left(\frac{n+1}{2}\right)}{T\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

para $n > -1$

y por razones de simetría, también se podrá escribir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \cdot d\theta = \frac{T\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}}{2 T\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \quad \text{para } n > -1$$

pues bastará cambiar $2n-1$ por n y $2m-1$ por 0.-Si n es número entero par, la aplicación reiterada de la ecuación fundamental de recurrencia (7), nos permite escribir:

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(\frac{n+1}{2} - 1) \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2} - 1)}{(\frac{n}{2} + 1 - 1) \cdot \Gamma(\frac{n}{2} + 1 - 1)} = \frac{(\frac{n-1}{2}) \Gamma(\frac{n-1}{2})}{\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \dots \frac{2}{2} \Gamma(\frac{2}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(n-1)(n-3) \dots 1}{n(n-2) \dots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Si n es número entero impar, haciendo el mismo razonamiento, se obtiene:

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \dots \frac{2}{2} \Gamma(\frac{2}{2})}{\frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{(n-1)(n-3) \dots 2}{n(n-2) \dots 1}$$

De modo que si n es par:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \frac{(n-1)(n-3) \dots 1}{n(n-2) \dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (3)$$

n es impar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \frac{(n-1)(n-3) \dots 2}{n(n-2) \dots 1} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4)$$

b) FORMULA DE WALLIS.-

Siendo en el primer cuadrante $(0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin \theta < 1 \quad \text{para} \quad x < \frac{\pi}{2}$$

es válida la expresión

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \theta \, d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta \, d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} \theta \, d\theta$$

y teniendo en cuenta las expresiones (3) y (4) anteriores, resulta:

$$\frac{2n(2n-2)\dots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5\cdot 3} < \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4\cdot 2} < \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3}$$

$$\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\dots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\dots (2n-1)(2n+1)} < \frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\dots (2n-2)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\dots (2n-1)(2n-1)}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\dots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\dots (2n-1)(2n-1)}} \quad (5)$$

que se denomina Fórmula de Wallis.

c) Longitud de la Lemniscata

Se la encuentra por primera vez en un célebre artículo publicado en Acta eruditorum de septiembre de 1694 por Jacobo Bernoulli. Fué el conde de Fagnano quien se ocupó antes que ninguno, en 1750, de su rectificación, conduciendo su estudio, a la consideración de las funciones elípticas que aparecieron por este motivo en el campo del Análisis. Durante mucho tiempo quedó ignorado el hecho de que la lemniscata de Bernoulli es un caso especial de la curva de Cassini y su identidad fué probada por primera vez publicamente, por G. Saladini en 1806, pero tal demostración quedó ignorada, hasta que veinticuatro años más tarde fué averdida tal identidad por Pedro Ferroni en su obra titulada Theoria exponentialium, log. et trig. sublimis. (Firenze, 1782).

Su ecuación polar es:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= a^2 \cos 2\theta \\ \rho \, d\rho &= -a^2 \sin 2\theta \, d\theta \\ d\rho &= \frac{-a^2 \sin 2\theta \, d\theta}{a \sqrt{\cos 2\theta}} \end{aligned}$$

Un elemento ds del arco de lemniscata viene dado por:

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2}$$

$$(d\rho)^2 = \frac{a^2 \sin^2 2\theta (d\theta)^2}{\cos^2 2\theta}$$

$$\therefore ds = \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta} + a^2 \cos^2 2\theta} \cdot d\theta$$

$$ds = a \sqrt{\frac{\sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta} + \cos^2 2\theta} \cdot d\theta = \frac{a d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

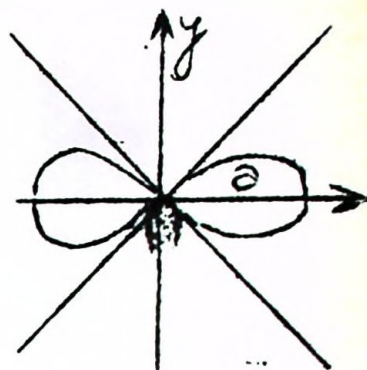


Fig No 16

designando con L a la longitud total de la curva, es:

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

haciendo $\alpha = 2\theta$ es $d\alpha = 2d\theta$

y si $\theta = 0$ $\therefore \alpha = 0$
 $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a d\alpha}{2\sqrt{\cos \alpha}} = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}} d\alpha$$

Por la (4) de la pág. 67, es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}} d\alpha = \frac{T(-\frac{1}{2} + 1)}{T(-\frac{1}{4} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{T(\frac{1}{4})}{T(\frac{3}{4})} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore L = a \sqrt{\pi} \cdot \frac{T(\frac{1}{4})}{T(\frac{3}{4})}$$

como

$$T(n) = \frac{1}{n} \cdot T(n+1)$$

$$\therefore T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{T'\left(\frac{5}{4}\right)}{\frac{1}{4}} = 4 T'\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$T'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{T'\left(\frac{7}{4}\right)}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} T'\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\therefore L = a \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{4 T'\left(\frac{5}{4}\right)}{\frac{4}{3} T'\left(\frac{7}{4}\right)} = 3 \sqrt{\pi} \frac{T(1,25)}{T(1,75)} \cdot a$$

y utilizando la tabla de Pierce resulta:

$$L = 5,24 \cdot a$$

d) Aplicación a un problema de la Dinámica.-

Sea una partícula de masa m animada de un movimiento rectilíneo bajo la acción de una fuerza atractiva cuya intensidad es inversamente proporcional a la distancia entre la posición de la partícula y el centro de atracción.

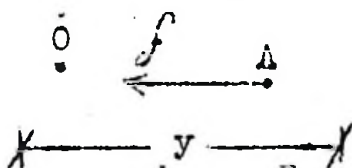


Fig. Nº 17

La ecuación de ese movimiento se obtiene de la definición de fuerza, según la ley de Newton. Sea O el centro de atracción y A la partícula, e indiquemos con y la distancia que los separa y con f la fuerza atractiva; se obtiene por la ley citada:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{k}{y}$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{a}{y}$$

en donde se ha hecho

$$a = \frac{k}{m}$$

es una ecuación no lineal del tipo:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = F(y)$$

que se resuelve multiplicando ambos miembros por $2 \frac{dy}{dt}$:
en efecto:

$$2 \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = - 2 \frac{dy}{dt} \cdot \frac{a}{y}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = - 2a \frac{d}{dt} (\log y)$$

integrando con respecto a t da:

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = - 2a \log y + c$$

Si la velocidad de la partícula es cero cuando $y = y_0$, es:

$$0 = - 2a \log y_0 + c \quad \therefore \quad c = 2a \log y_0$$

$$y \text{ es: } \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 2a (\log y_0 - \log y)$$

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 2a \log \frac{y_0}{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = - \sqrt{2a \log \frac{y_0}{y}}$$

se ha colocado el signo negativo delante de la raíz cuadrada debido a que y es una función decreciente de t.

$$dt = \frac{dy}{-\sqrt{2a \log \frac{y_0}{y}}} = \frac{dy}{-\sqrt{2a} \cdot \sqrt{\log \frac{y_0}{y}}}$$

e integrando es:

$$t = - \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\log \frac{y_0}{y}}}$$

si hacemos

$$\log \frac{y_0}{y} = x \quad \therefore \quad \frac{y_0}{y} = e^x$$

y es

$$y = y_0 e^{-x}$$

Si designamos ahora con T al tiempo necesario para que la partícula alcance el centro de atracción, resulta $y = 0$ y en (1) es:

$$0 = y_0 e^{-x}$$

y aquella integral se transforma en esta otra:

$$dy = -y_0 e^{-x} dx$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{y_0 e^{-x} dx}{\sqrt{x}} = \frac{y_0}{\sqrt{2a}} \cdot \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{y_0}{\sqrt{2a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

∴

$$T = y_0 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \cdot \text{seg}$$

21.5.7.- FUNCION BETA

Si en la expresión (2), N° 6, a), pág. 65:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} \theta \cdot \sin^{2n-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

hacemos $\cos^2 \theta = x$ ∴ $-2 \cos \theta \sin \theta d\theta = dx$

si $\theta = 0$ es $\cos^2 \theta = 1$ ∴ $x = 1$

si $\theta = \frac{\pi}{2}$ es $\cos^2 \theta = 0$ ∴ $x = 0$

$$\therefore 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-2} \theta \cdot \sin^{2n-2} \theta (\cos \theta \sin \theta d\theta) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$= \int_1^0 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\therefore \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (1)$$

se obtiene otra función de Euler conocida con el nombre de Función Beta o integral de Euler de primera especie, que se acostumbra a - indicar así:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} dx \quad (2)$$

de modo que la expresión anterior:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (3)$$

nos da una relación entre las funciones beta y gamma que nos permite calcular a una función de la otra.

