

INSTITUTO NACIONAL
DE
ESTADISTICAS Y CENSOS

FUNCIONES DE PRODUCCION Y RENDIMIENTOS A ESCALA
EN EL SECTOR MANUFACTURERO ARGENTINO. 1963.

AUTOR: ALDO A.DADONE

AÑO: 1973

INFORME PARCIAL N° 1
MINISTERIO DE DEFENSA
D.I.G.I.D.

CONTENIDO DEL INFORME FINAL N° 1

PROLOGO

INTRODUCCION

Concepto y definición de las funciones de producción

PRIMERA PARTE: ASPECTOS TEORICOS

I. Características de las funciones de producción

- a. Función tipo Cobb-Douglas
- b. Función de Solow, Minhas, Arrow y Chenery
- c. Otras funciones de producción:
 - i. de Leontief
 - ii. "normal" de Allen
 - iii. de Spillman
 - iv. de Mitscherlich-Spillman

II. Problemas de estimación

- a. Problemas generales
 - i. perspectiva matemática
 - ii. perspectiva conceptual
- b. Problemas específicos
 - i. Cobb-Douglas
 - ii. C E S
 - iii. otras

III. Determinación de las funciones a utilizar

P R O L O G O

En el presente trabajo se utilizan los datos del Censo Nacional Económico de 1963 para la República Argentina. Este Censo fue realizado bajo la planificación, dirección, compilación y publicación de la Dirección Nacional de Estadística y Censos dependiente de la Secretaría de Estado de Hacienda. La información que provee el Censo permite la comparación con los realizados en otros países del mundo ya que dentro de las posibilidades y el interés nacional, se han seguido los lineamientos sugeridos por las Naciones Unidas.

Con esa información se estiman funciones de producción para cada una de las agrupaciones (a nivel de dos dígitos) en que se ha clasificado al sector manufacturero. El énfasis principal del análisis recae sobre medición de la elasticidad de la producción con respecto de los insumos, lo que permite estudiar las economías a escala que puedan existir.

En general no se han realizado trabajos de estimación de funciones de producción poniendo el acento en las economías o deseconomías de escala en base a datos tan desagregados como los que se utilizan aquí. Una excepción a esto es el libro de Griliches y Ringstad [17] que por la calidad de los autores (Griliches es mundialmente famoso por sus numerosos estudios empíricos sobre funciones de producción) permite ser utilizado como guía y punto de comparación para este análisis.

Es digno de mencionar que el gran volumen de datos disponibles puede permitir la contrastación empírica de hipótesis detalladas sobre la estructura de la producción. Sin embargo, al mismo tiempo que la enorme cantidad de información representa una ventaja, condiciona fuertemente las posibilidades de recurrir a otras fuentes de testimonios fuera del Censo, ya que en general no resultan comparables. Por ello el estudio está encuadrado estrictamente dentro del margen de lo realizable con los datos provistos oficialmente. Las limitaciones en este sentido son tratadas más extensamente en la segunda parte del trabajo (puntos I y II).

El plan general del trabajo es el siguiente: En la Introducción se analiza brevemente el concepto y la definición de la función de producción, su uso en economía, sus alcances y limitaciones para la investigación empírica (tema tratado más profundamente en la Sección II de la Primera Parte) y las implicancias de la constancia de los parámetros. Como marco de referencia global se tiene siempre el objetivo perseguido por el trabajo que, como se dijo,

es el análisis de las economías de escala y las funciones de producción correspondientes.

La Primera Parte, que trata de los aspectos teóricos, está dividida en tres secciones: en la I se analizan las características matemáticas de las funciones de producción, desde una perspectiva económica. Se analizan con especial detalle a) los tipos de rendimientos a escala; b) la elasticidad de sustitución; c) las productividades marginales de los factores productivos; d) el avance tecnológico, y e) las posibilidades de linealizar las funciones para la estimación de los parámetros. Las funciones estudiadas con mayor cuidado son las más utilizadas y probadas en los estudios económicos: La Cobb-Douglas y la de Elasticidad de Sustitución Constante. Sin embargo, se mencionan otros tipos de funciones cuya reciente aparición no ha permitido aún una evaluación orgánica de sus cualidades.

En la Sección II se tratan los problemas de estimación, ya sea aquéllos generales, aplicables a todas las funciones actualmente utilizadas como algunos específicos de las funciones tratadas anteriormente.

Por último, en la Sección III se resumen los aspectos relevantes de las secciones anteriores. Teniendo en cuenta los datos disponibles por una parte y los objetivos del trabajo por otra, se ha seleccionado a la función de producción del tipo Cobb-Douglas (y alternativamente a la CES) para el estudio.

Tanto para la Introducción, como para toda la Primera Parte, se ha hecho una revisión bastante completa de la bibliografía disponible relevante.

Como nota adicional a este prólogo conviene expresar cuál es el alcance de esta primer parte. El examen de los temas está encuadrado dentro de límites que van desde el tratamiento a nivel intermedio hasta una complejidad algo más marcada. Se ha intentado producir un informe conciso, evitando las repeticiones, los pasos meramente algebraicos y las consideraciones que, aún teniendo interés académico, no hacen al objetivo del trabajo. Podría decirse que este informe ha sido escrito pensando en lectores con una mediana formación económica teórica, con algunos conocimientos sobre funciones de producción y econometría pero no dirigidos a los especialistas en esas ramas. Ellos quizás podrían encontrar que la profundidad con que se estudian algunos aspectos podría ser mayor. Por su parte, quienes no poseen por lo menos los conocimientos básicos antes enunciados hallarán algunas dificultades para la captación integral de los sujetos aquí analizados. Resulta obvio que situarse en este término medio es siempre difícil, pero no es menos cierto

que la mayoría de los interesados en este informe estarán aproximadamente en esas condiciones intermedias. Para subsanar en parte los deseos de unos y otros se ha tratado de remitir a los lectores la bibliografía que introduce, amplía o profundiza las distintas facetas investigadas.

El autor desea pronunciar el debido reconocimiento a la colaboración prestada por los Licenciados Elías Baracat y Alberto Karlen. Un lugar preferencial debe ocupar el Dr. Luis Eugenio Di Marco quién permitió la incorporación sustancial de secciones del trabajo [10] cuya autoría comparte con el responsable de este informe.

INTRODUCCION

Concepto y Definición de las Funciones de Producción⁽¹⁾

La función de producción (FP) es un concepto teórico en el cual se relacionan las cantidades de insumos necesarios para obtener el producto y el resultado final de ese proceso, es decir, el volumen de la producción de bienes o servicios. Los insumos pueden ser ingredientes que entran directamente en el producto final, o los servicios de los factores productivos usados en el proceso.⁽²⁾ Si bien originalmente se pensó en la medición de insumos y productos sólo en términos físicos, en muchas circunstancias puede resultar conveniente usar los valores monetarios.⁽³⁾ Si por ejemplo una empresa fabrica picaportes y bisagras de bronce, no es siempre correcto, sumar simplemente los Kg. de bronce, sin discriminación alguna. Podría, en todo caso, construirse un índice de la producción usando como elementos de ponderación los precios de cada uno de los artículos producidos. Pero no es difícil que suceda que otras empresas produzcan similares herrajes y los vendan a precios distintos o que los precios relativos varíen a través del tiempo, etc. En estos casos, encontrar el precio correcto para ponderar la producción es una tarea un tanto difícil y seguramente imposible de realizar, sin hacer supuestos más o menos arbitrarios. En consecuencia, se suele recurrir al valor de la producción como representativo de las cantidades físicas producidas. Algo semejante ocurre con los insumos: suelen ser tan heterogéneos que es necesario usar algún elemento unificador como pueden ser los salarios, el total pagado por las materias primas, etc.

En cuanto a la técnica en sí, los economistas parten de la hipótesis que las diversas formas de combinar los insumos, y los resultados a que se llega en cada caso, son conocidos. Es decir, parten del supuesto que los ingenieros conocen todos los métodos descubiertos hasta ese momento para producir un bien o un conjunto dado de ellos. En verdad, las técnicas de producción no pertenecen estrictamente al campo de la economía, pero presentan aspectos de este tipo en la medida en que permiten la elección económica. Así el conocimiento técnico de la producción es un prerrequisito básico para elaborar

(1) Para este punto puede consultarse Leftwich /22/ pág. 107 y sig.

(2) Véase Ferguson /15/ Capítulo 1.

(3) Véase Nerlove /26/ pág. 11.

los demás componentes de la asignación de recursos en todo sistema económico.⁽¹⁾ En la terminología económica habitual, se dice que existe una FP para cada estado del conocimiento. En consecuencia, a medida que se van descubriendo métodos más perfeccionados y convenientes para producir, la FP va cambiando. Así puede definirse la función de producción como una relación matemática entre las distintas combinaciones de insumos y el máximo producto obtenible por unidad de tiempo para cada una de esas combinaciones. Simbólicamente podría ponerse: $X = f(a, b, \dots, n)$ donde X es el producto por unidad de tiempo y a, b, c, ..., n son los insumos en ese mismo tiempo. Nótese que si bien el proceso productivo necesita cierto tiempo para ser llevado a cabo, en la definición tradicional esto se deja habitualmente de lado. Sin embargo, este desliz se corrige en cierta forma, como veremos más adelante, al introducirse explícitamente, dentro de las hipótesis necesarias para la estimación correcta de las FP, el supuesto de que transcurre cierto tiempo entre la incorporación de los insumos al proceso productivo y la concreción final del producto.

La misma definición de FP da la clave para interpretar el efecto de los mejoramientos en el nivel de conocimientos técnicos. Para cada uno de estos niveles la FP determina la máxima cantidad que se podría producir con cada combinación de insumos (por unidad de tiempo). En consecuencia, se están aprovechando totalmente los conocimientos técnicos existentes de tal manera que la FP determina el límite potencialmente alcanzable si se adoptan todas las medidas para utilizar plenamente los conocimientos técnicos disponibles. Sólo siendo absolutamente eficientes -de acuerdo a las normas de producción más avanzadas que existen en ese momento- se podrá llegar a producir, con determinadas cantidades de cada insumo, los valores de producción indicados por la FP. Sin embargo, la cantidad producida se puede aumentar o disminuir no sólo aumentando o disminuyendo el nivel de todos los insumos, sino que también se puede, en general, aumentar la cantidad producida hasta cierto máximo aumentando sólo uno o algunos de los insumos y manteniendo constante la cantidad de los demás.

Una de las hipótesis habituales⁽²⁾ es que los insumos son indefinidamente divisibles, y que el proceso de producción y las cantidades de insumos pueden variar en forma continua. Esto no excluye, por cierto, la posibilidad de que existan insumos cuya cantidad es fija.

(1) Véase Dano [11] pág. 2.

(2) Véase Allen [2] pág. 278, Claramount [6].

las
Cido
de
+ fue
no
milit

Debe destacarse que el concepto de Función de Producción ha sido desarrollado inicialmente dentro de la teoría económica de la firma para explicar su comportamiento como unidad de decisión.⁽¹⁾ Esta elaboración clásica ha sido luego extendida, por un proceso de simple agregación, suponiendo que -como podrían indicarlo las apariencias- es válida para el conjunto de firmas que actúan en una industria. Sin embargo, surgen ciertos problemas en este proceso de agregación que hacen más difícil su correcta interpretación. Sobre estos problemas se volverá más adelante, tratándolos en detalle.

En cuanto al lugar que ocupa dentro de la teoría de la firma, puede decirse que la FP representa la información técnica que posee el empresario a partir de los datos que le suministran los ingenieros. Esta información, unida al conocimiento de los precios de los insumos, es lo que permite formular la hipótesis de optimización de la forma de producción y estimar las cantidades de insumos y productos más convenientes para la firma, derivando las curvas de costos, las que -finalmente- permiten conocer la curva de oferta de la firma. A partir de esta curva de oferta y teniendo en cuenta las economías y deseconomías externas a la firma (sean pecuniarias o no), por un proceso de agregación, se llega a la oferta del conjunto de firmas que forman la industria. Es decir, que en teoría económica el uso inicial de la función de producción está referido a la firma. No obstante, se ha considerado conveniente crear un concepto equivalente a la FP de la firma, a nivel de la industria como un todo y aún para toda la economía en su conjunto. Quizás algunos de los aspectos que han dado origen a esta nueva concepción de la función de producción sean las relaciones que mantiene con la distribución del ingreso entre factores productivos, la tendencia a la concentración o atomización de las empresas, las posibilidades de sustitución entre diversos insumos, y también el hecho que los insumos en general aparecen agregados en las estadísticas disponibles más fácilmente. Todos estos aspectos teóricos y empíricos han demostrado su importancia, pero se hace imprescindible saber cuáles son los verdaderos valores que los parámetros relevantes adquieren en cada realidad económica determinada; sólo de esa forma se podrá actuar sobre esa realidad con pleno conocimiento y, en consecuencia, de la mejor manera.

