CONADE

SISTEMA
ECUACIONES
SIMULTANEAS
ARGENT.

REPUBLICA ARGENTINA
PRESIDENCIA DE LA NACION
SECRETARIA DEL CONSEJO NACIONAL DE DESARROLLO
SECTOR PRESUPUESTO ECONOMICO NACIONAL

Estimación de los Coeficientes Estructurales de un Sistema de Ecuaciones Simultáneas para Argentina

Aspecto Descriptivo y Aplicación de algunos Métodos de Estimación

TEMA DE DIVULGACION INTERNA

Nº 75

febrero

1967

buenos aires

República Argentina
PRESIDENCIA DE LA NACION
CONSEJO NACIONAL DE DESARROLLO

ESTIMACION DE LOS COEFICIENTES ESTRUCTURALES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTANEAS PARA ARGENTINA

Aspecto descriptivo y aplicación
de algunos métodos de estimación

Ive R. Espínola de Barreiros
Sector Presupuesto Económico Nacional

Febrero 1967
Buenos Aires

Se agradece a Alfredo Monza su eficaz colaboración en las muchas consultas efectuadas, particularmente en la parte económica, tanto como a Marta L. Kreser por su participación en lo referente a cálculo. Asimismo, se agradece muy especialmente la valiosa intervención de Alicia Casal, sin la cual no hubiese resultado posible la estimación efectiva de los coeficientes.

1. INTRODUCCION

El presente trabajo tiene dos propósitos fundamentales: uno es exponer descriptivamente dos técnicas principales de estimación en modelos lineales y el otro es estudiar la posibilidad de estimar efectivamente tales coeficientes para el modelo de Willy van Rijckeghem.

La explicación que se hace de las técnicas de estimación se refiere en especial al aspecto descriptivo de las mismas y prescinde del estudio de los tópicos relacionados con el análisis de términos estocásticos.

Sin embargo, como el desarrollo de las técnicas a que se hará referencia se debe a limitaciones del esquema estocástico de regresión clásica, éstas se señalan oportunamente y se mencionan las fuentes donde pueden hallarse ampliamente tratadas.

En virtud de la naturaleza simultánea de las relaciones de un modelo econométrico la estimación de sus coeficientes requiere técnicas especiales modificatorias de las clásicas, corrientemente usadas en regresión. En cuanto a la elección entre técnicas alternativas, es muy importante evaluar los problemas referentes a la identificabilidad de las relaciones existentes en el modelo.

El objetivo fundamental de este trabajo fue la exploración de las posibilidades prácticas de aplicación de las técnicas en relación con los recursos de cómputo con que se cuenta en el Sector Presupuesto Económico Nacional y la información histórica disponible.

Se considera importante señalar que, para la interpretación de los comentarios expuestos, se requiere un conocimiento conceptual del modelo clásico de regresión lineal, y algunos tópicos sencillos de álgebra lineal. En un breve apéndice, al final del trabajo, se presentan los teoremas y las definiciones de los conceptos fundamentales que se emplean a lo largo del informe.

Asimismo, se deja constancia que éste es un análisis netamente econométrico de las características del modelo de Willy van Rijckeghen, prescindiendo de extenderse en consideraciones de carácter económico ya expuestas ampliamente en el informe elaborado oportunamente por su autor.[1]

1/ Además, consideraciones de este tipo también figuran en el "Presupuesto Económico Nacional Exploratorio para 1967".

2. PLAN DE TRABAJO

Se hace una breve reseña de las secciones que componen el presente trabajo, a saber:

Sección I: Planteo matricial de un modelo lineal.

Sección II: Breves consideraciones del aspecto estocástico en el problema de estimación.

Sección III: Método indirecto de mínimos cuadrados y estimación de la matriz de la forma reducida.

Sección IV: Identificación del modelo.

Sección V: Método de mínimos cuadrados en dos etapas.

Sección VI: Presentación del modelo.

Sección VII: Conclusiones.

Sección VIII: Estimación de los coeficientes para el modelo de W.V.R.

SECCION I

1. Planteo Matricial de un modelo lineal.

Esta seccion se refiere a la presentación matricial de un sistema de relaciones lineales simultántas, con la cual es conveniente familiarizarse.

La especificación económica de un modelo obedece a la formulación de una hipótesis de la teoría económica y las relaciones reflejan el funcionamiento previsto para la economía.

La forma funcional y la elección de las variables que intervienen en cada relación son decisiones que corresponden al economista, valiéndose de la evidencia histórica, surgida del análisis de cada relación en particular, su experiencia, o sus expectativas futuras.

Las variables se clasifican tradicionalmente en endógenas y exógenas, según se busque o nó determinar sus valores a partir del modelo. Para un propósito más estadístico, reviste mayor importancia la distinción entre variables "conjuntamente dependientes" (endógenas) y "predeterminadas" (exógenas). Las variables con retardo serán consideradas predeterminadas, y con frecuencia se hará referencia a las conjuntamente dependientes como "dependientes".

De aquí en adelante se supondrán formas lineales para todas las relaciones funcionales, y esta presentación se denominará "Forma estructural del modelo". Para un período dado "t" adquiere el aspecto siguiente:

$$\begin{array}{l}
\gamma_{11}y_1(t)+\ldots+\gamma_{M1}y_M(t)+\beta_{11}x_1(t)+\ldots+\beta_{K1}x_K(t)+u_1(t)=0 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
\gamma_{1M}y_1(t)+\ldots+\gamma_{MM}y_M(t)+\beta_{1M}x_1(t)+\ldots+\beta_{KM}x_K(t)+u_M(t)=0
\end{array} \qquad (1)$$

$y_m(t)$ es la **t-ésima** observación de la m-ésima variable conjuntamente dependiente ($m=1,\ldots,M$);

$x_k(t)$ es la t-ésima observación de la **k**-ésima variable predeterminada ($k=1,\ldots,K$);

γ_{ij} indica el coeficiente que acompaña a la i-ésima variable dependiente de la j-ésima relación del modelo; ($i=1,\ldots,M$; $j=1,\ldots,M$);

β_{kl} es el coeficiente que acompaña a la **k**-ésima variable predeterminada en la l-ésima relación del modelo ($k=1,\ldots,K$; $l=1,\ldots,M$);

$u_i(t)$ es el residual en la t-ésima observación de la i-ésima relación del modelo($i=1,\ldots,M$).

Obsérvese que las relaciones se presentan igualadas a cero, y aparecen en cada una de ellas todas las variables dependientes y todas las predeterminadas.

Puede exponerse el conjunto (1) de relaciones en forma matricial así:

$$y'(t)\Gamma+x'(t)\beta+u'(t)=0 \qquad (t=1,\ldots,T) \quad (2)$$

donde y',x',u', indican el vector traspuesto de los vectores columna y,x,u respectivamente;

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{M1} & \cdots & \gamma_{MM} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

es la matriz de coeficientes de las variables conjuntamente dependientes; (es una matriz de orden M.M y cada columna de ella se refiere a una relación); y

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{K1} & & \beta_{KM} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

es la matriz de coeficientes de las variables predeterminadas (es una matriz de orden K.M y cada columna de ella se refiere a una relación).