Esta última expresión (3) se conoce con el nombre de ecuación de Jacobi.-

EJEMPLO

Calcular el valor de la integral $\int_0^1 5(1-x)^{\frac{1}{2}} x^3 dx$

Esta integral no es más que la integral representada por la función beta siguiente:

$$\begin{aligned} 5 \cdot B\left(4, \frac{3}{2}\right) &= 5 \int_0^1 x^3 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\Gamma(4) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(4 + \frac{3}{2}\right)} = \\ &= 5 \frac{\Gamma(4) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} \end{aligned}$$

pero, por la ecuación funcional de recurrencia es:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4) = 3! \quad \text{por ser } \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^5} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{5} (1-x)^{1/2} x^3 dx = \frac{1/2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{9/2 \cdot 7/2 \cdot 5/2 \cdot 3/2 \cdot 1/2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot 5$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{5} (1-x)^{1/2} x^3 dx = \frac{32}{63}}$$

a) CALCULO DE LA FUNCION BETA POR FACTORIALES

$$(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{m} \int_0^1 (1-x)^{n-1} \cdot m x^m dx =$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^1 (1-x)^{n-1} d(x^m) = \frac{1}{m} \left[(1-x)^{n-1} x^m \right]_0^1 - \int_0^1 x^m d \left[(1-x)^{n-1} \right] =$$

$$= \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx$$

$$\boxed{B(m, n) = \frac{n-1}{m} \cdot B(m+1, n-1)}$$

(4)

fórmula de recurrencia que nos permite escribir:

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m} \cdot B(m+1, n-1)$$

$$B(m+1, n-1) = \frac{n-2}{m+1} \cdot B(m+2, n-2)$$

$$B(m+2, n-2) = \frac{n-3}{m+2} \cdot B(m+3, n-3)$$

$$B(m+n-2, 2) = \frac{2}{m+n-2} \int_0^1 x^{m+n-2} dx$$

Sumando miembro a miembro se obtiene:

$$B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2}{m(m+1)(m+2) \cdots (m+n-2)} \int_0^1 x^{m+n-2} dx$$

pero $\int_0^1 x^{m+n-2} dx = \frac{x^{m+n-1}}{m+n-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+n-1}$

$$\therefore B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2}{m(m+1)(m+2) \cdots (m+n-2)(m+n-1)}$$

multiplicando y dividiendo por $(m-1)!$ es:

$$B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2 (m-1)!}{m(m+1)(m+2) \cdots (m+n-1) \cdot (m-1)!}$$

$$B(m, n) = \frac{(m-1)! (n-1)!}{(m+n-1)!}$$

(5)

Teniendo en cuenta que:

$$T(m) = (m-1)!$$

$$T(n) = (n-1)!$$

$$T(m+n) = (m+n-1)!$$

la expresión (5) podría haberse obtenido directamente de la (3).-

b) Distintas expresiones de la función beta.-

si en la expresión

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

I) hacemos

$$x = \zeta + \frac{1}{2} \quad \therefore \quad dx = d\zeta$$

resulta para

$$x = 0 \quad \therefore \quad \zeta = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 \quad \therefore \quad \zeta = \frac{1}{2}$$

$$B(m, n) = \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\zeta + \frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \zeta\right)^{n-1} d\zeta$$

II) haciendo

$$\zeta = \frac{t}{2s} \quad \text{donde } s > 0 \quad \therefore \quad d\zeta = \frac{dt}{2s}$$

$$\text{para } \zeta = \frac{1}{2} \quad \text{es} \quad -\frac{1}{2} \cdot 2s = t \quad t = -s$$

$$\zeta = -\frac{1}{2} \quad \text{es} \quad t = +s$$

$$B(m, n) = \int_{-s}^{+s} \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2s}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2s}\right)^{n-1} \frac{dt}{2s}$$

$$B(m, n) = (2s)^{-(m+n-1)} \int_{-s}^{+s} (s+t)^{m-1} (s-t)^{n-1} dt$$

III) haciendo

$$x = \sin^2 \theta \quad \therefore \quad dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

para

$$x = 0 \quad \therefore \quad \sin^2 \theta = 0 \quad \text{es} \quad \theta = 0$$

$$x = 1 \quad \therefore \quad \sin^2 \theta = 1 \quad \text{es} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

luego

$$\begin{aligned} B_{(m,n)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{m-1} (1 - \sin^2 \theta)^{n-1} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2} \theta \cdot \cos^{2n-2} \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \quad B_{(m,n)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cdot \cos^{2n-1} \theta d\theta$$

Expresión ya hallada en (2), pág. 65, y cuya comparación con ésta conduce a la fórmula (3), pág. 73.-

c) Aplicaciones de las funciones beta y gamma a la ESTADISTICAI) Valor más probable en la probabilidad de las hipótesis

Supongamos que en n experiencias, un suceso, de probabilidad desconocida, pero que suponemos constante en cada prueba, es x y su probabilidad opuesta es $(1-x)$; se tendrá que la probabilidad para que en las n pruebas se haya verificado v veces el suceso es, según el esquema de Bernoulli:

$$C_n^v \cdot x^v \cdot (1-x)^{n-v} = \binom{n}{v} x^v \cdot (1-x)^{n-v}$$

Si con $\omega(x)$ representamos la probabilidad que ella sea x , su probabilidad elemental, aplicando la fórmula de Bayes, se tendrá que la probabilidad $P(x)$ para que el suceso se deba a una probabilidad elemental comprendida entre x y $x+dx$, será:

$$P(x) dx = \frac{\omega(x) \binom{n}{v} x^v \cdot (1-x)^{n-v} dx}{\int_0^1 \omega(x) x^v (1-x)^{n-v} dx}$$

Si admitimos que la probabilidad $\omega(x)$ sea constante, simplificando la expresión anterior se tiene:

$$P(x) = \frac{x^v (1-x)^{n-v}}{\int_0^1 x^v (1-x)^{n-v} dx} \quad (1)$$

pero

$$\int_0^1 x^v (1-x)^{n-v} dx = B(v+1, n-v+1)$$

representando con B a la función beta de Euler:

pero

$$B(a, n) = \frac{\Gamma(n) \Gamma(a)}{\Gamma(a+n)} \quad (\text{pág. 73})$$

que aplicada a nuestro caso da:

$$B(v+1, n-v+1) = \frac{\Gamma(n-v+1) \cdot \Gamma(v+1)}{\Gamma(n+2)}$$

luego en (1) se tiene:

$$P(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(v+1)\Gamma(n-v+1)} \cdot x^v(1-x)^{n-v}$$

siendo $\frac{P(x)}{P'(x)}$ una función de los valores de x , tomará el valor máximo cuando $\frac{P(x)}{P'(x)} = 0$, vale decir:

$$P'(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(v+1)\Gamma(n-v+1)} \left[v \cdot x^{v-1}(1-x)^{n-v} - x^v(n-v)(1-x)^{n-v-1} \right]$$

como

$$\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(v+1)\Gamma(n-v+1)} \neq 0$$

es

$$v \cdot x^{v-1}(1-x)^{n-v} - x^v(n-v)(1-x)^{n-v-1} = 0$$

El cálculo se simplifica haciendo la siguiente transformación:

$$P'(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(v+1)\Gamma(n-v+1)} x^v(1-x)^{n-v} \left[\frac{v}{x} - \frac{n-v}{1-x} \right] = 0$$

$$P'(x) = P(x) \frac{v(1-x) - (n-v)x}{x(1-x)} = 0$$

• • •

$$v(1-x) - (n-v)x = 0$$

luego es:

$$x = \frac{v}{n}$$

De aquí deducimos que el valor más probable de la probabilidad buscada $P(x)$ es el valor dado por su frecuencia ya que $\frac{v}{n}$ es simplemente la frecuencia del suceso.