Surge entonces el próximo paso de la ciencia económica que es llevar esta concepción teórica al campo de la estimación empírica, al campo de la econo-

(1) Cfr. Aigner y Chu [17].

netría. Allí podrán contestarse las preguntas sobre las características propias de las FP de cada caso particular. El conocimiento empírico de los valores que determinan las funciones de producción permitirá entonces intervenir -cuando fuese necesario- en los mercados de factores y/o productos, adecuando de esta forma, los resultados finales a los objetivos de la sociedad. Para ello, las estimaciones econométricas de las funciones de producción deben cumplir con dos requisitos básicos: 1º) que esas estimaciones sean confiables, en el sentido de ser representativas de la realidad, y 2º) que los valores estimados se mantengan estables por lo menos por algún tiempo.

La primera condición está íntimamente relacionada con los problemas de estimación que se tratarán en la Sección II. En esa parte del trabajo se explicarán las dificultades que surgen de las estimaciones de las funciones de producción y algunas de las técnicas más avanzadas que se han descubierto para solucionar esos problemas.

En lo que hace al 2º punto, ya se dijo que los descubrimientos técnicos van modificando las funciones de producción. Como resultado de ello, las estimaciones que se basan en un momento del tiempo se han vuelto inútiles. Los estudios de corte transversal difícilmente permiten el análisis del adelanto tecnológico, por lo menos en el sentido en que es posible en funciones estimadas con datos de series temporales. Pero hay dos elementos que permiten cierto optimismo en cuanto a la utilización de datos de tipo censal. El primero está referido a la lentitud con que se producen y luego se adoptan los adelantos técnicos, dando un cierto margen de años para utilizar una estimación realizada en un momento dado. El segundo elemento que trae cierta confianza, es que se pueden realizar sucesivas estimaciones de corte transversal para ir corrigiendo las deficiencias que el adelanto técnico introduce en las estimaciones, a medida que el observador se aleja en el tiempo del momento de la estimación.

PRIMERA PARTE: ASPECTOS TEORICOS

I. Características de las Funciones de Producción

Cada función de producción presenta ciertas características matemáticas de profundo significado económico. La selección de la forma de la FP a ser usada en estudios econométricos depende, en gran medida, de las propiedades que muestra. En general los aspectos que más interesan para estudios como el presente son los referidos a: los rendimientos a escala; las posibilidades de sustitución entre factores productivos; la productividad de cada uno de ellos; la forma en que la función a estimar capta (o puede captar) el avance tecnológico y por último, desde el punto estrictamente referido al programa de computación, la posibilidad de estimar una función lineal, sea ésta la FP original o una transformación de ella.

i. En cuanto a los rendimientos, éstos se miden por medio de la llamada "Elasticidad de Producción", que se define, para una función de producción $X = f(a, b)$, de la siguiente manera (respecto de a):

$$(1) \quad E_{X:a} = \frac{\frac{1}{X} \cdot dX}{\frac{1}{a} \cdot da} = \frac{a}{X} \cdot \frac{dX}{da} ;$$

(y en forma semejante para b).

El número puro que se obtiene permite medir las variaciones relativas en la producción ante cambios (en términos relativos) de un insumo. Esta elasticidad, sin embargo, está referida individualmente a cada insumo. Pero resulta más interesante conocer cuál es la variación porcentual que se produce al cambiar "la escala" de la producción, es decir al cambiar todos los insumos en igual proporción. Para ello se utiliza el concepto de elasticidad de la producción respecto de la escala. Esta se mide habitualmente en funciones homogéneas de producción.

Partiendo de la misma FP se define:

$$(2) \quad E_{X:h} = \frac{\frac{1}{X} \cdot dX}{\frac{1}{h} \cdot dh} ;$$

En consecuencia:

$$E_{X:h} = \frac{h}{X} \cdot \frac{dX}{dh} = E_{X:a} + E_{X:b} > 0$$

donde el parámetro h es un índice de la utilización de cada uno de los insumos. ⁽¹⁾

El valor crítico de la elasticidad de la producción respecto de la escala es la unidad. Si la $E_{X:h} > 1$, al incrementar (o disminuir, en su caso) las cantidades de insumos empleadas, aumenta (o disminuye, en su caso) la producción en mayor proporción que los insumos. Si la $E_{X:h} < 1$, al incrementar (o disminuir) las cantidades utilizadas de insumos, aumenta (o disminuye) la producción en menor proporción que los insumos.

Para funciones homogéneas de grado k se cumple que:

$$(3) \quad f(h.a, h.b) = h^k f(a, b).$$

Si $k > 1$ los rendimientos a escala son crecientes; si $k = 1$ son constantes y si $k < 1$ son decrecientes. ⁽²⁾

Habitualmente en la teoría económica moderna se trabaja con dos tipos extremos de funciones de producción: aquéllas que permiten una sustitución continua de factores entre sí (función continua clásica) y aquélla que trabaja con proporciones fijas entre los insumos (usada en programación lineal). Esta última admite a lo sumo la existencia de unos pocos procesos alternativos, que en el mejor de los casos pueden combinarse. ⁽³⁾

ii. Para el caso de funciones continuas con el que se trabajará aquí, la facilidad (o dificultad) con que un factor puede ser sustituido por otro, manteniéndose el mismo nivel de producción, puede ser convenientemente medida por la "elasticidad de sustitución". ⁽⁴⁾ Pero antes de presentar en forma más estricta este concepto es necesario aclarar el significado del término "tasa marginal de sustitución del factor b por el factor a ", que será utilizada en

(1) Desarrollando a partir de la FP se obtiene:

$$\frac{h}{X} \cdot \frac{dX}{dh} = \frac{h}{dh} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{da}{a} \cdot \frac{a}{X} + \frac{\partial X}{\partial b} \cdot \frac{db}{b} \cdot \frac{b}{X} \right); \text{ pero } \frac{dh}{h} = \frac{da}{a} = \frac{db}{b}$$

en consecuencia:

$$\frac{h}{X} \frac{dX}{dh} = \left(\frac{a}{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{b}{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial b} \right)$$

Para mayores detalles puede consultarse Ferguson [15] pág. 79 y sig.

(2) Véase Henderson y Quandt [18] pág. 72 y sig.

(3) Puede verse para la aplicación de la programación lineal a la teoría de la producción, entre otros a Dorfman, Samuelson y Solow [13].

(4) Para una breve reseña de la evolución del concepto, inicialmente usado por Hicks en 1932, véase Ferguson [15] pág. 90 y la bibliografía allí citada. También Allen [2] págs. 334-37.

la definición de ese término.

La tasa marginal de sustitución de b por a en la producción de X (que en adelante se denominará r) es el cambio que se necesita introducir en la cantidad empleada de b al variar la cantidad insumida de a, manteniéndose constante el nivel de la producción de X. Matemáticamente:

$$(4) \quad r = - \frac{db}{da}$$

Puede definirse ahora la elasticidad de sustitución entre a y b como el cambio porcentual que se produce en la proporción de los factores usada ($\frac{b}{a}$), ante un cambio en un cierto porcentaje (pequeño) en la tasa marginal de sustitución de b por a (es decir en r), manteniendo la producción de X constante. (1)

Matemáticamente la elasticidad de sustitución entre a y b es:

$$(5) \quad \sigma_{a,b} = \frac{\frac{a}{b} \cdot d(\frac{b}{a})}{\frac{1}{r} \cdot dr}, \text{ definida para una isocuanta.}$$

El número puro resultante tiene como puntos notables: a) el valor cero (no existe posibilidad alguna de sustituir un factor por otro (es el caso de proporciones fijas entre factores tratado generalmente en programación lineal); y b) el valor infinito (que se obtiene cuando la sustitución entre a y b es perfecta. En este último caso no es conveniente hacer diferencias (en términos económicos y en el aspecto meramente técnico) entre a y b ya que cualquiera de ambos factores cumple idéntica función en el proceso productivo.

iii. Por otra parte el "producto marginal" de cada factor es otro concepto muy frecuentemente utilizado en economía. Relaciona -al igual que la elasticidad de la producción- el cambio en la cantidad de un insumo con el cambio en la cantidad producida por unidad de tiempo. La diferencia con el concepto anteriormente explicado estriba en que aquí se trata del cambio absoluto en la producción total relacionado con un cambio infinitesimal (o en una pequeña unidad) en el insumo. Matemáticamente:

$$(6) \quad PMa_{X, a} = \frac{\partial X}{\partial a}$$

Como puede apreciarse, este concepto está medido en términos físicos: relaciona unidades de producto con unidades de factor, todo ello referido a la

(1) Una interpretación geométrica clarificadora puede verse en Ferguson [157] págs. 89-90.

unidad de tiempo.

Si se tratase del "valor del producto marginal" (que es uno de los elementos más importantes en la explicación del equilibrio de la firma), estaría expresado en unidades monetarias por unidad del factor/tiempo (por ejemplo pesos por hora hombre por semana). Para que una firma esté operando dentro de márgenes mínimos de eficiencia, es imprescindible que el producto marginal físico de todos sus factores productivos sea positivo. En consecuencia, en las estimaciones econométricas ésta es una limitación impuesta a los valores paramétricos correspondientes. Así, si se encuentra que la función estimada da como resultado valores negativos para los productos marginales de algún insumo, deberá buscarse cuál es la falla que origina el error, pues este no será un resultado lógico ni admisible como correcto.

iv. Hasta ahora se han revisado algunos aspectos de las FP que expresan la relación entre las cantidades de insumos y el nivel de la producción, suponiendo un nivel de tecnología dado. Pero esta tecnología continuamente se está perfeccionando debido a la aparición y adopción de adelantos científicos, es decir debido al progreso técnico. Este término puede ser utilizado para referirse a dos conceptos distintos: 1º) al descubrimiento o innovación en el conocimiento técnico en sí; 2º) a la aplicación de esos adelantos técnicos en el proceso productivo, es decir a la adopción de esa innovación y sus consecuencias sobre la producción. El primer concepto, es el que debe recibir la mayor atención en los estudios macroeconómico donde se analizan el papel del progreso técnico sobre el incremento del producto y el bienestar de las personas, sus causas y condicionantes. El segundo es el que tiene particular relevancia en los estudios econométricos de funciones de producción. La presencia del progreso técnico es un elemento que complica las estimaciones de funciones de producción no sólo porque va introduciendo modificaciones en el valor de los parámetros de la verdadera FP que se trata de estimar, si no también por las dificultades que crea en la medición de los insumos (especialmente del capital).

La modificación de los parámetros de las FP se debe a que el cambio tecnológico produce incrementos en los productos marginales de los factores. Estos incrementos pueden afectar en forma diferenciada a cada factor, por ello resulta conveniente clasificar el progreso técnico. Puede diferenciarse el progreso técnico en: a) neutral y b) sesgado hacia algunos de los factores de la producción. Las clasificaciones más comunes de progreso técnico son

las debidas a Hicks y a Harrod. Siguiendo a Hicks puede decirse que si sólo existen trabajo y capital como factores productivos, para un valor dado de la relación trabajo/capital, el cambio será sesgado hacia el capital, neutral o sesgado hacia el trabajo según la tasa marginal de sustitución del capital por el trabajo decrezca, permanezca constante o aumente.

Los conceptos de neutralidad y sesgo en Harrod están más relacionados aún con aspectos macroeconómicos y de crecimiento a largo plazo por lo cual son de menor interés para este trabajo.

El progreso técnico ha recibido gran atención por parte de los economistas en los últimos años, encontrándose una amplia bibliografía sobre el tema.⁽¹⁾ La principal preocupación de estos estudios es profundizar las relaciones entre el progreso técnico por una parte y el crecimiento económico o la distribución del ingreso por otra. Debe destacarse que en general los autores han encuadrado sus trabajos en funciones de producción completamente agregadas que hacen a los aspectos macroeconómicos del sujeto y no al enfoque econométrico-microeconómico que aquí se utiliza. Hay dos razones que minimizan la relevancia del crecimiento técnico y dos razones que apuntalan su inclusión dentro de este estudio; las causas para excluir toda referencia a esta materia están dadas por:

a) el hecho de que el estudio trata con funciones de producción desagregadas (estimadas a nivel de agrupaciones) dentro del sector manufacturero. Por extensión de lo que sucede para la firma, donde la adopción de nueva tecnología se produce de manera discontinua y errática, es prácticamente imposible captar (por medio de una variable exponencial a través del tiempo) el cambio tecnológico para la industria. Distinto es lo que ocurre en una función de producción macroeconómica donde las distintas industrias y sectores van produciendo un efecto agregado más suave.

b) Para ~~medir~~ el adelanto tecnológico es necesario contar con series de datos temporales. Evidentemente no es el caso analizado aquí en que los datos provienen de un censo que ha tratado de captar lo que ocurre en el sector manufacturero en un instante dado (el año 1963).