El número K se refiere al número de variables explícitas predeterminadas más uno. Como por lo general las relaciones incluyen en su especificación un término constante, K involucra una eventual variable predeterminada cuyos datos serán iguales a uno para todos los períodos en la muestra.

Para cada t existe una expresión matricial del tipo (2) y la forma compacta de resumir el modelo a fin de abarcar todas las observaciones es:

$$Y\Gamma + XB + U = 0 \qquad (5)$$

donde

$$Y = \begin{bmatrix} y'(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y'(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(1) & \dots & y_m(1) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ y_1(T) & \dots & y_M(T) \end{bmatrix} \qquad (6)$$

es la matriz de orden T.M de datos de las variables conjuntamente dependientes;

$$X = \begin{bmatrix} x'(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_K(1) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_1(T) & \dots & x_K(T) \end{bmatrix} \qquad (7)$$

es la matriz de orden T.K de datos de las variables predeterminadas y

$$U = \begin{bmatrix} u'(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u'(T) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1(1) & \dots & u_M(1) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ u_1(T) & \dots & u_M(T) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

es la matriz de orden T.M de los valores de los residuales.

Es importante puntualizar, pues, que la forma estructural tiene tantas relaciones como variables conjuntamente dependientes, es decir se trata de un sistema de M ecuaciones con M incógnitas (ver forma (1)).

La idea es que con valores fijos de los coeficientes, el sistema pueda ser resuelto unívocamente para los t valores de las variables dependientes en términos de los t valores de las variables predeterminadas y de los residuales (ver forma (5). Para esta unicidad de la solución se requiere que la matriz Γ sea no singular.

Es importante notar, para la posterior discusión, que en (1) los coeficientes están determinados salvo una constante. En efecto, si se multiplica cada relación por una constante las igualdades se siguen cumpliendo. Este problema se resuelve más tarde estableciendo un coeficiente igual a -1 para una variable dependiente en cada relación (regla de normalización).

La forma estructural se deduce a partir de la teoría económica y la interacción de las unidades se refleja en el conjunto de las ecuaciones estructurales. Sin embargo, a fin de explicitar la influencia de las variables predeterminadas y los residuales sobre las variables dependientes, se resuelve la forma estructural en la llamada "forma reducida" del modelo. Postmultiplicando la expresión (2) por Γ^{-1} se obtiene:

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= x'(t)(-B\Gamma^{-1}) + u'(t)(-\Gamma^{-1}) \\
&= x'(t)\Pi + v'(t) \qquad (t=1,\dots,T),
\end{aligned}
$$

donde

$$\Pi = -\beta\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1M} \\ \cdot & & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{K1} & & \pi_{KM} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

es la matriz de orden K.M de los coeficientes de la forma reducida. Cada columna de ella se refiere a una sola relación; $v'(t) = -u'(t)\Gamma^{-1}$, es el vector de residuales para la forma reducida.

Para escribir el sistema compactamente en términos de todas las observaciones se define:

$$V = \begin{bmatrix} v'(1) \\ \cdot \\ \vdots \\ v'(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(1) & \dots & v_M(1) \\ \cdot & & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ v_1(T) & \dots & v_M(T) \end{bmatrix} = -U\Gamma^{-1}, \qquad (10)$$

es la matriz de orden T.M de los residuales para la forma reducida. Con esta definición la forma reducida se escribe compactamente como:

$$Y = X\Pi + V \qquad (11)$$

Es importante notar que la característica distintiva de la forma reducida consiste en que cada una de las relaciones contiene una sola variable dependiente.

SECCION II

Breves consideraciones del aspacto estocástico en el problema de estimación.

Cabe hacer presente en el modelo de regresión clásica, se supone que los regresores no son estocásticos sino fijos en repetidas muestras, y por consiguiente, independientes del término estocástico residual.

En cambio, cuando una relación es parte de un sistema, algunos regresores son típicamente estocásticos y no independientes de los residuales. Ello implica la necesidad de aplicar técnicas especiales para la estimación de los coeficientes de la forma estructural. En efecto, las técnicas clásicas dan lugar a estimadores no consistentes de dichos coeficientes.

Las dos técnicas alternativas que aquí se presentan están destinadas a proveer estimadores consistentes de los coeficientes estructurales. Se trata del "método indirecto de mínimos cuadrados" y del "método de mínimos cuadrados en dos etapas".

Evidentemente, las nuevas técnicas deben surgir a partir de un nuevo esquema estocástico cuyos detalles no es posible enumerar aquí, ya que habría que entrar en algunas consideraciones referentes a la teoría de procesos estocásticos.

Para los propósitos del presente informe es suficiente puntualizar que una de las hipótesis del nuevo esquema estocástico propuesto es que las variables predeterminadas no son determinadas por el sistema en el período t, ya que son estocásticamente independientes de los residuales en cada período.

Como la forma reducida contiene como explicativas sólo variables predeterminadas, sus coeficientes son consistentemente estimados por las fórmulas clásicas de regresión.

Tanto el "método indirecto de mínimos cuadrados" como el "método de estimación en dos etapas" se servirán de estos coeficientes para llegar a la estimación consistente de los de la forma estructural, que en general constituyen el objetivo principal en economía.

SECCION III

Método indirecto de mínimos cuadrados y estimación de la matriz de la forma reducida.

En la sección anterior se ha puntualizado que las fórmulas clásicas de mínimos cuadrados proveen estimadores consistentes para los coeficientes de la forma reducida. La solución que inmediatamente se sugiere, consiste en estimar estos coeficientes con el método clásico y pasar en forma algebraica a los de la forma estructural.

Tal procedimiento se denomina "método indirecto de mínimos cuadrados". Sin embargo, el pasaje propuesto no es siempre posible, y es necesario remitirse al estudio de lo que se llama "identificación del modelo", que será tratado en la próxima sección.

Antes se analizará la posibilidad de estimar los coeficientes contenidos en la matriz Π, de la forma reducida.

Según (11) se tenía esta forma de modelo para todas las relaciones y para todos los valores de t:

$$Y = X\Pi + V$$

Consecuentemente, para la relación m-ésima de la forma reducida se tiene:

$$Y_m = X\Pi_m + v_m \qquad (12)$$

siendo

Y_m : vector de datos de la m-ésima de las variables dependientes.

Π_m vector de coeficientes de la m-ésima relación de la forma reducida (m-ésima columna de Π).

v_m : vector de residuales de la m-ésima relación de la forma reducida (serán funciones más o menos complicadas de los residuales de la forma estructural).

X : matriz de datos de todas las variables predeterminadas.

Los estimadores clásicos de mínimos cuadrados de Π_m serán:

$$P_m = (X'X)^{-1} X'Y_m$$

Se se procede de la misma manera para todas las relaciones de la forma reducida, se obtiene la fórmula clásica para estimar Π :

$$P = (X'X)^{-1} XY \qquad (13)$$

Obsérvese que estimar Π_m significa calcular la regresión del vector y_m sobre todas las variables predeterminadas.

En efecto, si bien el modelo contendrá eventualmente restricciones a priori, éstas habrán de ser sobre Γ y β , y no entran en la estimación de Π .