OBSERVACION:

El resultado anterior solo es posible observarlo cuando se supone que $U(x) = \text{constante}$.

II) ESQUEMA DEL CONTAGIO O ESQUEMA DE POLYA

El esquema de Polya se obtiene de la siguiente manera:

Consideremos una urna que contenga en el comienzo del ensayo N bolas, de las cuales N_p son negras y N_q son blancas.

Efectuamos extracciones sucesivas de la urna, con la precaución de agregar, después de cada extracción, en reemplazo de la bola extraída, $1 + \Delta$ bolas del mismo color que la extraída. Con Δ indicaremos a un número entero positivo, nulo o negativo, que se conoce con el nombre de orden del contagio.

Si $\Delta = 0$ obtenemos el esquema clásico de Bernoulli; y si $\Delta = -1$, obtenemos el esquema de las pruebas repetidas sin reposición.

El esquema de Polya contiene a los dos casos anteriores como casos particulares. Se le conoce con el nombre de esquema del contagio, por cuanto, si $\Delta > 0$, la extracción de una bola de un cierto color favorece la obtención de otras bolas del mismo color en las extracciones siguientes, vale decir, la verificación de un suceso es contagioso de una prueba a la siguiente.

Si en cambio es $\Delta < 0$, el suceso contrario queda favorecido en la extracción siguiente.

Ejemplos de tal distribución estadística, se presenta en:

- La expulsión de un jefe de oficina provoca la salida de todo el personal de la misma;
- La aparición de un caso mortal de una enfermedad contagiosa en una población, favorece la aparición de nuevos casos;
- La declaración de un incendio en un grupo de viviendas favorece la extensión del mismo a todo el conjunto.

La probabilidad de que se produzca la extracción de v bolas negras y $(n-v)$ bolas blancas, en un determinado orden, por ejemplo, el siguiente:

$$\underbrace{n . n . n n}_{v} \quad . \quad \underbrace{b . b . b b}_{n-v}$$

la designamos con $P_{n,v}$ y ello se verifica de C_n^v maneras distintas. La probabilidad de sacar bola negra en la primera extracción es:

$$p_1 = \frac{N_p}{N}$$

Verificado el suceso, bola negra, repondríamos a ésta acompañada con Δ bolas negras, con lo que obtendremos, antes de hacer la segunda extracción, $N + \Delta$ bolas en la urna, de las cuales, $N_p + \Delta$ son negras y N_q blancas.

La probabilidad de sacar bola negra en la segunda extracción es:

$$p_2 = \frac{Np + \Delta}{N + \Delta}$$

y al sacarla, la repondríamos con Δ bolas negras, con lo cual la urna contendrá $N + 2\Delta$ bolas, y entre ellas, habrá $Np + 2\Delta$ negras y Nq blancas.

Así sucesivamente, la probabilidad de sacar bola negra en la v -ésima extracción será:

$$p_v = \frac{Np + (v-1)\Delta}{N + (v-1)\Delta}$$

Si a partir de la v -ésima extracción, debemos sacar bola blanca, como la urna contiene $N + v\Delta$ bolas, por haberse verificado el suceso anterior, la probabilidad de sacar bola blanca es:

$$p'_1 = \frac{Nq}{N + v\Delta}$$

Si el suceso se ha verificado, debemos agregar Δ bolas blancas, con lo cual la urna contendrá $N + (v+1)\Delta$ bolas, de las cuales $Np + v\Delta$ son negras y $Nq + \Delta$ son blancas. Al obtener nuevamente bola blanca, en la extracción siguiente es:

$$p'_2 = \frac{Nq + \Delta}{N + (v+1)\Delta}$$

Así sucesivamente, en la extracción $(n-v)$ -ésima, en la cual se vuelve a verificar el suceso, resultará que:

$$p'_{n-v} = \frac{Nq + (n-v-1)\Delta}{N + (n-1)\Delta}$$

Como el suceso puede realizarse de C_n^v formas distintas, todas ellas con la misma probabilidad, aplicando el principio de las probabilidades compuestas, resulta que:

$$P_{n,v} = C_n^v \cdot \frac{Np}{N} \cdot \frac{Np + \Delta}{N + \Delta} \cdot \frac{Np + 2\Delta}{N + 2\Delta} \cdots \frac{Np + (v-1)\Delta}{N + (v-1)\Delta} \cdot \frac{Nq}{N + v\Delta} \cdot \frac{Nq + \Delta}{N + (v+1)\Delta} \cdots \frac{Nq + (n-v-1)\Delta}{N + (n-1)\Delta} \quad (1)$$

Si con $\delta = \frac{\Delta}{N}$ designamos al contagio relativo, la (1) puede transformarse dividiendo por N:

$$P_{n,v} = C_n^v \cdot \frac{p}{1} \cdot \frac{p + \delta}{1 + \delta} \cdot \frac{p + 2\delta}{1 + 2\delta} \cdots \frac{p + (v-1)\delta}{1 + (v-1)\delta} \cdot \frac{q}{1 + v\delta} \cdot \frac{q + \delta}{1 + (v+1)\delta} \cdots \frac{q + (n-v-1)\delta}{1 + (n-1)\delta}$$

dividiendo ahora por δ es:

$$P_{n,v} = C_n^v \cdot \frac{p/\delta}{1/\delta} \cdot \frac{p/\delta + 1}{1/\delta + 1} \cdot \frac{p/\delta + 2}{1/\delta + 2} \cdots \frac{p/\delta + (v-1)}{1/\delta + (v-1)} \cdot \frac{q/\delta}{1/\delta + v} \cdot \frac{q/\delta + 1}{1/\delta + (v+1)} \cdots \frac{q/\delta + (n-v-1)}{1/\delta + (n-1)}$$

designemos a $\frac{p}{\delta} = \lambda$; $\frac{q}{\delta} = \mu$; $\frac{1}{\delta} = \xi$

con lo cual obtenemos que:

$$P_{n,v} = C_n^v \cdot \frac{\lambda}{\xi} \cdot \frac{\lambda + 1}{\xi + 1} \cdot \frac{\lambda + 2}{\xi + 2} \cdots \frac{\lambda + (v-1)}{\xi + (v-1)} \cdot \frac{\mu}{\xi + v} \cdot \frac{\mu + 1}{\xi + (v+1)} \cdots \frac{\mu + (n-v-1)}{\xi + (n-1)}$$

$$\dots\dots\dots \frac{\mu + (n-v-1)}{3 + (n-1)} \quad (2)$$

pero

$$\lambda (\lambda+1)(\lambda+2) \dots\dots \left[\lambda + (v-1) \right] = \frac{\lambda (\lambda+1)(\lambda+2) \dots\dots \left[\lambda + (v-1) \right] (\lambda-1)!}{(\lambda-1)!}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+v)}{\Gamma(\lambda)}$$

Análogamente

$$\mu (\mu+1)(\mu+2) \dots\dots \left[\mu + (n-v-1) \right] = \frac{\Gamma(\mu+n-v)}{\Gamma(\mu)}$$

$$3 (3+1)(3+2) \dots\dots \left[3 + (n-1) \right] = \frac{\Gamma(3+n)}{\Gamma(3)}$$

Sustituyendo estos valores en (2), es:

$$P_{n,v} = C_n^v \frac{\Gamma(\lambda+v)}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n-v)}{\Gamma(\mu)} \cdot \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3+n)}$$

$$P_{n,v} = C_n^v \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+v) \Gamma(\mu+n-v)}{\Gamma(3+n)}$$

siendo

$$\lambda + v + \mu + n - v = \lambda + \mu + n = \frac{p}{\delta} + \frac{q}{\delta} + n = \frac{p+q}{\delta} + n = \frac{1}{\delta} + n = 3 + n$$

y también, recordando que por la expresión (3) de 21.5.7.-

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

aplicada a este caso resulta:

$$P_{n,v} = C_n^v \frac{T(z)}{T(\lambda)T(\mu)} \cdot B(\lambda + v, \mu + n - v)$$

es decir que:

$$P_{n,v} = C_n^v \frac{T(z)}{T(\lambda)T(\mu)} \cdot \int_0^1 x^{\lambda+v-1} (1-x)^{\mu+n-v-1} dx$$

y si ponemos

$$H = \frac{T(z)}{T(\lambda)T(\mu)} \quad y \quad C_n^v = \frac{n!}{v! (n-v)!}$$

resulta:

$$P_{n,v} = H \cdot \frac{n!}{v! (n-v)!} \int_0^1 x^{\lambda+v-1} (1-x)^{\mu+n-v-1} dx$$