(1) Para un breve análisis introductorio puede consultarse Klein [21] págs. 87-88. Un tratamiento más amplio se encuentra en Ferguson [15] quien dedica practicamente toda la segunda parte de su libro al tema. Para una visión panorámica y más actualizada puede consultarse Kennedy y Thirlwall [20] cuyo más valioso aporte es la cita bibliográfica, ya que el texto es poco claro y demasiado circunspecto en muchos pasajes.

A los anteriores motivos para excluir toda referencia al progreso técnico se contraponen dos aspectos dignos de ser mencionados. En primer lugar la especificación de la o las funciones a estimarse tienen fuerte gravitación sobre la forma en que el adelanto técnico aparece en la función. Según la forma elegida el progreso técnico será neutral (según Hicks y/o Harrod) o será sesgado en favor de alguno de los factores productivos. Pero de todas maneras este hecho no tendría mayor importancia en vista de lo expresado en b) recién (no se cuenta con los datos temporales necesarios para estimar el progreso técnico) si no fuera porque existe un móvil adicional para analizar, siquiera brevemente, el tema.

La segunda razón es que si se realizan estimaciones en base a los futuros censos, es posible obtener valiosa información de la comparación de los parámetros pertinentes. Así, los sucesivos estudios de corte transversal irán proporcionando la información requerida para un análisis exhaustivo del adelanto técnico.

v. Hay un último aspecto que tiene importancia en la selección de las funciones de producción a utilizar. Se trata de la posibilidad de que las funciones a estimar sean lineales.

El origen de esta preocupación radica en que los métodos econométricos están sumamente evolucionados para estimar funciones lineales, pero no existen un cuerpo de análisis equivalente respecto de las dificultades y soluciones para estimaciones no lineales. En consecuencia resulta muy deseable que la función de producción que se elija sea lineal o, alternativamente, sea susceptible de ser transformada en una función lineal sea por una mutación matemática estricta o por una aproximación a la forma original. En algunos casos simplemente tomando logaritmos en la función original se obtiene la forma lineal. En otros es necesario usar una aproximación por ejemplo, basada en tomar los primeros términos de un desarrollo en serie, etc.

Con los elementos desarrollados puede iniciarse el estudio particularizado de las propiedades más sobresalientes de las posibles funciones a utilizar.

a) Función Tipo Cobb-Douglas

Una de las funciones de producción más usadas en los estudios econométricos es la famosa función de producción de Cobb-Douglas. Esta función fué aplicada por primera vez por Charles W.Cobb y Paul H.Douglas, para predecir la producción de la Industria Manufacturera de los Estados Unidos, habiéndose estimado sus parámetros a partir de una serie de datos históricos que cubría el período 1899-1922.⁽¹⁾ Sus proponentes la han presentado como una ley de producción aproximadamente válida para todos los países y han hecho estudios econométricos sobre numerosas industrias a través del mundo.

La función de Cobb-Douglas, establece que la producción, es función únicamente de dos factores: el trabajo y el capital. La proposición original es:

$$(7) \quad X = A L^{\alpha} K^{1-\alpha} ; X > 0; L > 0; K > 0; 0 < \alpha < 1$$

Donde:

P = Índice de la Producción

L = Índice del insumo del factor trabajo

K = Índice del insumo del factor capital.

A y α son parámetros de la función.

Como se ve, no se hallan incorporados otros insumos como materias primas u otros factores productivos como tierra o empresario. En consecuencia el índice de la producción habitualmente utilizado es el valor agregado y el trabajo incluye la tarea del empresario mientras que el capital absorbe la productividad de la tierra. De todas formas cuando se trata de producción industrial este último factor no tiene un papel muy importante como en el caso de la producción agrícola.

La primera (y una de las pocas) modificaciones que sufrió la FP presentada por Cobb y Douglas fué introducida por David Durand quién sugirió una forma más general para la función sin limitar el estudio al caso en que la suma de los exponentes sea igual a la unidad. Es decir:

$$(8) \quad X = A L^{\alpha} K^{\beta} \quad \text{con} \quad \alpha > 0; \beta > 0$$

(1) Véase Cobb-Douglas [8] y también el comentario de P.H.Douglas en M.Brown [4] pág. 15 donde se reseña la interesante historia de esta (hoy famosa) función de producción. Se cita allí como el verdadero creador de esta función a Ph.H. Wicksteed quién fué el primero en mencionarla en su libro: "Coordination of the Laws of Production and Distribution" de fines del siglo pasado.

Esta forma exponencial de FP (la Cobb-Douglas) no tiene mayor validez que otras formas posibles para la estimación econométrica. En verdad se trata de una función muy particular del amplio espectro que podría usarse. El calificativo de muy particular (o quizás debería decirse que contiene hipótesis muy fuertes y restrictivas) lo merece plenamente. Así si: a) de todas las formas posibles para las funciones de producción se separa el conjunto de las funciones homotéticas,⁽¹⁾ b) de ese conjunto se toma el subconjunto de las homogéneas, c) dentro de éste el subconjunto de las homogéneas de grado uno, d) dentro de éste el subconjunto de las de elasticidad de sustitución constante y e) dentro de él, el de elasticidad de sustitución constante igual a uno, recién se llega a la función de producción original de Cobb y Douglas. Sin embargo, la función tiene realmente atractivos especiales por las características que se exponen.

Haciendo uso de las definiciones y conceptos enunciados precedentemente pueden deducirse cada una de las propiedades más sobresalientes de la FP de tipo Cobb-Douglas, comenzando por los rendimientos a escala. Para ello veamos en primer lugar la elasticidad de la producción respecto de cada factor:⁽²⁾

$$(9) \quad E_{X:L} = \frac{L}{X} \cdot \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha A L^{\alpha-1} K^{\beta} \cdot \frac{L}{X} = \alpha$$

Se observa, que la elasticidad de producción del trabajo es el exponente α . De manera similar puede obtenerse la elasticidad correspondiente al capital (que es β). Es de interés mencionar que estas elasticidades son independientes del nivel de producción y de las cantidades de factores usados: son constantes.

Ahora es posible verificar qué tipo de rendimientos a escala, supone el trabajar con una función Cobb-Douglas. Aplicando los resultados deducidos en la ecuación (2) se tiene:

$$(10) \quad E_{X,h} = E_{X,L} + E_{X,K} = \alpha + \beta$$

Aquí puede observarse que en la versión original, los rendimientos a escala son constantes (ya que $\alpha + \beta = 1$). En la forma más general la suma de los exponentes puede ser mayor que uno (en cuyo caso existen rendimientos crecientes a escala) o menor que la unidad. En esta última situación los rendimientos son decrecientes respecto de la escala.

(1) Véase Ferguson [15] pág. 124 y la bibliografía allí citada.

(2) Para lo que sigue se usa la formulación más general propuesta por Durand.

Una de las características cruciales⁽¹⁾ de la función Cobb-Douglas es la de tener elasticidad de sustitución entre factores igual a la unidad (es decir $\sigma = 1$). Esto puede deducirse directamente de la definición de σ o (siguiendo a Allen⁽²⁾) de la expresión de la elasticidad de sustitución en función de sus derivadas primeras y segundas.

En el caso de la función original (donde $\alpha + \beta = 1$) el resultado se obtiene fácilmente de

$$(11) \quad \sigma_{L,K} = \frac{\frac{\partial X}{\partial L} \cdot \frac{\partial X}{\partial K}}{X \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial L \partial K}} = \frac{\alpha \cdot \frac{X}{L} \cdot (1 - \alpha) \frac{X}{K}}{X \cdot \alpha (1 - \alpha) A L^{\alpha - 1} K^{\alpha}} = 1$$

Como se aprecia, la elasticidad de sustitución es independiente de todo otro valor e igual a uno. Es decir que se encuentra simplemente comprendida entre los dos extremos notables mencionados antes (cero e infinito).

En lo que hace al producto marginal físico de los factores, aplicando (6) se tiene:

$$(12) \quad \text{PMa}_L = \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha A L^{\alpha - 1} K^{\beta} ;$$

y también

$$\text{PMa}_K = \frac{\partial X}{\partial K} = \beta A L^{\alpha} K^{\beta - 1}$$

Para el caso de la función original propuesta por Cobb y Douglas se tiene:

$$(13) \quad \text{PMa}_L = \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha A \left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha - 1} ;$$

y también

$$\text{PMa}_K = \frac{\partial X}{\partial K} = (\alpha - 1) A \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

En este caso los productos marginales no están condicionados por el nivel

(1) El calificativo de "crucial" (con alguna implicación peyorativa) viene dado quizás por el estado actual del conocimiento y uso de las funciones de producción. Hasta este momento la principal adversaria de la FP Cobb-Douglas es la de E.S.C. Como ambas son funciones homogéneas, no se advierten mayores críticas al respecto. Quizás cuando se materialicen en trabajos empíricos las funciones homotéticas (véase Clemhout [77]) se comenzará a criticar el hecho "crucial" de que tanto la C-D como la E.S.C. son homogéneas.

(2) Para la obtención de $\sigma = 1$ véase Allen [27] págs. 335-337. También Claramunt [67] páginas 15-17 y 71-72.

de producción sino que sólo dependen de la proporción de factores usada.⁽¹⁾

Respecto a la posibilidad de recoger el adelanto tecnológico, ya se dijo que es necesario obtener series de datos temporales. En ese caso la función a ser estimada toma la forma $X = A e^{\lambda t} L^{\alpha} K^{1-\alpha}$ donde λ es una constante que indica la tasa de progreso técnico para la unidad de tiempo en que se expresa t . Debe notarse que para la función Cobb-Douglas en su forma original se cumple que el progreso técnico desincorporado que se capta en la formulación anterior es a la vez neutral según las definiciones de Hicks y Harrod.

Por último, la función Cobb-Douglas presenta una característica sumamente deseable y es la de poder ser transformada fácilmente en una función lineal. Todos los trabajos de estimación sobre esta función recurren a los logaritmos de las variables⁽²⁾ de modo que la función utilizada es

$$\log X = \log A + \alpha \log L + \beta \log K$$

que permite aplicar las técnicas más sencillas de estimación de relaciones lineales.

(1) Para mayores detalles véase Ferguson [15] pág. 99, 222.

(2) Véase por ejemplo Dadone [9].

b) Función de Producción de Solow, Minhas, Arrow y Chenery

Hasta 1960 la mayor parte de las investigaciones empíricas vinculadas a la teoría de la producción trabajaron con funciones de producción con elasticidades de sustitución constantes que según el caso (proporciones fijas o Cobb-Douglas) era igual a cero o a la unidad cualquiera fuese el valor estimado para sus parámetros.

Es así como en los modelos de insumo producto y en los de crecimiento tipo Harrod Domar, las funciones de producción, al suponer relaciones constantes de uso entre los factores, no permitían la sustitución ante cambios en los precios relativos y por lo tanto el coeficiente de elasticidad de sustitución asumía el valor cero y las isocuantas tenían forma de ángulo recto con sus vértices coincidiendo a lo largo de una "senda de expansión" rectilínea a partir del origen de coordenadas cartesianas.

Como se vió también la función de producción Cobb-Douglas, tanto en su versión original como en la versión más general introducida con posterioridad a 1937, presenta elasticidad de sustitución constante e igual a uno. La tendencia en economía ha sido siempre la de ir relajando las hipótesis más restrictivas y urticantes. Y en el campo de la teoría de la producción también se siguió esa tendencia. El primer cambio fue la liberación de los rendimientos a escala propuesto por Durand en su artículo en el Journal of Political Economy de 1937 [14]. Pero aún quedaba en la FP tipo Cobb-Douglas (y también en los modelos de insumo producto) valores impuestos a priori sobre la elasticidad de sustitución. Esto dejaba insatisfechos a numerosos economistas y econometristas que recién vieron una solución para este aspecto en el trabajo presentado en 1961 por Arrow, Chenery, Minhas y Solow [3]. Los autores de esta muy usada función (abreviado su nombre en SMAC o CES) propusieron una formulación más general para la FP que tuvo favorable acogida entre los economistas, especialmente por parte de quienes se dedicaban a la investigación empírica. Presentaba varias innovaciones que se analizan enseguida, pero la más destacada, sin duda, es la estimación sin restricciones del valor de la elasticidad de sustitución.

La formulación matemática original es la siguiente:

$$(14) \quad X = \gamma \left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

para: $\gamma > 0$; $X, L \text{ y } K \geq 0$; $\rho > -1$; $0 < \rho < 1$

Esta función presenta ciertas características deseables que surgen de la

teoría de la producción.