Si bien puede llamar la atención el hecho aparente de que la información sobre Γ y β no es utilizada en este método, ella desempeñará un papel de relevante importancia en la posibilidad de deducir estimadores de dichas matrices a partir del estimador P de Π. La Sección IV explica claramente el estudio de esta posibilidad.

Las características de la fórmula (13) limita la posibilidad de trabajar con un número reducido de datos. En efecto, es importante recordar que una de las hipótesis del modelo clásico es que el rango de X es menor o igual que el número T de períodos en la muestra.
Así:

$$\rho\,(X) \;=\; K \leq T \qquad (14)$$

Dado que X es una matriz de orden T.K , debe ser necesariamente $K \leq T$. De lo contrario, el máximo rango que podría tener X, sería T. Consecuentemente, el rango de (X'X) sería menor que K, ya que como se sabe:

$$\rho\,(X'X) \leqq \rho(X) = T < K \qquad (15)$$

Ya que (X'X) es una matriz cuadrada de orden K, para que su inversa $(X'X)^{-1}$ exista, debe ser $\rho\,(X'X) = K$. De lo contrario, si se cumple (15) la mencionada inversa no existe y la estimación de Π no es posible a través de la fórmula (13).

Cabe recordar que X incluye -además de los datos de las variables predeterminadas explícitas- una columna de unos para proveer la estimación de un término constante en cada una de las relaciones. De esta manera se tiene:

K = número de variables predeterminadas explícitas + 1.

Se concluye que para hacer posible la estimación de Π, debe ser:

$$K \leq T$$

o sea:

múmero de predeterminadas explícitas $\leq$ T - 1.

o, equivalentemente:

número de predeterminadas explícitas $<$ T.

SECCION IV

Identificación del modelo.

Dado que en este trabajo no resulta posible entrar en una descripción exhaustiva del problema de identificación, tema importantísimo en metodología científica, simplemente se analizará el pasaje de los coeficientes de la forma reducida a los de la forma estructural, y obtener así solución única para este problema algebraico.

Se dirá simplemente que una relación estructural está identificada si y sólo si sus parámetros pueden ser deducidos unívocamente a partir de los parámetros de la forma reducida. De este modo, el modelo estará identificado si todas sus relaciones lo están.

Ello limita el análisis a su aspecto descriptivo, dejando de lado la faz estocástica que, aunque de gran interés, escapa a los fines de este informe.

Cabe hacer presente nuevamente los planteos matriciales de las formas estructural y reducida del modelo (5) y (11):

$$Y\Gamma + X\beta + U = 0$$
$$Y = - X\beta\Gamma^{-1} - U\Gamma^{-1}$$
$$Y = X\Pi + V$$

donde:

Π es la matriz de coeficientes de la forma reducida

Γ y β son las matrices de coeficientes de la forma estructural.

El pasaje anteriormente referido, debe hacerse a través de la relación:

$$-\beta\Gamma^{-1} = \Pi$$

o, equivalentemente:

$$-\beta = \Pi\Gamma$$

Conocida Π, se tratará de deducir Γ y β a partir de ella. Ya se ve, en términos del número de elementos, que no será en general posible resolver este problema.

En efecto, Π tiene sólo K . M elementos, mientras que Γ y β, tienen conjuntamente (M . M) + (K . M) elementos.

No obstante, la solución puede darse de existir suficientes restricciones a priori sobre Γ y β, que son frecuentes en los modelos económicos. Tales restricciones pueden ser de varios tipos: coeficientes que se saben a priori, iguales a 0; columnas enteras conocidas en Γ y β; etc. El primero de los mencionados corresponde a variables que no intervienen en las correspondientes relaciones y el segundo, a ecuaciones contables o definicionales.

Sea la m-ésima relación de la forma estructural (expresada en forma matricial a fin de abarcar todas las observaciones):

$$Y\gamma_m + X\beta_m + u_m = 0 \qquad (18)$$

La información a priori consiste en saber que ciertas componentes de los vectores columna γ_m y β_m son ceros; es decir, que ofrecen el siguiente aspecto:

$$\gamma_m = \begin{bmatrix} \gamma_m^{(1)} \\ 0_\gamma \end{bmatrix} \qquad \beta_m = \begin{bmatrix} \beta_m^{(1)} \\ 0_\beta \end{bmatrix}$$

donde $\gamma_m^{(1)}$ y $\beta_m^{(2)}$ simbolizan las componentes distintas de cero.

$\gamma_m^{(1)}$: vector de M_1 componentes (variables dependientes incluídas en la relación).

0_γ : vector nulo de M_2 componentes (variables dependientes excluídas de la relación).

$\beta_m^{(1)}$: vector de K_1 componentes (variables predeterminadas incluídas en la relación).

0_β : vector nulo de K_2 componentes (variables predeterminadas excluídas de la relación).

Particionando convenientemente las matrices de datos Y y X, se tiene en (18):

$$Y_1 \gamma_m^{(1)} + Y_2 \, 0_\gamma + X_1 \beta_m^{(2)} + X_2 \, 0_\beta = 0$$

o, equivalentemente:

$$Y_1 \gamma_m^{(1)} + X_1 \beta_m^{(2)} = 0$$

donde:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$$

Obsérvese, asimismo, que Y_1 y X_1 son las matrices de datos de las variables incluídas en la relación m-ésima.

Volviendo a la forma reducida (11), se observa que las particiones de X e Y determinan una partición y un reordena - miento de $\widetilde{\Pi}$ y V, lo que permite **expresarla** de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\Pi}_{11} & \widetilde{\Pi}_{12} \\ \widetilde{\Pi}_{21} & \widetilde{\Pi}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

donde:

$\widetilde{\Pi}_{11}$: es una submatriz de orden $K_1 \cdot M_1$
$\widetilde{\Pi}_{12}$: es una submatriz de orden $K_1 \cdot M_2$
$\widetilde{\Pi}_{21}$: es una submatriz de orden $K_2 \cdot M_1$
$\widetilde{\Pi}_{22}$: es una submatriz de orden $K_2 \cdot M_2$

Recuérdese que la relación que liga Γ y β con $\widetilde{\Pi}$, es:

$$-\widetilde{\Pi} \; \Gamma = \beta$$

y para los coeficientes de la relación estructural m-ésima:

$$-\widetilde{\Pi} \gamma_m = \beta_m$$

La partición de $\overline{\Pi}$ permite expresar esta igualdad, así:

$$-\begin{bmatrix} \overline{\Pi}_{11} & \overline{\Pi}_{12} \\ \overline{\Pi}_{21} & \overline{\Pi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_m^{(1)} \\ 0_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_m^{(1)} \\ 0_\beta \end{bmatrix} \qquad (20)$$

o sea:

$$-\overline{\Pi}_{11} \quad \gamma_m^{(1)} = \beta_m^{(1)} \qquad (21)$$

$$-\overline{\Pi}_{21} \quad \gamma_m^{(1)} = 0_\beta \qquad (22)$$

Si los sistemas de ecuaciones (21) y (22) permiten deducir unívocamente los valores de $\gamma_m^{(1)}$ y $\beta_m^{(1)}$ a partir de $\overline{\Pi}_{11}$ y $\overline{\Pi}_{21}$, se dirá que la relación m-ésima está identificada.