21.6.- INTEGRAL DE DIRICHLET

21.6.1.- DEFINICION

Una integral impropia convergente, útil en muchas aplicaciones, es la:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$$

que ha sido estudiada por Dirichlet, P.G.L. (1805-1859) en el Crelle's Journ., vol. XVII.-

21.6.2.- VALOR DE LA INTEGRAL

Consideremos la integral $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx$ y calculemos la derivada bajo el signo de integral, para x constante, con respecto a y ; se

tiene:

$$\int e^{-x} \cos(yx) dx = \frac{1}{y} \int e^{-x} d(\sin yx) = e^{-x} \frac{\sin yx}{y} -$$

$$- \frac{1}{y} \int \sin(yx) d(e^{-x}) = e^{-x} \frac{\sin yx}{y} + \frac{1}{y} \int e^{-x} \sin(yx) dx$$

pero $\int e^{-x} \sin(yx) dx = \frac{1}{y} \int e^{-x} d(\cos yx) = -\frac{e^{-x} \cos yx}{y} -$

$$- \frac{1}{y} \int e^{-x} \cos(yx) dx$$

$$\therefore \int e^{-x} \cos(yx) dx = \frac{e^{-x} \sin(yx)}{y} - \frac{e^{-x} \cos(yx)}{y^2} - \frac{1}{y^2} \int e^{-x} \cos(yx) dx$$

$$\frac{1+y^2}{y^2} \int e^{-x} \cos(yx) dx = \frac{e^{-x} [y \sin(yx) - \cos(yx)]}{y^2}$$

$$\int e^{-x} \cos(yx) dx = \frac{e^{-x} [y \sin(yx) - \cos(yx)]}{1+y^2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(yx) dx = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-x} [y \sin(yx) - \cos(yx)]}{1+y^2} \right] \Big|_0^{x_1} =$$

$$= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-x_1} [y \sin(yx_1) - \cos(yx_1)]}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} \right) = \frac{1}{1+y^2}$$

pero la integral dada es:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \text{arc-tg } y \Big|_0^{\infty}$$

y si en ella hacemos: $x = \frac{z}{y}$, tendremos:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{y}} \frac{\text{sen } z}{z} dz = \text{arc-tg } y \Big|_0^{\infty}$$

que para $y \longrightarrow +\infty$ nos da:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\text{sen}(yx)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

luego es:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

21.7.- BIBLIOGRAFIA

a) Integrales impropias

- 1.- ERNESTO PASCAL: Repertorio di Matematiche Superiori. Vol.I; Analisi; Cap.VII, ap.3, págs. 173 a 179- Ed.Ulrico Hoepli- Milán- 1898,-
- 2.- ERNESTO PASCAL: Lezioni di Calcolo Infinitesimale. Parte II-Calcolo Integrale- Cap.I; ap.4; págs. 13 a 26; págs. 37 a 53- 3a.ed.- Ed.Ulrico Hoepli- Milán- 1911
- 3.- ERNESTO PASCAL: Esercizi critici di Calcolo Differenziale e Integrale. la.parte; Caps. VI y VII;págs. 195 a 211; Ed.2a. Ed.Ulrico Hoepli- Milán- 1909
- 4.- ULISSE DINI: Lezioni di Analisi Infinitesimale. Vol.II- Calcolo Integrale- la.parte - Cap.VI y VII- págs. 97 a 143 - Ed.F. Mistri- Pisa - 1909

- 5.- GIULIO VIVANTI: Lezioni di Analisi Infinitesimale. Cap.174 a 185; págs. 179 a 189; Ed. Mattei, Speroni y C. Pavia-1911.-
- 6.- GIULIO VIVANTI: Excercizi di Analisi Infinitesimale- Caps.210 a 219- págs 96 a 102; Ed.Mattei y C. Pavia- 1913.-
- 7.- EDWUARD GOURSAT: Cours d'Analyse Mathematique- Tomo I- 5a.Ed. Cap. IV; ap. 87 a 89; págs, 210 a 219- Ed. Gauthier-Villars- París- 1943
- 8.- PAUL APPELL: Analyse Mathématique. 5a. Ed.; Tomo I-Cap.IX- ap. 5a. edic.; Tomo I - Cap.IX: ap.126 a 132- Tomo II; Cap. XX- ap.345 a 348; págs. 619 a 622- Ed.Gauthier-Villars-París. 1937.
- 9.- R. COURANT: Differential and Integral Calculus.- Vol.I - 2a.Edic.-Cap.IV;págs.245 a 256; Ed. Blak and Von- London y Glasgow - 1937
- 10.- Ch. J. de la Vallée Poussin: Cours d'Analyse Infinitesimale.- Tomo I - 8a ed. - Cap,VI; ap.184 a 190;págs. 221 a 231; Ed. Dover Publications - New York.1946.
- 11.- UMBERTO CISSOTTI: Lezioni di Analisi Matematica.- 3a.Edic - Cap. XIII - ap. 152 a 338 - Ed. Libreri Editrice - Politecnica - Milan - 1926.-
- 12.- SALVATORE PINCHERLE: Lezioni di Calcolo Infinitesimale.- Cap.10; Ap.III; Nos. 358 a 371; págs 348 a 363; Ed-Zanichelli-Bolonia - 1915.-
- 13.- R.S. Burington-Ch.Ch.Torrance: Higher Mathematics, with applications to Science and Engineering- la, 3 - Cap.II - parte D; ap.31 a 32 - págs.286 a 298 Ed.Mc. Graw-Hill-New York - London 1937,
- 14.- H.M.Bacon: Differential and Integral Calculus.- la. edic;Cap.XIV; Ap.112 a 113; págs, 419 a 428 - Ed.Mc.Graw. Hill-New York - London 1942.

B.- INTEGRALES DE LAPLACE - GAUSS Y DE LAPLACE.-

- 1.- Ch. J. de la Vallée Poussin: Lic. cit. Tomo I; Cap. VI - ap. 190; pág. 229 a 230.-
- 2.- PAUL APPELL: Lic. cit. Tomo II - Cap. XVIII - ap. 299 - págs. 539 a 540 - Cap. XX; ap. 346 - págs 619 a 620.
- 3.- C.E. DIEULEFAIT: Elementos de Estadística Metodológica-2a Ed.- Cap. VIII; fase. 3; ap. 5; págs 391 a 395 - Universidad Nacional del Litoral-Facultad de Ciencias Económicas - Rosario 1943.
- 4.- O. FERNANDEZ BAÑOS: Tratado de Estadística, Cap. VIII - ap. 30 - págs 83 a 85 - Consejo Superior de Investigaciones Científicas- Madrid-1945.-
- 5.- M. GARCIA ALVAREZ - J. AYUSO OREJANA.- Estadística.- Cap. IV; págs. 512 a 523; Ed. S.A.E.T.A. Madrid; 1946.-
- 6.- R. DELTHEIL: Erreurs et Moindres Carrés.- Traité du Calcul des Probabilités et ses Applications - par E. Borel - Tomo I; fase. II; Cap. IV; N° 22; págs. 42 y 43-Ed. Gauthier-Villars-París-1930.-
- 7.- A.D. FORTI: Il metodo del Minimi Quadrati e la Teoria degli Errori.- la. parte; págs. 12 y 13.- Ed. U. Hoepli; Milán-1890.-
- 8.- GUIDO CASTELNUOVO: Calcolo delle Probabilità.- Apéndice; ap. 2; - págs 310 a 312; Ed. Zanichelli - Bologna -1947.