La función CES en su versión original, es lineal y homogénea y por lo tan to tiene rendimientos constantes a escala. Para demostrarlo basta calcular el nuevo valor que asume X (X') al incrementar los insumos en la proporción :

$$\begin{aligned}
 (15) \quad X' &= \gamma \left[\delta (\lambda K)^{-\rho} + (1 - \delta) (\lambda L)^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}} = \\
 &= \gamma \{ \lambda^{-\rho} \left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho} \right] \}^{-\frac{1}{\rho}} = \\
 &= \gamma \lambda \left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}} = \lambda X
 \end{aligned}$$

Es decir que al incrementar todos los insumos en la proporción λ también se incrementa X en esa proporción. En consecuencia esta FP tiene implícita u na función horizontal de costos de largo plazo.

En 1962 Brown y de Cani [57], propusieron una función CES modificada a fin de posibilitar la consideración de rendimientos crecientes o decrecientes, lo que se logra con la siguiente especificación:

$$(16) \quad X = \gamma \left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho} \right]^{-\frac{v}{\rho}}$$

Para demostrar las correspondientes propiedades de esta formulación, se pue de aplicar el mismo procedimiento anterior y se llega a la expresión, $X' = \lambda^v X$; si $v = 1$ se está en presencia del caso anterior, mientras que si v es mayor que la unidad, ello pone en evidencia rendimientos crecientes, mientras que consecuentemente, un valor de v menor que uno implica rendimientos decrecientes.

Tal como se señaló anteriormente, la función CES vino a dar respuesta a las críticas que hacían los economistas a las funciones en boga hasta 1960, en el sentido de que imponían condiciones excesivamente restrictivas a la sustituibi lidad entre factores. La CES se caracteriza por la posibilidad de estimar el valor de la elasticidad de sustitución, sin imponer otra condición que la constancia del parámetro. En esa estimación se puede hallar cualquier valor entre cero e infinito. No obstante, y dada la mayor complejidad aritmética y estadística que implica el uso de la función CES, especialmente si se trabaja con más de dos factores, sólo se justifica su aplicación en reemplazo de otras funciones, cuando existen evidencias empíricas concretas en el sentido

que las restricciones al coeficiente de elasticidad de sustitución que imponen las funciones tipo Cobb-Douglas son demasiado fuertes para el proceso bajo estudio.

Se puede establecer el valor de la elasticidad de sustitución en su expresión general para la función CES a partir de la conocida fórmula de cálculo, aplicable a las funciones lineales y homogéneas, que se enunció en (5):

$$(17) \quad \sigma_{K, L} = \frac{\frac{\partial X}{\partial K} \cdot \frac{\partial X}{\partial L}}{X \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial K \partial L}} = \frac{\frac{\partial X}{\partial K} \cdot \frac{\partial X}{\partial L}}{X \cdot \frac{(\rho + 1)}{X} \frac{\partial X}{\partial K} \cdot \frac{\partial X}{\partial L}} = \frac{1}{\rho + 1}$$

De aquí surge que el valor de la elasticidad dependerá del que se estime para el parámetro ρ en cada caso concreto; por eso, ρ es conocido como el parámetro de sustitución de la función CES.

Si se tiene en cuenta que el campo de variabilidad de ρ está dado por la relación $\rho > -1$, la elasticidad de sustitución tiende a infinito cuando el parámetro tiende a menos uno, y viceversa.

La curvatura de las isocuantas variarán con el valor del parámetro de sustitución siendo los casos extremos: a) isocuantas en forma de ángulo recto (cuando ρ es infinito) y b) isocuantas rectas cuando ρ es igual a menos uno.

Esta característica de la función CES le da un carácter de generalidad, en el sentido de que la función CES genera una familia de funciones de producción según sea el valor de ρ ; en particular es importante señalar los casos en que ρ asume los valores cero e infinito respectivamente.

Cuando $\rho = 0$, $\sigma = 1$ o sea el valor de la elasticidad de sustitución de la función Cobb-Douglas y es posible demostrar formalmente que la especificación $X = A K^\alpha L^\beta$ de la Cobb-Douglas es este caso particular de la función CES.

Cuando $\rho = \infty$ ocurre que $\sigma = 0$ significando esto que se trata de un proceso técnico que no admite sustitución entre factores; la CES da lugar en este caso a una función de producción de Leontief de uso generalizado en los modelos de insumo-producto. Puede decirse, entonces, que la función CES no es una función única y distinta de la Cobb-Douglas o la de Leontief, sino que, según sea el valor del parámetro ρ , ella genera una amplia familia de funciones de producción, algunas de ellas con características conocidas y de aplicación amplia en la investigación empírica.

En lo que hace a los productos marginales de los factores productivos, para obtenerlos se debe derivar la función CES respecto de cada uno de ellos. La compleja expresión que se obtiene al derivar X respecto de (por ejemplo) K , se puede simplificar reemplazando por X la forma explícita de la función y además haciendo algunas substituciones convenientes.⁽¹⁾ Se llega entonces a que

$$(18) \quad PMA_K = \frac{\partial X}{\partial K} = \frac{1 - \delta}{\gamma} \cdot X^{(\rho + 1)} K^{-(\rho + 1)}$$

Esta expresión toma valores dentro del campo de los números positivos, teniendo en cuenta los valores que pueden asumir las variables y parámetros de la CES.

Adicionalmente para comprobar si la PMAF de cada factor es negativa, es necesario obtener $\frac{\partial^2 X}{\partial K^2}$ y $\frac{\partial^2 X}{\partial L^2}$. A partir de (18) se tiene:

$$(19) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = \frac{\delta}{\gamma^\rho} \cdot X^{(\rho + 1)} (-\rho - 1) K^{-(\rho + 2)} = - \left[\frac{\partial X^{\rho+1}}{\gamma^\rho K^{\rho+2}} \right]$$

La expresión que está dentro del último corchete es positiva puesto que $\rho > -1$ y por lo tanto $\frac{\partial^2 X}{\partial K^2}$ es negativa y $\frac{\partial X}{\partial K}$ es decreciente. Lo mismo se puede demostrar para el factor L .

Otra de las características relevantes de la CES es lo apropiada que resulta para la estimación de algunas formas de progreso técnico desincorporado. Tal como lo muestra Ferguson [15] (pág. 223), la función es sumamente adecuada para estimar el progreso técnico neutral según la definición de Harrod. La formulación requerida es $X = \gamma [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)(e^{\alpha t} L)^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$. También podría emplearse la forma:

$$X = \gamma e^{\lambda t} [\delta K_t^{-\rho} + (1 - \delta) L_t^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

Al respecto puede consultarse Vicarelli [27] especialmente pág. 1012 y sig.

Por último, a diferencia de la Cobb-Douglas, la función CES además de no ser lineal en su forma original, tampoco permite que, por medio de su logaritmicación, sea transformada directamente en una función lineal en sus parámetros.⁽²⁾

(1) Para un desarrollo detallado del procedimiento puede verse Givogri [16] pág. 18.

(2) Véase Griliches y Ringstad [17] pág. 8 y sig. a quienes... (sigue pág. sig)

En el trabajo original de Arrow et al. la especificación está restringida a retornos constantes a escala. Bajo tal hipótesis es factible estimar la elasticidad de sustitución a partir de la condición de equilibrio que requiere la igualdad entre el valor del producto marginal del trabajo y los salarios, haciendo la regresión de la producción por trabajador sobre la tasa de salarios (ambas en logaritmos). Sin embargo, cuando los rendimientos no son constantes este método no es ya posible. En consecuencia presenta algunas dificultades para su estimación, que pueden ser superadas merced al tratamiento matemático siguiente: a partir de la forma general $X = \gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho} \}^{-\frac{v}{\rho}}$, se puede dividir ambos miembros por L y tomando logaritmos se obtiene

$$(20a) \quad \ln (X/L) = \ln \gamma + (v - 1) \ln L - (v - \rho) \ln \{ \delta + (1 - \delta) (K/L)^{-\rho} \}$$

Expandiendo el logaritmo del último término alrededor del valor $\rho = 0$ y excluyendo los términos de tercer orden y superiores se obtiene la siguiente aproximación:

$$(20b) \quad \ln (X/L) \simeq \ln \gamma + (v - 1) \ln L + v (1 - \delta) \ln (K/L) - \frac{1}{2} \rho v \delta (1 - \delta) \{ \ln (K/L) \}^2$$

Esta aproximación será más exacta cuando más cerca se encuentre el valor de la elasticidad de sustitución a la unidad. Si $\rho = 0$ como se dijo antes $\sigma = 1$, y en este caso la aproximación se reduce a la función Cobb-Douglas. Nótese que a medida que σ se aleja del valor unitario, la aproximación se hace menos exacta y se reduce la utilidad de esta formulación para estimar σ .

c) Otras Funciones de Producción

Anteriormente se han tratado con algún detalle dos funciones de producción de uso generalizado en los estudios empíricos sobre la teoría de la producción. No obstante, es importante hacer notar que se trata solamente de dos de las variadas especificaciones matemáticas que podrían plantearse para vincular cantidades de insumos con cantidades de producto.

De la amplia gama de posibles modelos de producción muchos son descartables por carecer de relevancia económica,⁽¹⁾ o simplemente por no estar suficientemente investigados en cuanto a sus propiedades desde el punto de vista de la teoría de la producción; también existen funciones que aún reuniendo propiedades adecuadas en este aspecto, no han sido suficientemente probadas en trabajos empíricos o no se adaptan a los métodos estadísticos y econométricos actualmente en uso. Otras funciones que tienen propiedades muy relevantes, son descartadas debido a que incorporan hipótesis económicas de difícil manejo al nivel de desarrollo actual de la teoría.

En esta sección se ha considerado oportuno citar algunas formulaciones propuestas por ciertos autores y que a veces se utilizan para la solución de problemas muy específicos.

i. Función de producción de Leontief, mencionada anteriormente como caso particular de la función CES cuando $\sigma = 0$; exhibe rendimientos constantes a escala y se utiliza en los modelos de insumo producto; su especificación matemática es:

$$X = \min \left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b} \right) \text{ para } a > 0 \text{ y } b > 0$$

siendo a/b proporción fija en que deben usarse los factores por unidad de producción de X .⁽²⁾

ii. Función de producción de tipo "normal" según Allen⁽³⁾

$$X = 2 H K L - A L^2 - B K^2$$

donde A , B y H son parámetros positivos tales que $H^2 > AB$.

Se trata de una función homogénea de segundo grado, es decir que exhibe rendimientos crecientes a escala. Los productos marginales de los factores son funciones lineales decrecientes.

(1) Por ejemplo una función que relacione cantidades crecientes de insumo con cantidades decrecientes de producto es viable matemáticamente pero resulta completamente irrelevante para el análisis económico, pues no satisface el requisito de la eficiencia técnica.

(2) Para más detalles ver Givogri [16] pág. 25.

(3) Ver Allen [2] pág. 282.

iii. Función de Spillman⁽¹⁾

$$X = M - A R^a$$

donde a mide el insumo del único factor variable, M es el máximo producto que puede obtenerse del factor variable, A es el producto que se obtiene del factor fijo y R define la proporción del producto marginal de a con respecto al de a - 1, representando, en consecuencia la tasa de decrecimiento en el producto marginal de a. Esta función no es apta para el presente estudio de los rendimientos a escala pues sólo trabaja con un factor variable, mientras que aquí se poseen datos de por lo menos dos factores productivos.

iv. Función de Mitscherlich - Spillman⁽²⁾

$$X = A(1 - R_a^a)(1 - R_b^b)$$

se trata de una formulación con similitudes a la anterior pero donde X depende de los factores a y b, aunque en este caso A viene a asumir la función de M, pues es el máximo valor que puede alcanzar X. En este caso la función parte del origen (X = 0 cuando a y b valen cero).

(1) (2) Véase Claramunt [6] pág. 27 y sig.

II. Problemas de Estimación⁽¹⁾

a. Problemas Generales

Teniendo en cuenta el propósito del trabajo -la estimación de funciones de producción a partir de datos de corte transversal- es pertinente hacer algunas consideraciones generales sobre los problemas que plantea el cálculo de los parámetros involucrados. Los métodos econométricos señalan que las estimaciones hechas con mínimos cuadrados directos (MCD) son sesgadas cuando la función a estimar es parte de un sistema de ecuaciones. Si el sistema es tal que algunas de las variables "independientes" (y también la dependiente) son funciones del error estocástico en la ecuación de que se trata, ello contradice los supuestos básicos del método de los MCD. Se produce, en consecuencia, un sesgo que puede denominarse "sesgo proveniente de la simultaneidad de ecuaciones".