La relación (22) es un sistema homogéneo de K_2 ecuaciones con M_1 incógnitas (la matriz del sistema es de orden $K_2 \cdot M_1$). Para que tenga solución no trivial es necesario y suficiente que el rango de $\overline{\Pi}_{21}$ sea menor que M_1:

$$r(\overline{\Pi}_{21}) < M_1$$

Conviene recalcar que el propósito consiste en determinar los coeficientes $\gamma_m^{(1)}$ y $\beta_m^{(1)}$ "a menos de una constante" (la indeterminación se salvará con la regla de normalización). Ello implica la exigencia de que el espacio solución S de (22) sea de dimensión igual a uno. Esta dimensión es:

$$\dim S = M_1 - r(\overline{\Pi}_{21})$$

consecuentemente, deberá ser:

$$M_1 - r(\overline{\Pi}_{21}) = 1$$

Si el sistema (22) permite deducir los valores de los coeficientes γ, éstos reemplazados en el sistema (21) harán posible deducir los valores de los coeficientes β.

Finalmente, la condición necesaria y suficiente de identificación, es:

$$r(\Pi_{21}) = M_1 - 1 \qquad (23)$$

En virtud de ser el rango menor o igual al número de filas, se tendrá necesariamente:

$$M_1 - 1 \leq K_2$$

En esencia, puede concluirse con que se tiene:

1) una condición necesaria y suficiente para que la relación m-ésima esté identificada, es que $r(\Pi_{21}) = M_1 - 1$.

2) una condición necesaria para que la relación m-ésima esté identificada, consiste en que el número de variables dependientes incluídas menos uno, sea -a lo sumo- igual al número de variables predeterminadas excluídas.

Como es lógico, con los elementos hasta ahora manejados no es posible verificar la condición 1) para cada relación estructural, puesto que no se conoce la matriz Π. En la práctica, la estimación de $\gamma_m^{(1)}$ y $\beta_m^{(1)}$ deberá hacerse a través de la matriz P.

Si se denominan $\hat{\gamma}_m^{(1)}$ y $\hat{\beta}_m^{(1)}$ a los estimadores de γ' y β' deberá cumplirse:

$$- P_{11} \hat{\gamma}_m^{(1)} = \hat{\beta}^{(1)} \qquad (24)$$

$$- P_{21} \hat{\gamma}_m^{(1)} = 0_{\beta} \qquad (25)$$

donde P_{11} y P_{21} provienen de particiones y reordenaciones de P, análogas a las de la matriz Π .

No habiendo restricción alguna sobre P, la matriz P_{21} -que es de orden $K_2 \cdot M_1$- tendrá rango máximo (**mínimo entre número de filas yde columnas**):

$$r(P_{21}) = \min [\bar{K}_2, M_1]$$

Se deben considerar separadamente dos casos:

(1) $M_1 - 1 = K_2$

Se puede decir, en este caso, que se tienen los requisitos numéricos de información. El efecto será:

$$r(P_{21}) = \min [K_2, M_1] = K_2 = M_1 - 1$$

Consecuentemente, la relación (25) tiene solución única (a menos de una constante), lo que permitirá obtener $\hat{\gamma}_m^{(1)}$. A través de (24) se obtiene $\hat{\beta}_m'^{(1)}$ y la relación m-ésima estará exactamente identificada.

(2) $M_1 - 1 < K_2 \Rightarrow M_1 \leq K_2$

$$\rho(P_{21}) = \min [\bar{M}_1, K_2] = M_1$$

Por lo tanto, no habrá solución no trivial para el sistema (25). El método indirecto de mínimos cuadrados propuesto no es aplicable. Este es el caso de sobre-identificación que se presenta con más frecuencia en los modelos económicos.

Se concluye expresando los siguientes aspectos:

1) una condición <u>necesaria y suficiente</u> para que la relación m-ésima esté identificada, es que $\rho(\Pi_{21}) = M_1 - 1$.
2) una condicion <u>necesaria</u> para que la relación m-ésima esté identificada, es que el número de endógenas incluídas menos uno, sea a lo sumo igual al número de predeterminadas excluído.

Naturalmente, con los elementos que hasta ahora se han manejado no es posible verificar la condición 1) para cada relación, dado que no se conoce la matriz Π. En la Sección VIII de este informe, se verifica la condición 2) para cada valor en el modelo de Willy van Rijckeghem.

SECCION V

Método de mínimos cuadrados en dos etapas.

En esta sección se explica someramente el método de estimación aconsejable para el caso de sobreidentificación del modelo.

Al igual que en todas las secciones anteriores, la explicación es netamente descriptiva y, además, se refiere a una sola función.

Supóngase que la regla de normalización es aplicada desde el principio y que la variable endógena, cuyo coeficiente es -1, se escribe a la izquierda. Entonces queda:

$$y = Y_1 \gamma_1 + X_1 \beta_1 + u \qquad (26)$$

y = vector de datos de la variable endógena de la izquierda

Y_1 = matriz de datos de las variables endógenas incluídas a la derecha.

X_1 = matriz de datos de las variables predeterminadas incluídas.

u = vector de residuales.

Para interpretar convenientemente la formulación, es aconsejable particionar la matriz Π conforme se indica seguidamente.

Cabe recordar que Π es una matriz de orden K . M. Cada columna corresponde a una relación de la forma reducida y cada elemento en la columna es el coeficiente de una variable predeterminada.

Las variables dependientes que intervienen en la relación que se trata de estimar, quedan clasificadas, según (26), en: 1) "dependientes a la izquierda" (sólo una, y consecuentemente, un solo vector de "y" datos); 2) "dependientes a la derecha" (siendo Y la matriz de datos).

En cuanto a las variables predeterminadas, ellas se clasifican -según (26)- en: 1) "predeterminadas incluídas" (X_1); 2) "predeterminadas excluídas".

La partición de los coeficientes que aparecen en Π, se efectúa en base a la clasificación, refiriéndose el primer índice a las dependientes y el segundo a las predeterminadas.

	dependientes a la derecha	dependientes a la izquierda	dependientes excluídas
Predeterminadas incluídas	Π_{10}	Π_{11}	Π_{12}
Predeterminadas excluídas	Π_{20}	Π_{21}	Π_{22}

La ecuación (26) también induce una partición en X y en Y.

$$Y = \begin{bmatrix} y & Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$$

Lo que permite expresar de la siguiente mane a la forma reducida:

$$(y \quad Y_1 \quad Y_2) = (X_1 \; X_2) \begin{bmatrix} \pi_{10} & \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{20} & \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} + (v_0 \; v_1 \; v_2)$$

En consecuencia, las relaciones correspondientes a las "dependientes a la derecha", en la forma reducida, son:

$$Y_1 = X_1 \pi_{11} + X_2 \pi_{21} + v_1$$

y llamando $\Pi_{x1} = \begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{21} \end{bmatrix}$ se tiene:

$$Y_1 = X \Pi_{x1} + V_1 \qquad (27)$$

Reemplazando (27) en (26), se tiene:

$$y = X \Pi_{x1} \gamma_1 + X_1 \beta_1 + W \qquad (28)$$

La estimación directa de (28) no es posible por ser Π_{x1} desconocida y, en consecuencia, también lo es $X\Pi_{x1}$. No obstante, se tienen estimadores consistentes de Π_{x1}, que permiten la estimación de $\bar{Y}_1 = X\Pi_{x1}$ mediante

$$\hat{\bar{Y}}_1 = X \, P_{x1} \quad \text{(primera etapa)}$$

donde P_{x1} proviene de particionar y reordenar P, de la misma manera que Π .