c) INTEGRALES DE EULER.-

1. CH. J. DE LA VALLE POUSSIN: Lic. cit. Tomo II - Págs 72 a 90.
2. ULISSE DINI: Lic. cit. Vol. II - la. parte - págs. 395 a 419; págs 116 a 118; págs 222 a 225.-

3. CH. STURM: Cours d'Analyse de L'Ecole Polytechnique.-
Tomo II; págs. 32 a 37 - 12a. Ed.- Ed. Gauthier.-
Villars - París - 1901.-
4. R. COURANT: Loc. cit. Vol-II) págs. 323 a 325; págs 303; Vol. I; págs 250 a 251.-
5. GIULIO VIVANTI: Loc. cit. págs. 190 a 195.-
6. I. y E. SOKOLNIKOFF: Matemática Superior para Ingenieros y Físicos.
Trad. de J.C. Vignaux - págs. 271 a 276.-
Ed. Nigar; Bs. Aires - 1947.-
7. R.S. BURINGTON Y CH. CH. TORRANCE: Loc. cit. Cap. II - Nos. 36 a 38;
págs 307 a 314.-
8. H.W. REDDICK y P.H. MILLER: Advanced Mathematics for Engineers.-
2a. Edic. Cap. VI; ap. 53 a 57; págs 211 a 220;
Ed. John Wiley - New York - Chapman - Londres -
1946.-
9. ERNESTO PASCAL: Loc. cit. Cap. III; ap. 6; págs. 130 a 132.
10. C.E. DIEULEFAIT: Loc. cit. págs 523 a 526.
11. M.A. BRICAS: Le système de Courbes de Pearson et le Schema
d'urne de Polya.- 2a. parte- Nº 53; págs 53 a
58; Ed. Gauthier-Villars - París - 1949.-

d) INTEGRAL DE DIRICHLET.-

1. R. COURANT: Loc. cit. Vol. I - Cap. IV - Nos. 5 y 6 - págs.
251 a 253 - págs. 418 a 419 y pág. 450.-
2. E. PASCAL: Exercizi; loc. cit. Cap. 113; págs 198 a 2015..
3. SALVATORE PINCHERLE: Loc. cit. Nº 370; págs. 359 a 360.-

1.- -MEDIA O PROMEDIO-

1.1.- DEFINICION Y CALCULO.-

La media artimética, media, o promedio de un grupo de observaciones se define como la suma de los valores observados dividida por su número.-

Sea n el número de los valores observados

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; la media $\bar{x}$ es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Ejemplo: El peso, en gramos, de 9 trozos de alambre de cobre, de igual longitud es:

18,457; 18,434; 18,444; 18,461; 18,453; 18,447; 18,452; 18,440;
18,443;

El promedio, o media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{18,457 + 18,434 + \dots + 18,443}{9} = \frac{166,031}{9} = 18,4479$$

$$\boxed{\bar{x} = 18,4479} \quad (2)$$

Su cálculo se facilita al elegir un origen conveniente de cálculo, y leer luego los valores observados como suma de este origen y una diferencia. Así tomando como origen de cálculo 18,450 en el ejemplo anterior, el cálculo de la media toma la forma:

$$\bar{x} = 18,450 - \frac{0,007 - 0,016 - \dots - 0,007}{9} = 18,450 - \frac{0,019}{9} =$$

$$\underline{\bar{x} = 18,4479}$$

Este modo de operar, implica admitir que cualquier valor observado x_i , puede escribirse así:

$$\boxed{x_i = a + \bar{v}_i} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = na + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i$$

y es

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = a + \frac{\sum \bar{v}_i}{n}$$

y designando con $\bar{v}$, al promedio de las diferencias

$$\bar{v}_i = x_i - a$$

resulta

$$\boxed{\bar{x} = a + \bar{v}} \quad (4)$$

Cuando el número de observaciones es grande, este método no es cómodo y solamente se usa cuando el origen de cálculo es simple y las diferencias pueden calcularse mentalmente; de lo contrario, conviene agrupar los valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ en m clases en cuyos puntos medios: $t_1, t_2, \dots, t_m$ de los intervalos de igual longitud Δt , se agrupan el número de observaciones contenidas en el intervalo considerado. Designemos con a_j el número de observaciones contenidas en el intervalo de punto medio t_j . Al hacer esta admisión, importa suponer, que dentro de cada intervalo, los valores se disponen según una progresión aritmética, hipótesis tanto más plausible cuando menores sean las amplitudes de los intervalos adoptados. La suma a_j de los valores observados en el intervalo j -ésimo es aproximadamente igual a

$$a_j \times t_j$$

$$\begin{matrix} \cdot & & x_j & \approx & a_j \cdot t_j \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \end{matrix}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \approx \sum_{j=1}^m a_j \cdot t_j$$

luego

$$\sum_{i=1}^n x_i \approx \sum_{j=1}^m a_j \cdot t_j$$

es decir:

$$\frac{\bar{x}}{\bar{t}} = \frac{\sum_{j=1}^m a_j t_j}{\sum_{j=1}^m a_j}$$

cuando Δj , intervalo genérico de clase, es pequeño, su número se hace grande, y en tal caso, la diferencia entre $\bar{x}$ y $\bar{t}$ se hace despreciable. Haciendo en (5):

$$t_j = \alpha + \beta \omega_j$$

es

$$a_j \cdot t_j = \alpha \cdot a_j + \beta \cdot \omega_j \cdot a_j$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_j t_j &= \alpha \sum_{j=1}^m a_j + \beta \sum_{j=1}^m \omega_j \cdot a_j \\ &= \alpha \cdot n + \beta \sum_{j=1}^m \omega_j \cdot a_j \end{aligned}$$

y dividiendo por n , resulta:

$$\sum_{j=1}^m a_j \cdot t_j = \alpha + \beta \sum_{j=1}^m \omega_j \cdot a_j$$

$$\bar{t} = \alpha + \beta \bar{\omega}$$

En el cálculo, se acostumbra a elegir a α como uno de los valores t y a w igual a longitud de los intervalos de clase.-
Ejemplo: Distribución de 500 remaches de acuerdo al diámetro de la cabeza, agrupados en clases de igual longitud.-

LONGITUD DEL INTERVALO: 0,05 m m.

Punto medio t	Número de remaches a	$t = 13,07 + 0,05w'$		$t = 13,42 + 0,05w''$	
		w'	$w' \cdot a$	w''	$w'' \cdot a$
		-	-	-	-
13,07	1	0	0	-7	-7
13,12	4	1	4	-6	-24
13,17	4	2	8	-5	-20
13,22	18	3	54	-4	-72
13,27	38	4	152	-3	-114
13,32	56	5	280	-2	-112
13,37	69	6	414	-1	-69
13,42	96	7	672	0	0
13,47	72	8	576	1	72
13,52	68	9	612	2	136
13,57	41	10	410	3	123
13,62	18	11	198	4	72
13,67	12	12	144	5	60
13,72	2	13	26	6	12
13,77	1	14	14	7	7
Σ	500	-	3,564	-	64
Media	-	-	7,128	-	0,128
$\bar{t} = 13,07 + 0,05 \times 7,128 = 13,4264$ $\bar{t} = 13,42 + 0,05 \times 0,128 = 13,4264$					

Aquí se ha elegido t de modo tal que:

y

$$t_j = 13,07 + 0,05 w_j$$

$$t_j = 13,42 + 0,05 w_j$$

es decir que:

$$\alpha = 13,07$$

$$\alpha = 13,42$$

$$\beta = 0,05$$

$$\beta = 0,05$$

para el primer caso:

$$w = w' = 0, 1, 2, 3, \dots, 14$$

y para el segundo:

$$w = w'' = (-7), (-6), (-5), \dots, 5, 6, 7.$$

$$\therefore \sum w_j a_j = 1 \times 0 + 4 \times 1 + \dots + 2 \times 13 + 1 \times 14 = 3564$$

$$\sum w_j a_j = 1 \times (-7) + 4 + (-6) + \dots + 2 \times 6 + 1 \times 7 = 64$$

luego

$$\bar{w} = \frac{\sum w_j a_j}{\sum a_j} = \frac{3564}{500} = 7,128$$

$$\bar{w} = \frac{\sum w_j a_j}{\sum a_j} = \frac{64}{500} = 0,128$$

luego tendremos que:

$$\bar{x} \approx t = 13,07 + 0,05 \times 7,128 = \underline{13,4264}$$

$$\bar{x} \approx t = 13,42 + 0,05 \times 0,128 = \underline{13,4264}$$

1.2.- ESPERANZA MATEMATICA

Consideremos una variable casual x capaz de asumir los siguientes valores:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

con probabilidades respectivas:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

548

se llama esperanza matemática de la variable x , y se la representa por $E(x)$, a la suma de los productos de los valores de x por sus respectivas probabilidades.