Desde que Cobb y Douglas presentaron la primera estimación econométrica en 1927 hasta el trabajo de Marschak y Andrews [24] en 1944, no se prestó mayor atención a este problema. Pero a partir de la época en que los últimos autores publican su artículo, se sostuvo, en forma más o menos generalizada, que existía un sesgo del tipo antes mencionado en las estimaciones de las FP.

El análisis de la simultaneidad puede hacerse: (i) desde una perspectiva algebraica, tratando de ver la dependencia funcional entre los errores en las ecuaciones de la forma reducida y los parámetros (y errores) de la forma estructural del modelo; o (ii) desde una perspectiva conceptual, tratando de ver cuál es la fuente del error en la función de producción, porqué ésta no se ajusta perfectamente, cómo puede identificarse la función de producción y cuáles son las diferencias de K y L entre establecimientos.

i. El primer enfoque es el que sigue Malinvaud⁽²⁾, Walters y otros, y fue planteado originalmente en el artículo de Marschak y Andrews. El segundo es el que sugieren Griliches y Ringstad⁽³⁾, aunque estos dos últimos autores no tuvieron conocimiento de los trabajos de Zellner, Kmenta y Dreze [29] que se utilizan aquí y que solucionan satisfactoriamente las dificultades teóricas del libro de Griliches y Ringstad.

(1) Para esta sección se ha utilizado intensivamente el trabajo de Dadone y Di Marco [107]

(2) Malinvaud [237] págs. 582-84.

(3) Griliches y Ringstad [177] págs. 13-16.

Una formalización del problema dentro de los cánones clásicos -el método del cálculo- requiere contar con la función de producción propiamente ^{dicha,} la definición de beneficio y las condiciones de optimización. En el caso de dos insumos y de una función del tipo Cobb-Douglas, el modelo tradicional de producción puede escribirse así:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & X = A L^{\alpha_1} K^{\alpha_2} && \text{función de producción} \\
 (22) \quad & \pi = pX - wL - rK && \text{definición de beneficio} \\
 (23) \quad & \frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 && \\
 & && \} \text{ condiciones de maximización} \\
 (24) \quad & \frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 &&
 \end{aligned}$$

donde π representa los beneficios; X , L , y K , al igual que antes, representan las cantidades de producción y los insumos de trabajo y capital, respectivamente; p , w y r son sus correspondientes precios.

En los trabajos empíricos relativos a la estimación de parámetros de la función de producción a través de datos de corte transversal la relación (21) -de terminística- ha sido transformada en otra estocástica que, siguiendo a Marschak y Andrews, puede expresarse:

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & x_{oi} = \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} = \lambda_0 + v_{oi} \\
 (26) \quad & x_{oi} - x_{1i} = \lambda_1 + v_{1i} \\
 (27) \quad & x_{oi} - x_{2i} = \lambda_2 + v_{2i}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 & E(v_{ji}) = 0 ; \\
 & E(v_{ji}^2) = \sigma^2 \\
 & j = 0, 1, 2
 \end{aligned}$$

donde:

$i = 1, 2, \dots$ firmas

$$\begin{aligned}
 (28) \quad & x_{oi} = \log X_i ; \quad x_{1i} = \log L_i ; \quad x_{2i} = \log K_i ; \quad \lambda_0 = \log A \\
 & \lambda_1 = \log \frac{wR_1}{p\alpha_1} ; \quad \lambda_2 = \log \frac{rR_2}{p\alpha_2} ; \quad R_1, R_2, \dots \text{ parámetros}
 \end{aligned}$$

Los errores en (26) y (27) $-v_{1i}$ y v_{2i} - se introducen para expresar el proceso aleatorio que enfrentan los empresarios al intentar ajustar los insumos que satisfacen las condiciones necesarias para el óptimo. Sin embargo, el error en la función (25) no tiene una interpretación obvia en la literatura. Los citados Marschak y Andrews ⁽¹⁾ describen a v_{oi} como reflejando "eficiencia técni

(1) Op. cit. págs. 145 y 156.

ca" y dependiendo de las características del empresario.

Las consecuencias estadísticas son, entonces, directas. Los insumos no son independientes del error en la función de producción (cada insumo es función de todos los errores del sistema). Por lo tanto, los MCD clásicos para estimar los parámetros de la función de producción serían, en principio, sesgados e inconsistentes. Tal era la opinión generalizada hasta que en 1966 aparece el artículo de Zellner, Kmenta y Dreze donde se reivindica la estimación por MCD de las funciones de producción.

La nueva especificación propuesta por estos autores implica una función de producción estocástica. Siguiendo a Zellner et.al., para la firma i -ésima se cumple que:

$$(29) \quad X_i = A L_i^{\alpha_1} K_i^{\alpha_2} e^{u_{oi}} \quad \text{Función de producción estocástica}$$

donde el error u_{oi} representa factores tales como el tiempo, variaciones impredecibles en el rendimiento laboral y en los equipos, etc.

Esta es la primera de las importantes hipótesis del modelo: Cuando el proceso productivo no es instantáneo, el efecto del error sobre la producción no puede ser conocido hasta después que las cantidades de insumo se hayan empleado en la producción.⁽¹⁾

La segunda hipótesis del modelo es que las condiciones de optimización se refieren al valor esperado de los beneficios ya que éstos se distribuyen estocásticamente: Es decir:

$$(30) \quad \frac{\partial E(\pi)}{\partial L} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial E(\pi)}{\partial L}} \right\} \text{ condiciones de optimización.}$$

$$(31) \quad \frac{\partial E(\pi)}{\partial K} = 0$$

La tercer hipótesis es que los precios p , w y r son conocidos a ciencia cierta o estadísticamente independientes de la perturbación de la FP, con esperanza matemática p_i^+ , w_i^+ y r_i^+ respectivamente para la i -ésima firma. Se tiene entonces:

$$(32) \quad E(\pi) = p^+ E(X) - w^+ L - r^+ K$$

Tal como lo expresan Zellner et al. las condiciones de optimización pueden no cumplirse acabadamente debido a errores del empresario motivados por inercia, ignorancia, etc. Estas desviaciones pueden suponerse distribuidas aleatoriamente en todas las firmas en la industria y pueden ser representadas por

(1) Cf. Zellner et al., /297 pág. 787.

las variables u_{1i}^+ y u_{2i}^+ .

Sin embargo, la inercia no es la única causa por la que las condiciones de óptimo (30) y (31) no se cumplen. Otra causa por la cual la expectativa del empresario puede no cumplirse, es cuando existen diferencias entre los precios de los factores ex ante con respecto a los precios ex post. Nótese que esto corresponde a la segunda parte de la tercer hipótesis (precios con perturbaciones aleatorias). Si también se supone que las diferencias se distribuyen aleatoriamente entre las firmas es cierto que:

$$\log \left(\frac{w}{p} \right)_i^+ = \log \left(\frac{w}{p} \right) + u_{1i}^+ ; \text{ y que } \log \left(\frac{r}{p} \right)_i^+ = \log \left(\frac{r}{p} \right) + u_{2i}^+$$

Si los precios fueran conocidos exactamente, las perturbaciones u_{1i} y u_{2i} serían nulas y estaría usándose la primer parte de la tercer hipótesis. En consecuencia, las condiciones de maximización de beneficios -(30) y (31)- incluyen los dos conjuntos de errores; los que se originan en la inercia (u_i^*), y los que provienen de las diferencias ex ante y ex post de los precios (u_i^+). Si se hace $u_{ri} = u_{ri}^* + u_{ri}^+$ ($r = 1, 2$) el "nuevo" modelo de producción se escribe:

$$(33) \quad X_{oi} - \alpha_1 X_{1i} - \alpha_2 X_{2i} = \alpha_0 + u_{oi}$$

$$(34) \quad X_{oi} - X_{1i} = k_1' + u_{oi} + u_{1i}$$

$$(35) \quad X_{oi} - X_{2i} = k_2' + u_{oi} + u_{2i}$$

donde:

$$\alpha_0 = \log A; \quad k_1' = \log \left(\frac{wR_1}{p\alpha_1} \right) - \frac{1}{2} \sigma_{00}; \quad k_2' = \log \left(\frac{rR_2}{p\alpha_2} \right) - \frac{1}{2} \sigma_{00}$$

u_{oi}, u_{1i}, u_{2i} errores aleatorios

Desde el punto de vista de este trabajo, la derivación más importante del modelo, de Zellner et al. es que los insumos no dependen del error en la función de producción. Esto se ve al pasar a la forma reducida del sistema (33)-(35), es decir:

$$(36) \quad x_{oi} = \frac{[\alpha_0 - \alpha_1 k_1' - \alpha_2 k_2' + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)u_{oi} - \alpha_1 u_{1i} - \alpha_2 u_{2i}]}{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$(37) \quad x_{1i} = [\alpha_0 + (\alpha_2 - 1)k_1' - \alpha_2 k_2' + (\alpha_2 - 1)u_{1i} - \alpha_2 u_{2i}] / (1 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$(38) \quad x_{2i} = [\alpha_0 - \alpha_1 k_1' + (\alpha_1 - 1)k_2' - \alpha_1 u_{1i} + (\alpha_1 - 1)u_{2i}] / (1 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

Ya que u_{02} depende de "errores de la naturaleza" en tanto que u_{1i} y u_{2i} de "errores humanos", un supuesto subyacente razonable es que:

$$\text{cov}(u_{0i}, u_{1i}) = \text{cov}(u_{0i}, u_{2i}) = 0$$

Ello implica que las estimaciones MCD de (36) no son ya inconsistentes. Mejor todavía, el hecho de que $E(u_{0i}, u_{1i}) = E(u_{0i}, u_{2i}) = 0$ implica que los estimadores MCD son consistentes y, bajo el supuesto de normalidad, son también insesgados.

ii. En cuanto al segundo enfoque, Griliches y Ringstad⁽¹⁾ plantean perfectamente en forma conceptual los problemas estadísticos antes desarrollados. Básicamente hay dos preguntas que condensan las dificultades de estimación: (i) ¿cuál es el mecanismo que lleva a las firmas a elegir niveles de insumos particulares y producir ciertos niveles de producción? (ii) ¿cuál es la relación entre las "verdaderas" variables especificadas por la teoría económica y los valores numéricos que efectivamente se le atribuyen? Vale decir, se preguntan sobre el modelo de conducta pertinente y si los datos están libres de error.

Erróneamente Griliches y Ringstad sostienen que los insumos y el producto final se determinan simultáneamente. Aquí se refleja la importancia de la primera hipótesis de Zellner et al. Cuando el proceso productivo requiere tiempo para dar su resultado los insumos se determinan antes de conocerse el nivel del producto logrado.

A propósito de los insumos, Griliches y Ringstad sostiene que se puede aceptar que los equipos de capital y su estructura estén ya predeterminados en gran parte, tal que las fluctuaciones corrientes en la producción no los afecten; sin embargo, ello no es cierto del otro insumo, el trabajo. Análogamente, en el caso de la producción agrícola puede suponerse que el insumo trabajo y el error en la ecuación de producción han sido "escogidos" en forma independiente (por ej., el error mide la influencia de fluctuaciones climáticas no anticipadas; el insumo tiene en cuenta las variaciones temporales); pero ello es imposible mantener en el caso de establecimientos industriales.

Como se ve, el tratamiento de Zellner et al. permite solucionar el problema de la simultaneidad entre X y L.

La segunda pregunta viene perfectamente planteada por Aigner y Chu [17]. Si todas las empresas enfrentan un mismo conjunto de restricciones (es decir,

(1) Griliches y Ringstad [17] pág. 13 y sigs.

precios de factores y productos más o menos iguales, una misma función de producción, etc.), interesa conocer porqué las empresas no se mueven todas hacia el punto máximo de la frontera productiva -beneficios óptimos- tal que se llegue a una muestra en la que todo problema de estimación quede excluido por definición.⁽¹⁾

Entre las razones más relevantes merecen consignarse las siguientes: (i) las firmas están sujetas por su stock de capital heredado que sólo pueden cambiar lentamente (a un costo razonable); (ii) diferencias en los precios de los factores debido a disimilitudes regionales en salarios y al acceso diverso a los mercados de capital por los diferentes tamaños de las firmas; (iii) las firmas tienen expectativas distintas acerca de las futuras relaciones de precios entre los factores, por lo que sus elecciones de capital-trabajo pueden aparecer como "erróneas", retrospectivamente. En suma, en estos factores existe suficiente varianza como para hacer posible una estimación.