En una segunda etapa, se calculan los estimadores clásicos b y c de β y γ , respectivamente.

La matriz de datos para ello (28) sería, entonces:

$$X = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 & X_1 \end{bmatrix}$$

y como

$$X' = \begin{bmatrix} \hat{X}'_1 \\ X'_1 \end{bmatrix}$$

Se tiene que la fórmula de mínimos cuadrados clásica para esta estimación, es:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}'_1 \hat{Y}_1 & \hat{Y}'_1 X_1 \\ X'_1 \hat{Y}_1 & X'_1 X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 y \\ X'_1 y \end{bmatrix} \quad \text{(segunda etapa)}$$

Se puede demostrar que los estimadores obtenidos por este método son consistentes. Por otra parte, también puede demostrarse que coinciden con los estimadores de mínimos cuadrados indirectos, en el caso en que el modelo esté exactamente identificado.

SECCION VI

Presentación del modelo

En el cuadro nº 1 de este informe, figura lo que se podría llamar la especificación económica del modelo; es decir, se indican las variables económicas que se relacionan entre si, sin precisar la forma funcional que se ajustará. En el cuadro nº 2, se establece el significado de las variables usadas. Este tipo de notación permite visualizar el comportamiento combinado de las distintas unidades económicas, tal como fueran especificadas por Willy van Rijckeghem. Cabe aclarar que éste es un modelo lineal en incrementos porcentuales de las variables. Según el lenguaje corriente en econometría, consta de 16 variables endógenas y 24 exógenas.

Aparece en esta primera formulación el "modelo completo", como es utilizado por el Presupuesto Económico Nacional, para llegar a la determinación de las variables económicas para el camino econométrico. Sin embargo, para la finalidad de este trabajo sólo interesan las relaciones donde aparecen interacciones entre variables endógenas, caso en que queda realmente comprometida la consistencia de los estimadores clásicos de mínimos cuadrados, de modo que más adelante nos referiremos a un modelo más restringido (modelo II, cuadro Nº 8).

En primer lugar, se harán algunos comentarios y observaciones sobre el modelo I. Las relaciones 1/8 10 y 11 son tales que, su estimación numérica surgirá de un ajuste lineal basado en datos históricos. Es importante notar que en las ecuaciones 1, 2, 7 y 8, se usan como variables explicativas, diferencias de incrementos porcentuales. Ello se debe a que se está estimando el aumento porcentual de un cociente a través de la diferencia entre los aumentos del numerador y denominador. Esto se refleja en una restricción a priori al estimar los coeficientes: el del minuendo será igual y de signo contrario al del sustraendo.

La relación 9 indica como se calculó la variable con retardo $m_{r-1/3}$, referida a importaciones que no son bienes de capital.

Las funciones 12 a 15 son definicionales y, consecuentemente, sus coeficientes son conocidos a priori (se trata de coeficientes de partición, ya que las variables son incrementos porcentuales).

La función 11 tiene como variables explicativas a dos puramente exógenas η y η_{-1}, que se refieren a los salarios de convenio. Por esta razón, no planteará ningún problema de identificación. Por otra parte, la variable endógena S_r (salarios) no aparece como explicativa en ninguna de las otras funciones del modelo. En consecuencia, esta función no integrará el modelo II.

El criterio adoptado para la selección de las relaciones que integran el modelo II, es el siguiente: (a) que contenga como explicativa una endógena; (b) que la variable endógena que se trata de explicar en ella, esté en otra como explicativa.

Dado que la información disponible al momento de realizar este trabajo correspondía al período 1951/64, y el modelo II consta de 15 variables predeterminadas, se tiene: T = 14; K = 17. Consecuentemente, es T menor que K y no es posible la estimación de II (ver sección III).

La solución provisoria a este problema, fue restringir aún más el modelo a un grupo menor de relaciones. Esto es criticable, ya que se obtienen estimadores consistentes sólo de los coeficientes de las relaciones seleccionadas, pero la alternativa de eliminar variables predeterminadas significa cambiar la especificación del modelo.

De todas maneras, este trabajo representa una ejemplificación de la técnica y es imprescindible para una estimación definitiva obtener una masa más completa de datos.

Las relaciones seleccionadas fueron las que presentan mejores resultados de ajuste lineal en el método ordinario de mínimos cuadrados y aparecen en el cuadro Nº 4.

SECCION VII

Conclusiones

Se ha tratado de explicar someramente dos técnicas para estimar coeficientes en sistemas simultáneos. Se los ha tratado sólo en su aspecto descriptivo, dejando de lado la faz estocástica, que escapa a las posibilidades de un informe de esta naturaleza.

Es importante recalcar los siguientes hechos fundamentales:

1) todos los métodos tienen como objeto solucionar el problema de la consistencia de los estimadores de mínimos cuadrados;
2) el método indirecto de mínimos cuadrados está limitado por el problema de identificación del modelo. La estimación consistente de los coeficientes se logra, entonces, mediante el método de mínimos cuadrados en dos etapas;
3) el método de mínimos cuadrados en dos etapas, se refiere a la estimación de cada relación de la forma estructural y es recomendable cuando la limitación de recursos de cálculo (calculadoras de escritorio), hace necesaria la estimación de función por función. En efecto, cuando se desea manejar el sistema completo y se cuenta con computadoras electrónicas, son preferibles otros métodos no detallados aquí.

4) El número de períodos incluídos en la serie debe ser grande (mayor que el número de predeterminadas más uno) para asegurar las posibilidades de estimación de la primera etapa.

Cuadro N° 1

Especificación económica del modelo de W.V.R.

---

1) $C_a = f\left[z,\ (z-w),\ (p_a - p_r)\right]$

2) $C_r = f\left[z,\ (z_a - z_r)\right]$

3) $i = f\ (z_r,\ m_i)$

4) $m_o = f\ (z_r,\ x_{-1})$

5) $e_r = f\ (z_r,\ e_{r,-1},\ t)$

6) $x = f\ (z_a,\ c_a,\ v)$

7) $v = f\left[v_{-1},\ v_{-2},\ z_a,\ (p_a - p_r)\right]$

8) $z_r = f\left[(B_r - \eta),\ m_{o,-1/3},\ z_a\right]$

9) $m_{o-1/3} = \frac{2}{3}\ m_o + \frac{1}{3}\ m_{o-1}$

10) $p_r = f\ (D_{-\frac{1}{2}},\ z_r,\ \pi,\ \eta)$

11) $S_r = f\ (\eta,\ \eta_{-1})$

12) $z = \alpha_a z_a + \alpha_r z_r + \alpha_g z_g$

13) $D = \beta_1 F + \beta_2 G + \beta_3 B - \beta_4 H$

14) $B = \gamma_a B_a + \gamma_r B_r$

15) $p = \delta_a p_a + \delta_r p_r + \delta_g p_g$

Cuadro Nº 2

NOTACION

1) C_a : consumo de bienes agropecuarios.