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1)$$

EJEMPLO I: Con un dado perfecto se obtiene:

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 puntos
 1 2 3 4 5 6

con probabilidades respectivas:

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6
 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6

$$E(x) = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$E(x) = \frac{7}{2}$$

EJEMPLO II: Se arroja un dado perfecto 15 veces y obtenemos las siguientes frecuencias:

Número de puntos: x_i	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	2	2/15
2	3	3/15
3	2	2/15
4	3	3/15
5	3	3/15
6	2	2/15
Total	15	1

$$\text{Media } \bar{x} = \frac{1(2) + 2(3) + 3(2) + 4(3) + 5(3) + 6(2)}{15}$$

$$\bar{x} = \frac{7.06}{2} \approx \frac{7}{2}$$

Si aumentáramos el número de jugadas, este valor obtenido para la media, se aproximaría cada vez más a la esperanza matemática

$$E(x) = \frac{7}{2}$$

Consideremos el significado intuitivo de la esperanza matemática. Supongamos que una operación se ha efectuado n veces y que el suceso x aparece n₁ veces, de modo que:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$$

La media o promedio de las veces que aparece x en las n operaciones es:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{n_1}{n} x_1 + \frac{n_2}{n} x_2 + \dots + \frac{n_k}{n} x_k$$

donde $\frac{n_1}{n}$ es la frecuencia relativa de la presentación de x₁ en las n operaciones.

Cuando el número n de veces aumenta, la frecuencia relativa $\frac{n_1}{n}$ tiende a identificarse con la probabilidad p₁ del suceso x₁, de modo que la $\bar{x}$ tiende a coincidir con la esperanza matemática de x; es decir con E(x) antes definida.

1.3.- MEDIA ARITMETICA DE VARIABLES ALEATORIAS

La media aritmética $\bar{x}$ de una variable aleatoria discontinua x, se ha definido en 1.1, y viene dada por la expresión:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \cdot p(x_i)}{\sum_{i=-\infty}^{\infty} p(x_i)} = E(x) \quad (1)$$

donde $p(x_i) = \frac{n_i}{n}$ es la frecuencia relativa con que se presenta el suceso x₁ en la población.

Si la variable aleatoria x es continua, la media viene dada por

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx} = E(x) \quad (2)$$

donde $p(x)dx$ es también la frecuencia del suceso x₁ en la población.

Esta definición de la media coincide con la definición de centro de gravedad dada en mecánica.

Puede ser interpretada a $\bar{x}$ como el valor medio de un infinito número de observaciones en la población.

Comparando lo dicho en 1.2.) con lo de 1.3.) se observa que:

La media aritmética de un número infinito de observaciones es la esperanza matemática de la variable aleatoria que define ese suceso.

Para observaciones limitadas se verifica que

$$\bar{x} \approx E(x)$$

como se vió en el ejemplo II de 1.2.).

2.- VARIANZA

2.1.- DEFINICION Y CALCULO

La media nos proporciona una información acerca de la magnitud de las observaciones. Las desviaciones de las mismas con respecto a esa media, dadas por:

$$x_1 - \bar{x} ; x_2 - \bar{x} ; x_3 - \bar{x} ; \dots ; x_n - \bar{x}$$

dan las dispersiones de las observaciones con respecto a la media. Con dichas n desviaciones calcularemos la varianza σ^2 definida por la expresión:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (1)$$

la cual, bajo ciertas condiciones, nos da la mejor descripción de la variación de las observaciones contenidas en un solo número. La raíz cuadrada de la varianza se denomina desviación típica o desviación standard.

Por lo general es laborioso el cálculo de

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

para abreviarlo, observemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \bar{x} \cdot n\bar{x} + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

pero

$$n\bar{x}^2 = \frac{(n\bar{x})^2}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}$$

$$\therefore \boxed{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad (2)$$

EJEMPLO: Arrojando un solo dado, tendremos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	2	3	4	5	6
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\bar{x} = E(x) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2	x_5^2	x_6^2
1	4	9	16	25	36

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 9\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{91}{6}$$

$$\therefore \sigma^2 = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum x_i\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{35}{12}$$

Análogamente, como en el cálculo de la media aritmética, éste se facilita utilizando un origen a conveniente, de modo que:

$$x_i = a + v_i$$

$$x_i - \bar{x} = v_i - \bar{v}$$

pués, según (4) de 1.1 es:

$$\bar{x} = a + \bar{v}$$

Hagamos en (2):

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^n x_i \\ SS_x &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ SSD_x &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

es decir, abreviamos con S_x ; SS_x y SSD_x a la suma, suma de los cuadrados y suma de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media. Con estas convenciones, la (2) adopta la forma siguiente:

$$SSD = SS - \frac{S^2}{n} \quad (3)$$

con lo que obtenemos en (1).

$$\sigma^2 = \frac{SSD}{n-1} \quad (4)$$

Como

$$x_i - \bar{x} = v_i - \bar{v}$$

es

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2$$

luego

$$SSD_x = SSD_v = SS_v - \frac{Sv^2}{n}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_v^2$$

Se elige por lo común un origen a de modo tal que sea fácil calcular rápidamente los desvíos $(x_i - a)$, con lo que SS_v resulta más fácil de calcular que SS_x .

EJEMPLO: Distribución de 9 trozos de alambre de cobre de igual longitud dado su peso en gramos.

x	v = x-18,450
18,457	0,007
18,434	-0,016
18,444	-0,006
18,461	0,011
18,453	0,003
18,447	-0,003
18,452	0,002
18,440	-0,010
18,443	-0,007
S	-0,019
SS	0,000633
$\frac{S^2}{n}$	0,0000401
SSD	0,0005929
σ^2	0,00007411
σ	0,00861

3.- BIBLIOGRAFIA

- 1.- S.S.WILKS: Análisis Estadístico Elemental
Traducción de Sixto Ríos y José Royo
Ed. Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Madrid - 1952.-
- 2.- A.HALD: Statistical Theory with Engineering Applications
Ed. J.Wiley - New York- 1952
- 3.- W.G.MADOW: Teorías levantamientos por Amostragem
Ed. Conselho Nacional de Estatística - Brasil - 1951
- 4.- M.HANSEN - W.HURWITZ - W. MADOW: Sample Survey Methods and Theory
Ed. John Wiley - New York - 1953.-

- INDICE -

1.- INTRODUCCION

1.1.- Principios lógicos	pág.	1
1.2.- Objeto y Carácter de la Matemática	"	2
1.3.- División de la Matemática	"	3

2.- ARITMETICA

2.1.- Introducción	"	4
2.2.- Desarrollo del concepto de número	"	4
2.3.- Números naturales	"	5
2.3.1.- Operaciones fundamentales	"	6
2.3.1.1.- Producto de dos números	"	6
2.3.1.2.- Leyes formales de la multiplicación	"	6
2.3.1.3.- Módulo de la multiplicación	"	6
2.3.1.4.- Potencias y monomios	"	6
2.3.1.5.- Símbolo π	"	7
2.3.1.6.- Suma de números	"	8
2.3.1.7.- Leyes formales de la adición	"	8
2.3.1.8.- Módulo de la adición	"	8
2.3.1.9.- El símbolo $\sum$	"	8
2.3.1.10.- Multiplicación como caso particular de la suma	"	9
2.3.1.11.- Producto de potencias de igual base	"	9
2.3.1.12.- Operaciones inversas	"	10
2.4.- Bibliografía	"	15