Finalmente, y a modo de síntesis, puede decirse que las fuentes de error obedecen a dos grandes items: (i) a que el modelo estimado sea apenas una aproximación de la verdadera forma funcional subyacente -y aún si la forma funcional fuera correcta, firmas diferentes pueden tener diferentes parámetros; (ii) a errores en la colección de los datos o porque éstos no miden lo que se espera deben medir -por ej., no permiten diferenciar cuantitativamente los insumos entre firmas. ^{iii.} Cabe señalar que las consideraciones anteriores referidas al modelo Cobb-Douglas, han sido extendidas por D.Hodges /197/ para estimaciones MCD, en un modelo uniecuacional, de los parámetros de la función de producción CES. Siguiendo los lineamientos de Zellner, Kmenta y Dreze, Hodges demuestra que tales estimaciones son también consistentes.

(1) Como bien lo señalan Aigner y Chu las empresas se quedan por debajo de la frontera de máxima eficiencia. Las razones por ellos indicadas son: (i) "shocks" puramente aleatorios del proceso productivo; (ii) diferencias en eficiencia técnica (equipos de capital; cantidad y calidad de trabajo); (iii) diferencias en eficiencia económica (que también afectan los valores técnicos en la función de producción de la industria).

b. Problemas específicos

Los problemas específicos de cada tipo de función estudiada en general están referidos a: i) las hipótesis implícitas o explícitas de las funciones a utilizar; ii) las dificultades para la estimación directa y/o iii) la falta de un número suficiente de estimaciones para realizar estudios comparativos.

En el caso de la Cobb-Douglas, los aspectos indeseables surgen en especial con relación a la hipótesis de un valor de la elasticidad de sustitución igual a la unidad. El otro problema (de los rendimientos constantes a escala) queda superado con la liberación de la suma de los exponentes. En lo relativo a las últimas fuentes de impedimentos (ii. eiii.) la FP tipo Cobb-Douglas está en mejores condiciones que ninguna otra función, ya que es fácilmente transformable en lineal en sus parámetros y existe un cuerpo más que suficiente de estudios semejantes disponibles para la comparación.

Respecto de la CES, la forma general de la función (con rendimientos sin restricciones a priori), prácticamente elimina todas las dificultades del primer tipo, aunque en la literatura más reciente se está prestando considerable atención a FP con elasticidad de sustitución variable. Por otra parte ya se mencionó la dificultad que existe para transformar esta función en una relación lineal. Se debe recurrir a una aproximación que es válida para valores de la elasticidad de sustitución cercanos a la unidad. Existe sin embargo un gran número de estimaciones realizadas, facilitándose así la comparación de los resultados.

Por último, respecto de las restantes funciones de producción analizadas, presentan todas ellas graves falencias en alguno o varios de los ítems que se utilizan en esta sección como patrones de comparación. Las dificultades ordenadas de acuerdo a su peso aparecen en posición inversa a las enunciadas al comienzo. La mayoría de esas funciones carece de puntos de comparación por no haber sido utilizadas como modelos a ser estimados con suficiente frecuencia. Quizás éste es el hecho más notorio y grave. Le sigue en orden de importancia la dificultad que muchas de ellas presentan para ser tratadas con los métodos estadísticos disponibles. En otros casos presentan algunas o varias características que hacen poco atractivo su uso.

Como resultado de todo lo analizado hasta aquí, en esta Primera Parte, se considera conveniente estimar las funciones de producción en base a la Cobb-Douglas y la CES.

Las especificaciones explícitas se dejan para ser enunciadas tras el análisis de la Segunda Parte. En ese momento, con las variables ya definidas y acotadas se presentarán las formas estrictas a ser utilizadas en cada caso, y los argumentos que intervendrán en cada regresión.

BIBLIOGRAFIA

- [1_] AIGNER, D.J. y CHU, S.F.: "On Estimating the Industry Production Function". The American Economic Review, Vol. LVIII, nº. 4, Set. 1968 págs. 826-39.
- [2_] ALLEN, R.G.D.: "Análisis Matemático para Economistas" Aguilar, Madrid 1959.
- [3_] ARROW, K.J.; CHENERY, M.B.; MINHAS, B.S. y SOLOW, R.M.: "Capital-labour Substitution and Economic Efficiency". Review of Economics and Statistics, Vol. 43, 3 (1961) págs. 225-50.
- [4_] BROWN, MURRAY (editor): "The Theory and Empirical Analysis of Production". National Bureau of Economic Research, N.York 1967.
- [5_] BROWN, MURRAY y DE CANI, J.S.: "Technological Change and the Distribution of Income. International Economics Review. IV, 1963 págs. 289-309.
- [6_] CLARAMUNT, A.M.: "Notas sobre funciones de producción". Serie Cuadernos. Sección Economía nº. 67, Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ciencias Económicas, Mendoza 1970.
- [7_] CLEMHOUT, S.: "The Class of Homothetic isoquant production functions" Review of Economic Studies 35, 1, nº. 101 (1968) págs. 91-104.
- [8_] COBB, CH.W. y DOUGLAS, P.H.: "A Theory of Production" American Economic Review, Papers and Proceedings. 1928, Vol. XVIII, págs. 139-65.
- [9_] DADONE, A.A.: "Analysis of the Cobb-Douglas Production Function for Sand and Gravel in the U.S. 1954" Universidad de Chicago. Tesis de Master. 1965.
- [10_] DADONE, A.A. y DI MARCO, L.E.: "El sesgo de Simultaneidad en los modelos de producción". Versión no publicada, 1973.
- [11_] DANO, S.: "Industrial Production Models". Springer-Verlag, Viena 1966.
- [12_] DI MARCO, L.E.: "Estimación de Funciones de producción del Tipo Cobb-Douglas: Una nota econométrica". T.I. nº. 5. Instituto de Matemática y Estadística. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Córdoba. 1971.

- [13] DORFMAN, P.A., SAMUELSON y SOLOW, R.M.: "Linear Programming and Economic Analysis". J.Wiley and Sons N.York, 1958. (Hay traducción castellana).
- [14] DURAND, DAVID: "Some Thoughts on Marginal Productivity with Special Reference to Prof. Douglas Analysis". Journal of Political Economy, Vol. 45; 1937; págs. 740-758.
- [15] FERGUSON, C.E.: "The Neoclasical Theory of Production and Distribution" University Press. Cambridge. 1969.
- [16] GIVOGRI, C.A.: "Notas sobre algunas propiedades de las funciones de producción más usuales". Serie "Notas", Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Córdoba. 1970.
- [17] GRILICHES, Z. y RINGSTAD, V.: "Economics of Scale and the form of the production function" North-Holland. Amsterdam 1971.
- [18] HENDERSON, J.M. y QUANDT, R.E.: "Teoría Microeconómica" Ariel. Barcelona, 1962.
- [19] HODGES, DOROTHY: "A Note on Estimation of Cobb-Douglas and CES Production Function Models" Econometría, págs. 721-25; Vol. 37, nº. 4; Octubre 1969.
- [20] KENNEDY, CH. y THIRLWALL, A.P.: "Thechnical Progress: A Survey" en The Economic Journal, nº. 325, Vol. 82, Marzo 1972. Págs. 11-72.
- [21] KLEIN, L.R.: "An Introduction to Econometrics" Prentice-Hall, Inc. Englewood, 1962.
- [22] LEFTWICH, R.H.: "The Price System and Resource Allocation". Rev Ed. Holt. Rinehart and Winston N.York 1965. (Hay versión castellana).
- [23] MALINVAUD, E: "Metodos estadísticos de la Econometría" Ariel, Barcelona 1967.
- [24] MARSCHAK, J. y ANDREWS, W.J.: "Randon Simultaneous Equation and the Theory of Production", Econometría, Vol. 12, July-October 1944, págs. 143-205.
- [25] MUNDLAK, Y. y HOCH, I.: "Consecuences of Alternative Specification in Estimation of Cobb-Douglas Production Functions", Econometría, Vol. 33 nº. 4.

- [26_] NERLOVE, M.: "Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Functions" Rand Mc.Nally and Company. Chicago 1965.
- [27_] VICARELLI, F.: "La funzione di produzione ad elasticità di sostituzione costante e la stima del tasso di progresso tecnico" Revista di Politica Economica LVII - III Serie Julio 1967. págs. 975-1055.
- [28_] WALTERS, A.A.: "Production and cost Functions: An Econometric Survey" Econometrika, Vol 1, 31, nº. 1-2, Enero-Abril de 1963.
- [29_] ZELLNER, A. KMENTA, J. y DREZE, J.: "Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Function Models" Econometrika, Vol. 34, nº.4, Octubre de 1966.

INSTITUTO NACIONAL
DE
ESTADISTICAS Y CENSOS



FUNCIONES DE PRODUCCION Y RENDIMIENTOS A ESCALA
EN EL SECTOR MANUFACTURERO ARGENTINO. 1963.

AUTOR: ALDO A. DADONE

AÑO: 1973

INFORME PARCIAL N° 2
MINISTERIO DE DEFENSA
D.I.G.I.D.

CONTENIDO DEL INFORME PARCIAL N° 2

SEGUNDA PARTE: CONSIDERACIONES EMPIRICAS SOBRE LA ESTIMACION

I. Información disponible y datos a utilizar

a. Variables originales del Censo

b. Las variables derivadas

i. La variable representativa del insumo de trabajo

ii. La medición del insumo de capital

iii. Variables artificiales

c. Selección de la muestra

II. Definición de las Variables

a. La variable dependiente

b. Las variables independientes

i. Para el insumo de trabajo

ii. Para el insumo de capital

III. Método de estimación

SEGUNDA PARTE: CONSIDERACIONES EMPIRICAS SOBRE LA ESTIMACION

I. Información disponible y datos a utilizar

De la totalidad de datos que han sido registrados en el Censo, se ha seleccionado un grupo de variables utilizadas en forma diversa en las sucesivas etapas de este trabajo. Algunas veces han permitido la selección de la muestra, por ejemplo al eliminar de la lista de establecimientos considerados a aquellos que tenían menos de tres empleados (las razones se explican más adelante). Otros atributos han permitido la clasificación de las "Industrias Manufactureras" (División 2-3) en Agrupaciones con numeración del 20 al 39 (por ejemplo la Agrupación 23 es "Fabricación de Textiles"), y éstas, a su vez, en Grupos a nivel de tres dígitos (por ejemplo dentro del grupo 23 las "Fábricas de tejido de punto" llevan el número 232). Como la clasificación utilizada en el Censo fue la Clasificación Industrial Internacional Uniforme (C.I.I.U.), la comparación con estimaciones para otros países por Agrupación o Grupos es directa.

a. Variables originales del Censo

La designación que tendrán en este trabajo las variables a utilizar y las características de los atributos elegidos se detallan seguidamente:

F: Fecha de iniciación de las actividades;

El dato se incluyó para verificar la declaración del cuestionario en lo referente a si correspondía cumplimentar todo o parte del mismo. Los establecimientos que iniciaron actividades antes de 1963 o a partir del 1-1-1963 contestaron la totalidad de las preguntas. Los iniciados en el curso de 1963 contestaron los datos relativos al período realmente trabajado, salvo cuando las mismas hubiesen sido continuación de las actividades de un dueño anterior, en cuyo caso se completó la información con la del período correspondiente a este último. Si las actividades del establecimiento habían sido comenzadas entre el 1-I-1964 y 30-IV-1964, sólo debía cumplimentarse la información relativa al día del relevamiento, es decir, la contenida en la primera parte

del cuestionario. En consecuencia se eliminaron de la muestra todos los establecimientos que no habían iniciado sus actividades antes del 1-I-1963, por no disponerse de los datos completos necesarios.

m_1 : motores primarios;

Consigna la potencia instalada en motores para mover maquinaria y generadores de electricidad.

m_2 : motores eléctricos;

Indica la potencia total instalada en el establecimiento, independientemente de la naturaleza de la fuente de alimentación. Ambos datos se refieren al equipo de fuerza instalada que se encontraba normalmente en actividad en la época del censo (primer cuatrimestre de 1964). Nótese que surge un error en el uso de esta variable para representar el capital utilizado durante 1963. Este error proviene de varias causas, pero las más importantes son:

i. El incremento o disminución de la potencia instalada promedio para 1963 respecto de la existente en la época del Censo. Esta fuente de error surge de la distinta fecha a que se refieren los datos.

ii. La divergencia entre potencia instalada (HP instalados) y el capital utilizado. La posibilidad de este error aparece porque se pretende representar al stock de capital existente por una manifestación parcial del mismo (la potencia de los motores que existen en el establecimiento). Esto lleva implícita la hipótesis que los demás equipos de capital guardan relación directa con los HP instalados, presunción no siempre adecuada.

iii. El uso del capital no guarda estricta proporcionalidad con el stock de capital. Esto puede surgir, por ejemplo, si hay capacidad instalada no utilizada. En verdad el año 1963 fue de una notable merma en el nivel de ocupación del stock de capital respecto a los valores máximos que podían darse. Como resultado de ello pueden existir sesgos en la estimación del parámetro que mide el impacto del capital en la FP.