2) C_r : consumo de bienes del resto

3) Z : producto real.

4) Z_a : producto real del resto.

5) p : precios implícitos.

6) p_r : precios implícitos del resto.

7) i : inversión bruta interna fija.

8) m_o : importaciones de bienes de consumo e intermedios.

9) x : exportaciones.

10) e_r : empleo del resto.

11) v : stocks agropecuarios.

12) S_r : salarios efectivos del resto.

13) D : oferta monetaria.

14) B : créditos bancarios al sector privado.

15) w : ingreso de asalariados.

16) z_a : producto real agropecuario.

17) z_g : producto real del gobierno.

18) p_a : precios implícitos agropecuarios.

19) m_i : importaciones de bienes de capital.

20) η : salarios de convenio.

21) B_r : créditos bancarios al resto.

22) B_a : créditos bancarios al sector agropecuario.

23) π : control de precios.

24) F : sector externo, creación de medios de pago.

25) G : préstamos al gobierno.

26) H : cuentas varias.

27) p_g: precios implícitos del gobierno general

Cuadro Nº 3

MODELO II

$$C_a = (\gamma_{11,1} + \gamma'_{11,1})\, z \pm \beta_{8,1}\, w \pm \beta_{a,1}\, p_a \pm \gamma_{10,1}\, p_r \pm a_1;\ \gamma'_{11,1} = -\beta_{8,1};\ \beta_{a,1} = -\gamma_{10,1}$$

$$C_r = \gamma_{11,2}\, z + \beta_{4,2}\, z_a + \gamma_{8,2}\, z_r \pm a_2;\ \beta_{4,2} = -\gamma_{8,2}$$

$$i = \gamma_{8,3}\, z_r + \beta_{10,3}\, m_i \pm a_3$$

$$m_o = \gamma_{8,4}\, z_r + \beta_{11,4}\, x_{-1} + a_4$$

$$e_r = \gamma_{8,5}\, z_r + \beta_{12,5}\, e_{r-1} + \beta_{13,5}\, t \pm a_5$$

$$x = \beta_{4,6}\, z_a + \gamma_{1,5}\, C_a + \gamma_{7,5}\, v \pm a_6$$

$$v = \beta_{14,7}\, v_{-1} + \beta_{15,7}\, v_{-2} + \beta_{4,7}\, z_a \pm \beta_{9,7}\, p_a \pm \gamma_{10,7}\, p_r \pm a_7;\ \beta_{9,7} = -\gamma_{10,7}$$

$$z_r = \beta_{1,8}\, B_r + \beta_{2,8}\, \eta + \gamma_{9,8}\, m_{o,-1/3} \pm \beta_{4,8}\, z_a + a_8;\ \beta_{1,8} = -\beta_{2,8}$$

$$m_{o,-1/3} = \beta_{16,9}\, m_{o,-1} + \gamma_{4,9}\, m_o + a_9;\ \beta_{16,9} = 1/3;\ \gamma_{4,9} = 2/3$$

$$p_r = \beta_{6,10}\, D_{-1/2} + \gamma_{8,10}\, z_r + \beta_{7,10}\, \pi + \beta_{2,10}\, \eta \pm a_{10}$$

$$z = \beta_{4,11}\, z_a + \gamma_{8,11}\, z_r \pm \beta_{5,11}\, z_g \pm a_{11};\ \beta_{4,11} = \alpha_a;\ \gamma_{8,11} = \alpha_r;\ \beta_{5,11} = \alpha_g$$

Cuadro Nº 4

RELACIONES DEL MODELO III

1) $C_a = f\left[Z, (Z - \omega), (p_a - p_r)\right]$

2) $C_r = f\left[Z, (Z_a - Z_r)\right]$

3) $i = f\left[Z_r, m_i\right]$

4) $m_o = f\left[(Z_r, x_{-1})\right]$

5) $Z_r = f\left[(B_r - \eta), m_{o,-1/3}, Z_a\right]$

6) $m_{o-1/3} = 2/3\ m_o + 1/3\ m_{o-1}$

7) $p_r = f\ (D_{1/2}, Z_r, \pi, \eta)$

8) $Z = x_a Z_a + x_r Z_r + x_g Z_G$

Cuadro N° 5

MATRIZ Γ' PARA EL MODELO III

(Se aplicó la regla de normalización y se colocó cero en los coeficientes que se sabía que tenían ese valor. Las restantes restricciones aparecen a la derecha)

	C_a	C_r	i	m_o	Z_r	$m_{o,-1/3}$	P_r	Z
C_a	-1	0	0	0	0	0	0	0
C_r	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	-1	0	0	0	0	0
m_o	0	0	0	-1	0	$\gamma_{4,3}$	0	0
Z_r	0	$\gamma_{5,2}$	$\gamma_{5,3}$	$\gamma_{5,4}$	-1	0	$\gamma_{5,7}$	$\gamma_{5,8}$
$m_{o,-1/3}$	0	0	0	0	$\gamma_{6,5}$	-1	0	0
P_r	$\gamma_{7,1}$	0	0	0	0	0	-1	0
Z	$(\gamma_{8,1}+\gamma'_{8,1})$	$\gamma_{8,2}$	0	0	0	0	0	-1

$\gamma_{4,3} = \frac{2}{3}$

$\gamma_{5,8}$ = coeficiente conocido "a priori"

Cuadro N° 8

MATRIZ β PARA EL MODELO III

(Los ceros indican coeficientes que se sabe "a priori" tienen valor y las restantes restricciones se indican a la derecha)

	C_a	C_r	i	m_o	Z_r	$m_{o,-\frac{1}{2}}$	p_r	Z
B_r	0	0	0	0	$\beta_{1,5}$	0	0	0
η	0	0	0	0	$\beta_{2,5}$	0	$\beta_{2,7}$	0
Z_a	0	$\beta_{3,2}$	0	0	$3,5$	0	0	$\beta_{3,8}$
Z_g	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{4,8}$
$D_{-\frac{1}{2}}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,7}$	0
π	0	0	0	0	0	0	$\beta_{6,7}$	0
ω	$\beta_{7,1}$	0	0	0	0	0	0	0
p_a	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	0	0	0
m_i	0	0	$\beta_{9,3}$	0	0	0	0	0
x_{-1}	0	0	0	$\beta_{10,4}$	0	0	0	0
m_{o-1}	0	0	0	0	0	$\beta_{11,6}$	0	0
μ	$12,1$	$\beta_{12,2}$	$\beta_{12,3}$		$\beta_{12,4}$	$\beta_{12,6}$	$\beta_{12,7}$	$\beta_{12,8}$