3.- ANALISIS COMBINATORIO SIMPLE

3.1.- Introducción	"	16
3.2.- Arreglos, permutaciones y combinaciones	"	16
3.3.- Arreglos, disposiciones o coordinaciones	"	17
3.3.1.- Cálculo del número de arreglos	"	18
3.4.- Permutaciones	"	19
3.5.- Combinaciones	"	20
3.6.- Combinaciones complementarias	"	21
3.7.- Números combinatorios	"	22
3.8.- Bibliografía	"	23

4.- ANALISIS COMBINATORIO CON REPETICION

4.1.- Arreglos, variaciones o coordinaciones	"	25
4.2.- Permutaciones	"	29
4.3.- Combinaciones completas	"	30
4.3.1.- Propiedades	"	34
4.4.- Bibliografía	"	37
4.5.- Ejercicios	"	38
4.6.- Potencia de un polinomio	"	41
4.6.1.- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta	"	41

4.6.2.-	Noticias históricas del binomio de Newton	pág.	43
4.6.3.-	Números combinatorios	"	43
4.6.4.-	Desarrollo de $(x-a)^m$	"	44
4.6.5.-	Propiedades de los coeficientes	"	44
4.6.6.-	Término general	"	45
4.6.7.-	Forma más simple	"	46
4.6.8.-	Desarrollo del binomio para exponente fraccionario	"	47
4.6.9.-	Desarrollo del binomio para exponente negativo	"	48
4.6.10.-	Cuadrado de un polinomio	"	48
4.6.11.-	Cubo de un polinomio	"	49
4.6.12.-	Potencia emésima de un polinomio	"	50
4.6.13.-	Cálculo de un término cualquiera del desarrollo	"	51
4.6.14.-	Bibliografía	"	53
4.7.-	Triángulo aritmético de Pascal-Tartaglia	"	54
4.7.1.-	Nota histórica	"	54
4.7.2.-	Formación	"	54
4.7.3.-	Propiedades	"	55
4.7.4.-	Triángulo aritmético general	"	55
4.7.5.-	Aplicación	"	56
4.7.6.-	El número e	"	56
4.7.7.-	Suma de potencias de números naturales	"	57
4.7.8.-	Ejercicios	"	58
4.7.9.-	Bibliografía	"	62

5.- NUMEROS FRACCIONARIOS

5.1.-	Construcción genética de la Aritmética	"	64
5.2.-	Los signos de la Aritmética	"	65
5.3.-	El número negativo	"	65
5.4.-	Números fraccionarios	"	66
5.5.-	Fracciones decimales	"	67
5.6.-	Ejercicios	"	71
5.8.-	Potencias de exponente negativo	"	75
5.9.-	Series de fracciones iguales	"	78
	Bibliografía	"	82
5.10.-	Algoritmo de las progresiones	"	82
5.10.1.-	Progresiones	"	83
5.10.3.-	Progresiones aritméticas ordinarias	"	87
5.10.3.-	Progresiones geométricas ordinarias	"	92
5.10.4.-	Ejercicios	"	98
5.10.5.-	Bibliografía	"	98

6.- FRACCIONES CONTINUAS

6.1.-	Definición	"	99
6.2.-	Ley de formación	"	101
6.3.-	Desarrollo de un número racional en fracción continua	"	103
6.4.-	Desarrollo de un número decimal en fracción continua	"	107
6.6.-	Formación de las reducidas de una fracción continua	"	111
6.7.-	Propiedades más importantes de las reducidas	"	116

6.8.-	Error que se comete al tomar una reduci da cualquiera como valor de la fracción continua total	pág.	117
6.9.-	Fracciones continuas ilimitadas	"	120
6.10.-	Ejercicios	"	124
6.11.-	Bibliografía	"	130

7.- ALGORITMO DE LOS DETERMINANTES

7.1.-	Nota histórica	"	132
7.2.-	Definiciones y propiedades fundamentales	"	"
7.2.1.-	Matrices	"	134
7.2.2.-	Determinantes	"	136
7.2.3.-	Determinantes de segundo y tercer orden	"	139
7.2.4.-	Regla de Sarrus	"	140
7.2.5.-	Transformaciones de un determinante	"	141
7.3.-	Desarrollo de un determinante en suma de varios	"	"
7.3.1.-	Adjuntos	"	145
7.3.2.-	Desarrollo por elementos de una línea	"	146
7.3.3.-	Descomposición de un determinante en su- ma de varios de igual orden	"	148
7.3.4.-	Desarrollo de un determinante rebajándo- lo de grado	"	150

8.- SIMBOLO Σ

8.1.-	Definición	"	156
8.2.-	Producto de dos sumas	"	157
8.3.-	Producto de varias sumas	"	159
8.4.-	Potencia de un polinomio	"	160
8.5.-	Algoritmo de las sumas sucesivas	"	162

9.- CALCULO DE LAS PROBABILIDADES

9.1.-	Evolución histórica	"	165
9.2.-	Definiciones de la probabilidad	"	168
9.3.-	Certeza e imposibilidad	"	172
9.4.-	Probabilidades de los sucesos opuestos	"	172
9.5.-	Cálculo de las probabilidades por enume- ración directa de los casos	"	173
9.6.-	Enumeración directa de los casos	"	174
9.7.-	Probabilidades totales y compuestas	"	"
9.7.1.-	Sucesos compatibles e incompatibles	"	198
9.7.2.-	Notaciones	"	198
9.7.3.-	Frecuencias condicionales	"	201
9.7.4.-	Fórmula de las probabilidades totales	"	202
9.7.5.-	Fórmula de las probabilidades compuestas	"	206
9.7.6.-	Probabilidad total y compuesta-Ejemplos	"	209
9.8.-	Esperanza matemática y valor medio	"	"
9.8.1.-	Magnitudes aleatorias	"	215
9.8.2.-	Esperanza matemática	"	215
9.8.3.-	Sistema de variables casuales	"	215
9.8.4.-	Suma de dos variables casuales	"	216
9.8.5.-	Producto de dos variables casuales	"	216
9.8.6.-	Valor medio de la suma de variables casua les	"	216

9.8.7.-	Valor medio del producto de variables ca suales	pág.	217
9.8.8.-	Momentos	"	219
9.8.9.-	Desviaciones	"	220
9.8.10.-	Valor medio del cuadrado	"	220
9.8.11.-	Desviación	"	221
9.8.12.-	Dispersión	"	221
9.8.13.-	Teorema de Bienaymé - Tchebycheff	"	223
9.8.14.-	Observación	"	224
9.9.-	Bibliografía	"	225
10.- ECUACIONES ALGEBRAICAS			
10.1.-	Noticia histórica	"	226
10.2.-	Generalidades	"	228
10.2.1.-	Definiciones	"	228
10.2.2.-	Teorema de d'Alembert	"	228
10.2.3.-	Teorema	"	228
10.2.4.-	Teorema	"	229
10.2.5.-	Definición	"	230
10.2.6.-	Teorema	"	230
10.2.7.-	Raíz común - Teorema	"	231
10.3.-	Ecuaciones de primer grado	"	231
10.3.1.-	Raíz común	"	231
10.3.2.-	Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas	"	232
10.3.3.-	Sistemas de ecuaciones con tres incógni- tas	"	241
10.4.-	Ecuaciones de segundo grado	"	242
10.4.1.-	Forma	"	242
10.4.2.-	Resolución	"	243
10.4.3.-	Discusión	"	250
10.4.4.-	Trinomio de segundo grado	"	251
10.4.5.-	Signos del trinomio	"	253
10.5.-	Ejercicios	"	253
10.6.-	Bibliografía	"	257
11.- TRIGONOMETRIA			
11.1.-	Nota histórica	"	258
11.2.-	Líneas trigonométricas - Fórmulas	"	258
11.3.-	Variaciones de las funciones trigonométri- cas	"	262
11.4.-	Ejercicios	"	267
11.5.-	Bibliografía	"	268
12.- NUMEROS REALES			
12.1.-	Nota histórica	"	270
12.2.-	Necesidad de una ampliación del campo nu- mérico	"	271
12.3.-	Cortadura en el campo de los números ra- cionales	"	272
12.4.-	Operaciones fundamentales	"	275
12.5.-	Potencias de exponente racional	"	276
12.6.-	Potencias de exponente real	"	277
12.7.-	Bibliografía	"	278