N_e : empleados ocupados;

es el total de empleados ocupados en el último día hábil de abril de 1964.

N_o : obreros ocupados;

es el total de obreros ocupados el último día hábil de abril de 1964.

N_p : propietarios y familiares;

es el total de socios activos o propietarios, incluidos familiares de los mismos que trabajan sin percibir remuneración mensual fija.

n_o : número de obreros;

está discriminado en totales mensuales para 1963.

S: sueldos;

es el total de sueldos pagados a los empleados durante 1963 (exentos de descuentos y aportes patronales jubilatorios).

W: salarios;

es el total de salarios pagados a obreros durante 1963 (incluidos descuentos y aportes patronales jubilatorios).

H: horas-obrero;

es el total de horas trabajadas por los obreros, durante el año 1963.

C: combustibles;

establece el valor de los combustibles utilizados en el proceso productivo. Están incluidos los lubricantes, carburo de calcio, acetileno y oxígeno. También se incluyen los combustibles usados para la generación propia de electricidad.

E: energía eléctrica;

se refiere a la energía eléctrica comprada que se consume en el proceso de fabricación. La energía producida por el establecimiento ^{no} fue incluida en esta magnitud sino como producto. La energía vendida o transferida fue deducida del valor de la variable considerada aquí.

M: materias primas;

incluye los insumos correspondientes a materias primas, envases y demás materiales utilizados en la obtención de los productos finales. La valoración se realizó en puerta de fábrica. Los envases no recuperables y el embalaje se incluyeron en este rubro. Para los envases recuperables se incluyó el gasto de reposición. Se excluye el valor de las materias primas recibidas de terceros para ser trabajadas por cuenta de éstos.

Y: producción bruta;

incluye el valor de cada uno de los artículos producidos en el establecimiento durante el año 1963 hubiesen sido aquéllos vendidos o no, valúandose la producción a precios de venta en fábrica. Los productos y subproductos producidos y no vendidos se valoraron como si hubiesen sido vendidos tomando como base los precios de los productos iguales vendidos durante el año. Los productos que de una planta pasaron a otra planta de la misma empresa, ya sea para recibir procesos industriales de acabado o para servir como materia prima o elemento de integración de otros productos, fueron considerados a su valor de venta o en su defecto a su valor de transferencia, tomándose como tal el asentado en los libros del establecimiento. Todos los valores a que se hace referencia aquí están libres de fletes u otros gastos de transporte y expedición, y de descuentos y bonificaciones de cualquier naturaleza. En cambio incluyen los impuestos y el valor de los envases no recuperados cuando los productos se vendieron envasados. En lo referente a la elaboración de materias primas de terceros se ha consignado solamente el pago percibido por la realización de dicho trabajo industrial. En el caso de las industrias que tienen un largo ciclo de producción (construcciones navales por ejemplo) la producción se definió como el trabajo realizado en el año del Censo, registrándose el valor monetario de dichos trabajos.

A: montos abonados a terceros;

la correcta determinación del "valor agregado" por el establecimiento, motivó que se consideraran los montos abonados a terceros por la realización de trabajos de carácter industrial, con cargo al establecimiento declarante.

Los conceptos incluidos fueron los pagos: 1) a talleres y a otros establecimientos (comprende los pagos que el establecimiento declarante ha efectuado a otros establecimientos por trabajos industriales ejecutados con materias primas o materiales de propiedad del declarante); 2) a contratistas (se trata de los pagos, mediante contrato, relativos a la ejecución de algunos trabajos que se realizan en la mayoría de los casos en el mismo local o dependencias del establecimiento declarante; el personal que realiza

estas tareas no revista en la nómina del personal estable del establecimiento);
3) a trabajadores a domicilio (se refiere a los trabajos de mano de obra que con materias primas de propiedad del declarante se efectúan en el propio domicilio de quien los realiza, mediante paga por unidad semiterminada o terminada).

I: impuestos;

se incluye en este rubro las sumas pagadas en concepto de diversos tipos de impuestos (excepto réditos), como así también los aportes de los empleadores a las cajas de previsión, es decir, el aporte patronal. También abarca este concepto el impuesto interno pagado por la producción declarada del año. Este gravamen no comprende a todos los artículos sino a un número limitado de ellos (por ejemplo: tabaco, alcoholes, vinos comunes y compuestos, etc.) y se lo utiliza para deducirlo del valor bruto de producción de dichos artículos a los fines de la determinación del valor agregado, por cuanto el impuesto interno que se paga en fábrica forma parte de la venta y es, en ciertos casos, el concepto de mayor gravitación en el mismo.

G: gastos generales;

comprende los seguros generales, alquileres, fletes y acarreos, propaganda y otros gastos realizados durante el año 1963, cuando éstos son independientes del proceso de producción en sí.

V: ventas;

establece el monto de las operaciones comerciales realizadas por el establecimiento durante el año 1963. Se incluyeron todos los artículos vendidos cualquiera hubiese sido el año de su fabricación y la forma de pago. El valor declarado es el de venta de los artículos puestos en el establecimiento excluyéndose, por lo tanto, fletes y otros gastos de acarreo y expedición y quedando deducidos los descuentos, bonificaciones y devoluciones.

V: valor agregado;

para obtener el valor agregado por cada establecimiento se partió de la siguiente formulación:

Valor agregado = (Ingresos totales) - (insumos intermedios) - (Impuestos netos)

Es decir que:

$$\text{Valor Agregado} = (\text{Bienes producidos} + \text{trabajos realizados para terceros} + \\ + \text{energía eléctrica vendida}) - (\text{materias primas utilizadas} + \\ + \text{combustibles} + \text{trabajos realizados por terceros} + \\ + \text{energía eléctrica comprada} + \text{impuestos internos}).$$

En "ingresos totales" se han incluido todas las fuentes de ingresos para el establecimiento. Los "insumos intermedios" comprenden aquellos elementos que implican desembolso para la firma pero no corresponden a retribuciones de factores productivos empleados por ella. Se restan los impuestos netos para llegar al concepto de valor agregado que corresponde al costo de factores. Esta definición de valor agregado coincide con el pago de factores usados internamente por la firma (retribución al factor trabajo e imputación al capital usado).

b. Las variables derivadas⁽¹⁾

A partir de las variables originales recogidas directamente en el Censo y enunciadas en el punto a, se obtuvieron las siguientes variables (algunas serán utilizadas directamente en las regresiones, otras son pasos intermedios para definiciones de variables finales):

1. La variable representativa del insumo de trabajo.

Varias son las posibles definiciones a usar para el insumo de trabajo. La más sencilla es utilizar el número de personas empleadas en el establecimiento

$$N = N_e + N_o + N_p$$

Sin embargo esta variable presenta algunos inconvenientes en especial respecto a la distinta productividad que pudieran tener las diversas categorías de trabajadores. Dada la inexistencia de otros datos adicionales sobre el particular, una cierta mejora podría introducirse utilizando el número de horas trabajadas por los obreros y los empleados. Las horas-obrero provienen directamente del censo, pero no existe el dato de horas-empleado. Recurriendo a una estimación basada en los sueldos y salarios pagados se tiene:

$$L_1 = h + S / \left(\frac{W}{h} \right) = h \left(1 + \frac{S}{W} \right)$$

Nótese que esta formulación⁽²⁾ implica al mismo tiempo una corrección de las diferencias en productividad que pudieran existir entre empleados y obreros. Esto es así porque, si el mercado de trabajo es competitivo tanto para el caso de los obreros como para el de los empleados, la diferencia entre sueldos y salarios por hora trabajada recogerá la diferencia entre las productividades marginales de ambos sectores laborales.

Para captar el trabajo personal de los propietarios de los estableci-

(1) Para todo el resto de esta SEGUNDA PARTE se ha utilizado como referencia el libro de Griliches y Ringstad [17].

(2) Puede verse una utilización semejante de los datos censales para EE.UU en Dadone [10].

mientos, se les asignó un número de horas anuales de trabajo igual a ocho horas diarias por los 225 días laborables netos del año 1963. Es decir que el insumo total de trabajo calculado fue:

$$L = h(1 + \frac{S}{W}) + 1800 \cdot N_p$$

Esta es la medición principal del insumo de trabajo en este estudio. No obstante se probó con otras definiciones para ciertos casos particulares. Una de ellas fue la de dividir el insumo de trabajo en horas-obrero por una parte y número de empleados por otra.

ii. La medición del insumo de capital.

Lamentablemente en el Censo no fue posible recoger con suficiente aproximación el valor del capital utilizado. Hasta el intento de medir el stock de capital fracasó por los criterios divergentes utilizados por los empresarios en su contestación. Ya se mencionaron los defectos del uso de la capacidad instalada como representativa del capital empleado. Evidentemente la razón incuestionable de su inclusión para captar el impacto del capital en la función de producción, pese a esos inconvenientes, estriba en ser el único atributo censal utilizable que mantiene una relación más o menos directa con el capital.

iii. Variables artificiales.

Otras variables que se usan en las regresiones son:

$$m \begin{cases} = 1, & \text{para establecimientos que conjuntamente con otros integran una firma;} \\ = 0, & \text{para firmas con un único establecimiento.} \end{cases}$$

Esta variable artificial sirve para analizar las posibles diferencias entre empresas con múltiples plantas y otras que sólo cuentan con un único establecimiento productivo.

A fin de comparar la productividad de establecimientos ubicados en distintas regiones del país se utilizaron las variables artificiales:

$$R_1 \begin{cases} = 1, & \text{para establecimientos ubicados en las zonas más industrializadas excluido el Gran Bs. As.;} \\ = 0, & \text{para el resto.} \end{cases}$$

$$R_2 \begin{cases} = 1, & \text{para establecimientos ubicados en las áreas menos industrializa-} \\ & \text{dos excluido Bs. As.;} \\ = 0, & \text{para el resto.} \end{cases}$$

El tamaño del establecimiento es uno de los aspectos de gran importancia en este análisis. Para definir el tamaño de una empresa pueden tomarse variados criterios. Especialmente usados son los que tienen en cuenta la cantidad insumida de alguno de los factores productivos. Casi la mayoría de los estudios econométricos recurren al número de empleados y obreros como determinante del tamaño del establecimiento. En este sentido es conveniente adoptar un criterio semejante pues permite la comparación con resultados econométricos hallados para otros países. En verdad el tamaño de una empresa debería medirse por la cantidad producida para la cual el costo medio es mínimo (esto tiene cierta relación con el concepto de "capacidad de producción", aunque no coincide exactamente). Pero como no se dispone de los datos necesarios para ese cálculo debe recurrirse a otros indicadores. Indudablemente más relacionado con el verdadero concepto de "tamaño de la planta" enunciado recién está el stock de capital, pero ya se ha hecho mención de las dificultades que existen para definir correctamente un indicador de este insumo. También se utiliza para medir el efecto del tamaño (relacionado con la cantidad de personas ocupadas) una variable artificial:

$$T_1 \begin{cases} = 1, & \text{cuando } N < 10; \\ = 0, & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

$$T_2 \begin{cases} = 1, & \text{cuando } 50 \leq N < 100; \\ = 0, & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

$$T_3 \begin{cases} = 1, & \text{cuando } N \geq 100; \\ = 0, & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Cuando el número de establecimientos incluidos dentro de cualquiera de los grupos es pequeño se utiliza:

$$T^* \begin{cases} = 1, & \text{cuando } N > 50 \\ = 0, & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

c. Selección de la muestra.

Otros problemas surgen del análisis del Censo en lo referente a falta de datos consignados, error manifiesto, etc. Las reglas para resolver estos inconvenientes son la exclusión de todo establecimiento que presente alguna o varias de las características siguientes:

- a) menos de tres empleados;
- b) no se consignan datos de horas trabajadas por los obreros;
- c) no se consignan datos sobre salarios pagados;
- d) el valor agregado resultante es negativo o cero.

El criterio de exclusión a se tomó porque se considera que los establecimientos muy pequeños no llevan registraciones suficientemente confiables como para ser tenidas en cuenta. Con la aplicación del mismo criterio a, el b y el c parecerían redundantes, pero se los incluye para evitar establecimientos que consignaron erróneamente los datos sobre horas trabajadas por los obreros y sus salarios. Respecto al criterio d se requiere una explicación, ya que en realidad el valor agregado podría ser cero o negativo. Esta decisión está fundada en el hecho que en la estimación se usan los logaritmos de las variables , y no tendría sentido incluir en la muestra estos establecimientos. Merced a ello estos casos fueron eliminados.