$\beta_{7,1} = \gamma'_{11}$

$\beta_{8,1} = -\gamma_{7,1}$

$\beta_{3,2} = -\gamma_{5,2}$

$\beta_{15} = -\beta_{2,5}$

$\beta_{11,6} = 1/3$

Cuadro N° 7

Y: MATRIZ DE VARIABLES CONJUNTAMENTE DISPUESTAS

Año	C_a	C_r	i	m_o	Z_r	$m_{o,-1/3}$	P_r	Z
1951	0	3	14	10	3	8	30	4
1952	- 8	-4	-12	-27	-4	-15	24	-6
1953	7	-1	- 1	-26	2	-26	4	6
1954	5	6	1	53	6	27	9	5
1955	5	10	11	19	9	30	13	7
1956	5	3	5	-12	3	- 2	19	2
1957	-1	6	12	16	7	7	22	5
1958	1	6	2	9	5	11	36	5
1959	-20	-5	-10	- 9	-6	- 3	95	-5
1960	8	5	38	6	8	1	20	6
1961	14	3	13	21	8	16	15	6
1962	-3	-6	- 6	-15	-4	- 3	27	-3
1963	-4	-4	-15	-27	-6	-23	22	-5
1964	7	11	6	32	9	12	24	9

Cuadro Nº 8

X: MATRIZ DE VARIABLES PREDETERMINADAS

Año	B_r	η	Z_a	Z_g	$D_{-\frac{1}{2}}$	π	w	p_a	m_i	x_{-1}	m_{o-1}	u
1951	36	19	6	2	19	0	-6	54	14	38	4	1
1952	10	28	-14	0	15	0	2	20	-26	-21	10	1
1953	11	4	29	2	18	1	4	17	- 9	-26	-27	1
1954	21	17	0	5	20	1	8	3	0	53	-26	1
1955	23	3	4	1	17	0	2	6	17	7	53	1
1956	28	37	-5	7	19	0	-3	32	2	-10	19	1
1957	18	3	-1	2	17	0	0	29	4	15	-12	1
1958	31	47	4	2	29	0	12	35	-10	5	16	1
1959	19	70	-1	0	39	-1	-17	133	-29	2	9	1
1960	36	18	0	1	31	0	7	12	99	5	-9	1
1961	30	24	-1	1	23	0	9	-3	17	1	6	1
1962	12	25	0	0	13	0	-6	41	13	-8	21	1
1963	12	25	0	0	21	0	-6	36	-27	35	-15	1
1964	24	32	10	0	37	0	17	45	-35	2	-27	1

Cuadro Nº 9

MATRIZ X'X

7.977	8.047	644	582	7.423	13	813	9.908	2.869	2.911	498	150	- 56	-583	613	311
8.047	13.120	76	535	9.235	- 49	- 51	17.458	- 2.141	1.855	640	472	-162	-525	1.282	352
644	76	1.233	44	806	30	301	832	- 137	- 132	- 34	- 17	- 98	94	- 991	31
582	535	44	93	470	7	57	524	145	272	42	- 35	26	37	15	23
7.423	9.235	806	470	8.080	- 1	659	12.354	455	2.289	447	368	-105	-245	- 89	318
13	- 49	30	7	- 1	3	29	- 113	20	25	- 5	- 9	5	7	- 62	1
813	- 51	301	57	659	29	1.057	-1.757	564	36	- 43	73	93	- 36	-736	23
9.908	17.458	832	524	12.354	-113	-1.757	29.584	-4.719	3.026	872	516	-845	-713	1.194	460
2.869	-2.141	-137	145	455	20	564	-4.719	14.416	756	121	1	564	527	1.343	30
2.911	1.855	-132	272	2.289	25	36	3.029	756	7.092	27	30	-407	- 85	-1.421	98
498	640	- 34	42	447	- 5	- 43	872	121	27	85	- 20	- 11	- 21	333	19
150	472	- 17	- 35	368	- 9	73	516	1	30	- 20	231	- 34	5	-156	7
- 56	-162	- 98	26	-105	5	93	- 845	564	- 407	- 11	- 34	189	54	269	- 3
- 83	-525	94	37	-245	7	- 36	- 713	527	- 85	- 21	5	54	189	125	- 3
613	1.282	-991	15	- 89	- 62	-736	1.194	1.343	-1.421	333	-156	269	125	6.684	22
311	352	31	23	318	1	23	460	30	98	19	7	- 3	- 3	22	14

Cuadro Nº 10

MATRIZ $(X'X)^{-1}$

0,014179	-0,004929	-0,010798	-0,033519	0,013816	0,437537	-0,012944	0,000793	-0,002731	-0,002929	0,002166	-0,438976
-0,004925	0,003533	0,005522	0,010330	-0,007728	-0,186336	0,004773	-0,000835	0,001140	0,001306	-0,001164	0,190066
-0,010790	0,005523	0,012229	0,027667	-0,014537	-0,433262	0,010227	-0,001587	0,002177	0,002705	-0,002316	0,404857
-0,033515	0,010339	0,027681	0,110434	-0,033945	-1,200441	0,031964	-0,002185	0,006121	0,006671	-0,006056	1,067632
0,013825	-0,007737	-0,014555	-0,033969	0,026884	0,568175	-0,019538	-0,000007	-0,003432	-0,003597	0,003567	-0,616519
0,437322	-0,186387	-0,433324	-1,200068	0,567612	17,893223	-0,437704	0,052003	-0,084956	-0,101646	0,099975	-16,521551
-0,012962	0,004785	0,010251	0,032008	-0,019551	-0,438530	0,019129	0,001189	0,003000	0,002970	-0,002245	0,473589
0,000784	-0,000831	-0,001580	-0,002165	-0,000019	0,051705	0,001200	0,001092	0,000010	-0,000228	0,000321	-0,029509
-0,002733	0,001142	0,002180	0,006125	-0,003432	-0,085051	0,002998	0,000008	0,000677	0,000591	-0,000475	0,091109
-0,002929	0,001307	0,002707	0,006672	-0,003594	-0,101708	0,002965	-0,000231	0,000591	0,000850	-0,000488	0,100411
0,002164	-0,001164	-0,002316	-0,006052	0,003563	0,099953	-0,002241	0,000323	-0,000475	-0,000487	0,000821	-0,095591
-0,438952	0,190200	0,405093	1,067695	-0,616195	-16,528119	0,472965	-0,029817	0,091054	0,100405	-0,095644	17,021244

Cuadro Nº 11

MATRIZ X' Y

782	1.110	2.525	2.524	1.298	1.955	8.035	1.138
- 738	398	254	271	403	567	13.274	352
391	200	295	148	254	- 222	169	404
101	97	156	245	110	168	410	98
224	876	1.548	1.745	980	1.113	9.553	899
32	10	10	36	14	4	- 82	16
742	495	708	1.568	542	794	- 869	478
- 2.388	114	- 283	- 1.109	- 39	- 371	20.588	130
1.660	631	5.132	1.975	1.162	1.780	- 1.856	873
138	650	798	4.242	503	2.374	2.327	309
- 371	19	410	- 958	- 23	1.544	1.734	- 201
16	33	58	50	40	40	360	36