13.- NUMEROS COMPLEJOS

13.1.- Elementos de Geometría Analítica	
13.1.1.- Reseña histórica	278
13.1.2.- Sistema cartesiano	279
13.1.3.- Definición y objeto de la Geometría Analítica	281
13.2.- Números complejos	
13.2.1.- Nota histórica	282
13.2.2.- Necesidad de una nueva ampliación en el campo numérico	282
13.2.3.- Definición de número complejo	283
13.2.4.- Representación geométrica	285
13.2.5.- Coordenadas polares	285
13.3.- Operaciones racionales	
13.3.1.- Principio de Hankel	286
13.3.2.- Operaciones	286
13.3.3.- Forma binómica o cartesiana	287
13.3.4.- Forma factorial o polar	287
13.3.5.- Multiplicación	288
13.3.6.- División	290
13.4.- Potencias y Raíces	
13.4.1.- Potencias de la unidad imaginaria	292
13.4.2.- Potencias de exponente entero. Fórmula de Moivre	293
13.4.3.- Raíces de los números complejos	295
13.4.4.- Teorema final de la Aritmética	299
13.4.5.- Bibliografía	299

CALCULO INFINITESIMAL Y GEOMETRIA ANALITICA

14.- FUNCIONES Y LIMITES

14.1.- Reseña histórica	300
14.2.- Constantes y Variables - Funciones	
14.2.1.- Variables y constantes	301
14.2.2.- Funciones	301
14.2.3.- Notación	302
14.2.4.- Representación gráfica	302
14.2.5.- Estudio de las funciones elementales	305
14.3.1.- Representación de dos funciones inversas	306
14.3.2.- Función algebraica	306
14.3.3.- Radical	308
14.3.4.- Función exponencial	309
14.3.5.- Función logarítmica	311
14.3.6.- Funciones circulares directas	312
14.3.7.- Funciones circulares inversas	314
14.4.- Ecuación de una curva definida por propiedades geométricas	318
14.4.1.- Distancia entre dos puntos	318
14.4.2.- Signos en el sistema cartesiano plano	320
14.4.3.- Representación analítica de la recta	320
14.4.4.- Recta que pasa por dos puntos	325
14.4.5.- Punto de intersección de dos rectas	326
14.4.6.- La circunferencia	327
14.4.7.- Las cónicas como curvas - sección	329
14.4.8.- Las cónicas como lugares geométricos	331
14.4.9.- Bibliografía	335

14.5.- CONCEPTO DE LIMITE

14.5.1.-Límite de una variable	pág.	336
14.5.2.-Límite de una función	"	337
14.5.3.-Teoremas sobre límites	"	340
14.5.4.-Continuidad de una función	"	343
14.5.5.-Ejercicios	"	344

15.- DERIVADAS

15.1.- Tangente a una curva en un punto	"	345
15.2.- Derivada de una función	"	347
15.3.- Cálculo de derivadas	"	347
15.3.1.-Derivada de x^n	"	347
15.3.2.-Derivada de una constante	"	349
15.3.3.-Derivada de una suma	"	349
15.3.4.-Derivada de un producto	"	350
15.3.5.-Derivada de un cociente	"	351
15.3.6.-Ejercicios	"	352
15.3.7.-Derivada de una función de función	"	354
15.3.8.-Derivadas de las funciones inversas	"	355
15.3.9.-Derivadas de orden superior	"	356
15.3.10.-Derivadas de las funciones trigonométricas	"	357
15.3.11.-Derivada de la función logarítmica	"	369
15.3.12.-Derivada de la función exponencial	"	373
15.3.13.-Derivada de la función $y = u^v$	"	374
15.3.14.-Tabla de derivadas	"	375
15.3.15.-Ejercicios sobre derivadas	"	376

16.- DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

16.1.-Teorema del incremento finito	"	382
16.2.-Teorema de Roble	"	383
16.3.-Derivadas parciales	"	383
16.4.-Interpretación geométrica	"	386
16.5.-Ejercicios	"	386
16.6.-Derivadas parciales de orden superior	"	389
16.7.-Ejercicios	"	392
16.8.-Formas determinadas e indeterminadas	"	393
16.9.-Regla de L'Hôpital	"	399
16.10.-Ejercicios	"	412
16.11.-Bibliografía	"	413

17.- TEOREMAS DE TAYLOR Y MACLAURIN

17.1.- Teorema de Taylor	"	414
17.2.- Teorema de Maclaurin	"	417
17.3.- Ejercicios	"	419
17.4.- Relaciones de Euler	"	420
17.5.- Bibliografía	"	421

18.- DIFERENCIAL

18.1.- Significado geométrico	"	423
18.2.- Cálculo de diferenciales	"	423
18.3.- Diferencial total	"	425

- 18.4.- Condición para que $Mdx + Ndy$ sea una diferencial total.
 18.5.- Derivadas de las funciones implícitas
 18.6.- Bibliografía

Pag. 426
 " 426
 " 428

CALCULO INTEGRAL

19.- FUNCIONES PRIMITIVAS E INTEGRALES

- 19.1.- Funciones primitivas " 429
 19.2.- Constante de integración-Significado geométrico " 430
 19.3.- Área encerrada por una curva " 432
 19.4.- La integral definida " 435

20.- CALCULO DE INTEGRALES INDEFINIDAS

- 20.1.- Integración de funciones simples " 439
 20.2.- MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACION
 20.2.1.- 1er. Método: Descomposición en elementos simples " 441
 20.2.2.- 2º Método: Integración por partes " 442
 20.2.3.- 3er. Método: Cambio de variable " 444
 20.2.4.- Ejercicios " 445
 20.3.- INTEGRACION DE FRACCIONES RACIONALES
 20.3.1.- Raíces reales simples " 450
 20.3.2.- Raíces reales múltiples " 452
 20.3.3.- Raíces imaginarias simples " 457
 20.3.4.- Raíces imaginarias múltiples " 462
 20.3.5.- Ejercicios " 470

20.4.- INTEGRACION DE FUNCIONES CIRCULARES

- 20.4.1.- Integrales de la forma $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x) dx$ " 471
 20.4.2.- Integrales de la forma $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x) dx$ " 473
 20.4.3.- Integrales de la forma $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x, \cos x dx$ " 475
 20.4.4.- Integrales $\int \sin^m x dx$; $\int \cos^n x dx$; $\int \operatorname{tg}^m x dx$ " 477
 20.4.5.- Ejercicio " 484
 20.4.6.- Bibliografía " 485

21.- INTEGRALES IMPROPIAS

- 21.1.- Integrales de funciones con puntos en el infinito
 21.1.1.- Introducción " 486
 21.1.2.- Definiciones " 488
 21.2.- Integrales con límites infinitos
 21.2.1.- Introducción " 495
 21.2.2.- Definiciones " 496
 21.2.3.- Observaciones " 497
 21.2.4.- Ejemplos explicativos " 498
 21.3.- Integral de la curva normal de la probabilidad
 21.3.1.- Ley de Laplace - Gauss " 500
 21.3.2.- Integral de Laplace - Gauss " 501

21.4.- INTEGRALES DE LAPLACE- APLICACIONES AL CALCULO DE LAS PROBABILIDADES.-

21.4.1.- Cálculo de la integral $I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx$	Pág.	503
21.4.2.- Cálculo de $I_{2n+1} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx$	"	505

21.5.- INTEGRALES DE EULER.

21.5.1.- Generalización del concepto de factorial	"	509
21.5.2.- Funciones de Euler.	"	510
21.5.3.- Función Gamma	"	511
21.5.4.- Cálculo de $\Gamma(\frac{1}{2})$	"	514
21.5.5.- Extensión del factorial a los números racionales	"	515
21.5.6.- Aplicaciones de la función Gamma	"	517
21.5.7.- Función Beta	"	525

Aplicaciones de la función beta y gamma a la Estadística.

I) Valor más probable en la probabilidad de las hipótesis	"	531
II) Esquema del contagio o esquema de Polya	"	533

21.6.- <u>Integral de Dirichlet</u>		
21.6.1.- Definición	"	537
21.6.2.- Valor de la integral	"	537
21.7.- <u>Bibliografía</u>	"	539