Cuadro Nº 12

MATRIZ P

-0,0429	0,4551	1,5840	1,4840	0,3512	2,2174	0,5913	0,5627
0,1310	-0,5015	-1,0692	-1,4936	-0,3816	-1,4276	-0,0630	-0,3986
0,6437	-0,3866	-1,2013	-2,0817	-0,1993	-2,3183	-0,8935	-0,2251
1,4658	0,3097	-1,7319	-0,9735	0,4930	-3,5572	-2,6898	-0,1670
-0,2588	0,8395	2,0382	2,7803	0,5647	3,0479	1,3007	0,7004
-16,8181	10,6104	40,4710	64,9650	4,9511	81,3346	27,4237	13,0613
0,3155	0,1733	-0,6260	1,0658	0,2256	-0,4250	-0,7907	-0,0457
-0,2832	0,1228	0,2824	0,7578	0,0655	0,5737	0,5163	0,0864
0,0454	-0,1121	-0,0195	-0,2694	-0,0500	-0,4140	-0,0790	-0,0903
0,0552	-0,0368	-0,3053	0,2299	-0,0417	-0,0994	-0,1354	-0,1053
-0,0928	0,1816	0,3441	0,6946	0,1102	0,9766	0,2618	0,1259
10,6454	-18,6994	-54,4033	-81,9892	-11,1659	-92,5938	-25,6856	-17,9889

Cuadro N° 13

COMPARACION ENTRE METODO CLASICO DE MINIMOS CUADRADOS (mc) Y MINIMOS CUADRADOS EN DOS ETAPAS (de)

---

mc

$ca = 1,113\ Z - 0,093\ (Z - W) - 0,186\ (po - pr) - 0,4 \qquad R^2 = 0,782$

de

$ca = 0,868\ Z - 0,240\ (Z - W) - 0,195\ (po - pr) + 0,4 \qquad R^2 = 0,716$

mc

$cr = 0,941\ Z - 0,177\ (Za - Zr) - 0,2 \qquad R^2 = 0,876$

de

$cr = 0,842\ Z - 0,174\ (Za - Zr) + 0,1 \qquad R^2 = 0,817$

mc

$i = 1,210\ Zr + 0,258\ mi + 0,1 \qquad R^2 = 0,924$

de

$i = 1,165\ Zr + 0,262\ mi + 0,2 \qquad R^2 = 0,921$

mc

$mo = 2,989\ Zr + 0,505\ X_{-1} - 8,6 \qquad R^2 = 0,791$

de

$m_o = 2,625\ Zr + 0,515\ X_{-1} - 7,6 \qquad R^2 = 0,697$

mc

$Zr = 0,132\ (Br - n) + 0,193\ mo_{-1/3} + 0,119\ Za + 2,5 \qquad R^2 = 0,781$

de

$Zr = 0,147\ (Br - n) + 0,131\ mo_{-1/3} + 0,147\ Za + 2,6 \qquad R^2 = 0,682$

mc

$Pr = 0,336\ D_{-1/2} - 0,986\ Zr - 25,224\ \pi + 0,253\ n + 17,1 \qquad R^2 = 0,871$

de

$Pr = 0,783\ D_{-1/2} - 1,142\ Zr - 19,674\ \pi + 0,259\ n + 6,7 \qquad R^2 = 0,859$

SECCION VIII

Estimación de los coeficientes para el modelo de W.V.R.

En esta Sección se incluye un conjunto de cuadros relativos a la estimación de los coeficientes del modelo III por el método de mínimos cuadrados en dos etapas.

Los cuadros 5 y 6 corresponden a las matrices Γ y β para el modelo III respectivamente.

Los cuadros 7 y 8 presentan las matrices de datos Y y X.

A continuación, se verifica la condición dei ientificación para el modelo III

Relación Nº	M,-1	K_2
1	1	10
2	1	11
3	0	11
4	0	11
5	0	9
6	0	11
7	0	9
8	0	10

Como se ve, es para todas las relaciones $M, -1 < K_2$. Ello implica que el modelo III está sobreidentificado. Convenientemente, se usará para estimar los coeficientes estructurales el método de mínimos cuadrados en dos etapas.

En los cuadros nros. 9, 10 y 11 se detalla la estimación de Π a través de la fórmula (13) (1ra. etapa).

En el cuadro nº (13), aparecen los resultados de la 2da. etapa y se comparan con los obtenidos por el método clásico del mínimo cuadrado 1/.

1/ Estas estimaciones fueron obtenidas por Alfredo Monza y Marta Kreser en el Sector Presupuesto Económico Nacional.

APENDICE

Definición 1: Estimador consistente

Sea α un parámetro poblacional y sea $\hat{\alpha}$ un estimador de α, obtenido a partir de una muestra de tamaño T Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$, arbitrario, se tiene:

$$\lim_{T \to \infty} P \left[|\hat{\alpha} - \alpha| > \varepsilon \right] = 0$$

donde P indica probabilidad del suceso expresado por la desigualdad dentro del corchete.

Se dice entonces que $\hat{\alpha}$ es un estimador consistente de α. Es decir que la probabilidad de que $\hat{\alpha}$ difiera de α en más de una cantidad ε dada, puede hacerse tan pequeña como quiera, con sólo tomar muestras suficientemente grandes.

Definición 2: Partición de una matriz

Sea una matriz A de orden m.n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} a_{m'+1,1} & a_{m'+1,2} & \cdots & a_{m'+1,n'} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn'} \end{bmatrix} \quad A_{22}=\begin{bmatrix} a_{m'+1,n'+1} & \cdots & a_{m'+1,n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m,n'+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se ha hecho una partición de A, en cuatro submatrices:

A_{11} (de orden m'n'), A_{12} (de orden m'n"), A_{21} (de orden m" n') y A_{22} (de orden m"n").

Análogamente pueden hacerse todas las particiones de A, que serán tantas como las descomposiciones entre los números m y n.

\- 0 -

<u>Teorema 1</u>

Sean A y B dos matrices y sea C su producto:

$$C = AB$$

Entonces se tiene:

$$r(C) \leq \min [r(A), r(B)]$$

si $A = X'$ y $B = X$, entonces $r(AB) = r(X'X) = r(X)$

\- 0 -

<u>Teorema 2</u> (sobre sistemas lineales homogéneos)

Sea un sistema lineal homogéneo de <u>m</u> ecuaciones con <u>n</u> incógnitas. Sea A la matriz del sistema (A será de orden m.n) y sea Y el vector de incógnitas (Y vector columna de <u>m</u> componentes).

$$AY = \vec{0} \qquad (1)$$

donde $\vec{0}$ indica el vector nulo de n componentes, supóngase $m \geqslant n$.

Para que el sistema planteado tenga solución distinta de la solución trivial es necesario y suficiente que

$$r\ (A) < n$$

Las soluciones de (1) constituyen un espacio vectorial S, cuya dimensión es:

$$\dim S = n - r\ (A)$$

Por ejemplo: si $n-r\ (A) = 0$, el espacio S será un punto (en ese caso es $Y = \vec{0}$, o sea la solución trivial).

Si $n-r\ (A) = 1$, el espacio S será una recta que pasa por el origen (ya que es un espacio vectorial). O sea dada una solución, multiplicándola por una constante cualquiera, se obtendrá otra solución.