II. Definición de las variables

Antes de enunciar cuales serán las variables consideradas endógenas y exógenas, a ser utilizadas en la regresión, es necesario presentar las formas funcionales cuyos parámetros serán estimados merced al ajuste. Este tema había sido enunciado en el final de la PRIMERA PARTE solamente en forma general, hasta tanto se realizara el análisis de la información disponible y la selección de los datos a utilizar. Es posible ahora dar forma concreta a las funciones tipo Cobb-Douglas y C.E.S. que, según se dijo en aquella oportunidad, serán usadas en el tratamiento estadístico del tema central de este trabajo. La función Cobb-Douglas se estimará en su forma logarítmica con las siguientes características:

Partiendo de

$$(1) \quad X = AL^a K^b;$$

se tomará

$$(X/L) = A L^h (K/L)^b,$$

y pasando a la forma logarítmica queda finalmente:

$$(2) \quad \log (X/L) = \text{constante} + h \log L + b \log (K/L)$$

Para la función de producción de elasticidad de sustitución constante será usada la aproximación lineal propuesta por KMENTA (Véase la fórmula 20b de la PRIMERA PARTE). Esta aproximación resulta ser igual a la última forma propuesta para la Cobb-Douglas en (2), con la adición de un cuarto término. Esto es:

$$(3) \quad \log(X/L) = \text{constante} + h \log L + b \log(K/L) + \frac{1}{2} [\log(K/L)]^2$$

a. La variable dependiente

Las regresiones se efectuarán usando como variable dependiente el Valor Agregado. Esta magnitud estará dividida en cada caso por la variable representativa del insumo de trabajo, quedando en consecuencia $\log (V/L)$ como la variable dependiente.

Es necesario destacar que, al usar como únicos insumos de la FP el trabajo y el capital (o las variables que los representan), se están tratando las materias primas y otros productos utilizados en el proceso de fabricación en forma distinta al trabajo y el capital. La eliminación de las materias primas de la lista de insumos ha sido habitualmente fundamentada en varias razones. Las más importantes son:

i. Al usar el valor agregado de cada industria permite la comparación entre diversas industrias con proporciones diferentes en el uso de materias primas.

ii. Se elimina la doble contabilización emergente de la agregación de distintos sectores. Si se tomara la producción bruta, las ventas de una empresa serían insumos (y aparecerían también en las ventas) de otras empresas.

iii. Generalmente existe una correlación muy estrecha entre la producción bruta y el uso de materias primas, por lo que se obscurece el papel desempeñado en la producción por el trabajo y el capital, que son quienes en verdad interesan.

iv. Por último las materias primas son considerablemente más endógenas que K y L , ya que cualquier fluctuación en la cantidad demandada a la firma se reflejará directamente y con mayor intensidad en el insumo de aquellas.

No obstante estas consideraciones, en el proceso de computación se realizarán regresiones (tales como la de $\ln M$ sobre $\ln X$, y $\ln M$ sobre $\ln V$) para analizar el efecto de utilizar el valor agregado como variable substituta de la producción.

b. Las variables independientes.

Las variables consideradas explicativas de la producción (representada por el valor agregado) son los servicios de trabajo y capital utilizados en el proceso de fabricación. Sin embargo no se disponen de datos completos sobre el trabajo insumido (sólo existen datos sobre el número de horas trabajadas por obreros, pero no por empleados) y no se cuenta con ninguna medición directa de la magnitud de los servicios de capital utilizados. Por ello se ha tenido que recurrir a otros atributos del Censo o derivaciones de los datos censales que reemplacen los datos requeridos.

i. Para el insumo de trabajo se utiliza la definición de horas-hombre equivalente dada por la fórmula

$$L = h \left(1 + \frac{S}{W} \right) + 1800 N_p$$

Alternativamente se usarán conjunta o individualmente el número de: empleados ocupados (N_e), obreros ocupados (N_o) y/o propietarios y familiares (N_p).

ii. Para el insumo de los servicios de capital se utiliza la potencia total instalada. Esta variable surge de la suma de los HP de los motores primarios para mover maquinaria más los de todos los motores eléctricos instalados, cualquiera sea su fuente de alimentación. Lamentablemente no existe forma de saber cual es la proporción de capacidad ociosa respecto de la total instalada. Indudablemente esta es la variable más deficiente de todas las utilizadas.

III. Método de Estimación

i. Tras la comprensiva discusión de la PRIMERA PARTE sobre la posibilidad de emplear el método de mínimos cuadrados directos, se llegó a la conclusión de que este método es suficientemente bueno para ser utilizado en las estimaciones de modelos de producción. Evidentemente el método de MCD presenta todas las ventajas posibles teniendo en cuenta su simplicidad y la calidad de sus resultados. Es por ello que en la decisión sobre el particular, la selección ha recaído en él.

ii. Al adoptar este método se están aceptando como ciertas las hipótesis implícitas mencionadas en la sección II. a. de la PRIMERA PARTE. Es decir que se presuponen verdaderas las afirmaciones sobre la aleatoriedad de la función de producción, el hecho de maximizar (los empresarios) el valor esperado de los beneficios y por último el conocimiento de los precios de factores y productos. Pero debe destacarse que su aceptación no implica ningún acto forzado ya que tales hipótesis coinciden con los lineamientos generales de la teoría microeconómica moderna.

iii. Al ser posible linealizar las dos funciones de producción escogidas para la estimación de sus parámetros (la Cobb-Douglas, en su versión sin restricciones sobre el valor de la suma de los exponentes -excepto que sean ambos mayores que cero-, y la C.E.S. en la aproximación debida de Kmenta), el método de mínimos cuadrados es el más indicado por tratarse de un procedimiento cuyos resultados tienen todas las características de los buenos estimadores (son estimaciones BLUE).

**INSTITUTO NACIONAL
DE
ESTADISTICAS Y CENSOS**



20 ENE. 1988

**FUNCIONES DE PRODUCCION Y RENDIMIENTOS A ESCALA
EN EL SECTOR MANUFACTURERO ARGENTINO. 1963.**

**AUTORES: ALDO A. DADONE
DOMINGO F. CAVALLO**

AÑO: 1973

**INFORME PARCIAL N°4
MINISTERIO DE DEFENSA
D.I.G.I.D.**

TERCERA PARTE

1. Dispersión de los coeficientes de insumos dentro de cada estrato

La dispersión de los coeficientes de insumos dentro de cada estrato k , es un elemento importante para determinar la afijación óptima de la muestra, es decir el tamaño de la muestra dentro de cada estrato, que asegure la estimación más eficaz de los coeficientes de insumo / promedios de cada subgrupo industrial, con un costo total predeterminado para el relevamiento. Además la dispersión de los coeficientes de insumos dentro de cada estrato k y para cada subgrupo industrial j nos permitirá discutir la conveniencia o no de sustituir el "número de personas ocupadas" (como medida del tamaño de cada establecimiento a los fines de la estratificación por tamaños) por alguna otra variable. Este análisis se hará para cada subgrupo industrial de tal forma que podrá resultar que en algunos subgrupos sea conveniente hacer la sustitución y en otros no. En principio, para los subgrupos donde la dispersión de los coeficientes de insumos dentro de cada estrato sea elevada, será conveniente analizar si otra variable alternativa para la estratificación (digamos el monto de ventas o el total de Kw de Potencia eléctrica instalada o el total de m² cubiertos, etc.) conduce o no a dispersiones menores. En caso de que se pruebe que la nueva variable produce menor dispersión dentro de los estratos se concluirá que conviene adoptarla en sustitución del "número de personas ocupadas" para la estratificación del subgrupo industrial en que se produce ese fenómeno.

Simbolizaremos por S_{ijk}^2 a la varianza de los a_{ijkl} alrededor de a_{ijk} . Dado que:

$$(1) a_{ijkl} = \frac{x_{ijkl}}{x_{.jkl}}$$

y que:

$$(2) a_{ijk} = \frac{x_{ijk}}{x_{.jk}} = \frac{\sum_{l=1}^q x_{ijkl}}{\sum_{l=1}^q x_{.jkl}}$$

determinaremos S_{ijk}^2 aplicando el concepto de "varianza de la razón". Es decir.

$$(3) \quad S_{ijk}^2 = M \left[a_{ijkl} - a_{ijk} \right]^2$$

donde M representa una medida de posición, en general, cuya determinación se realiza a continuación.

Sustituyendo a_{ijkl} en (3) obtenemos:

$$\begin{aligned} S_{ijk}^2 &= M \left[\frac{x_{ijkl}}{x_{.jkl}} - a_{ijk} \right]^2 = \\ &= M \left[\frac{x_{.jk}}{x_{.jk}} \frac{x_{ijkl}}{x_{.jkl}} - a_{ijk} \right]^2 \end{aligned}$$

o también:

$$(4) \quad S_{ijk}^2 = \frac{1}{x_{.jk}^2} M \left[\frac{x_{.jk} (x_{ijkl} - a_{ijk} x_{.jkl})}{x_{.jkl}} \right]^2 =$$

Como todos los establecimientos del estrato son aproximadamente / del mismo tamaño, puede suponerse que

$$q x_{.jkl} \approx x_{.jk}$$

Es decir que el número de establecimientos del estrato por la producción total de un establecimiento es aproximadamente igual a la Producción total del estrato. Por consiguiente podemos reemplazar $\frac{x_{.jk}}{x_{.jkl}}$ por q que es su valor aproximado. Resulta entonces:

$$\begin{aligned} S_{ijk}^2 &= \frac{1}{x_{.jk}^2} M \left[q (x_{ijkl} - a_{ijk} x_{.jkl}) \right]^2 = \\ &= \frac{q^2}{x_{.jk}^2} M \left[x_{ijkl} - a_{ijk} x_{.jkl} \right]^2 \end{aligned}$$

Hemos logrado reducir la varianza S_{ijk}^2 a una Medida de posición de una función de la variable X_{ijkl} . Como X_{ijkl} es una variable estadística ordinaria (no una razón como a_{ijkl}) lo más razonable es considerar a $\bar{M}$ como la media aritmética y entonces:

$$S_{ijk}^2 = \frac{q^2}{X_{.jk}^2} \frac{\sum_{i=1}^q [X_{ijkl} - a_{ijk} X_{.jk}]^2}{q} =$$

$$(5) \quad S_{ijk}^2 = \frac{q}{X_{.jk}} \left[\sum_{i=1}^q X_{ijkl}^2 - 2a_{ijk} \sum_{i=1}^q X_{ijkl} X_{.jk} + a_{ijk}^2 \sum_{i=1}^q X_{.jk}^2 \right]$$

Esta es la fórmula que emplearemos para el cálculo de las S_{ijk}^2 .

11. Afijación óptima de la muestra

Debemos determinar los tamaños t_{jk} que significan la distribución del tamaño muestral t_j (es decir el tamaño de la muestra para el subgrupo industrial j) que permite obtener la estimación más precisa de los a_{ij} con un gasto total dado.

Puede apreciarse que interesa estimar n parámetros diferentes ($a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$). La afijación que permita obtener la estimación más precisa de a_{1j} no necesariamente ha de conducir a la estimación más precisa de $a_{2j}, \dots, a_{nj}$. Es por ello que debe lograrse una suerte de afijación de compromiso entre las n afijaciones no necesariamente iguales que podríamos considerar óptimas según cuál sea el a_{ij} que tengamos en cuenta.

La precisión de la estimación de cada a_{ij} vendrá dada por la amplitud del intervalo de estimación de a_{ij} y ésta será proporcional a la varianza del estimador de a_{ij} (al que podemos llamar $\bar{a}_{ij}$). En el muestreo aleatorio sin reposición y estratificado la varianza de $\bar{a}_{ij}$ resulta:

$$(6) \quad s_{\bar{a}_{ij}}^2 = \frac{1}{T_j^2} \sum_{j=1}^P T_{jk} (T_{jk} - t_{jk}) \frac{S_{ijk}^2}{t_{jk}} = \sum_{k=1}^P \frac{w_{jk}^2 S_{ijk}^2}{t_{jk}} - \sum_{k=1}^P \frac{w_{jk} S_{ijk}^2}{T_j}$$

donde T_j representa el tamaño de la población en el subgrupo j , T_{jk} el tamaño de la población en el subgrupo j y estrato k y $w_{jk} = \frac{T_{jk}}{T_j}$

Para relacionar (6) con las fórmulas más conocidas del muestreo aleatorio sin reposición y estratificado, o simplemente las del caso en; que la población es infinita, podemos ver que:

$$s_{\bar{a}ij}^2 = \sum_{k=1}^p \frac{s_{ijk}^2}{t_{jk}} \quad T_j \rightarrow \infty$$

Si el costo de relevamiento puede suponerse igual a

$$C_j = C_0 + C_1 t_{j1} + C_2 t_{j2} + \dots + C_p t_{jp},$$

es decir que el costo total es igual a un costo fijo más un costo variable. Este costo variable unitario es el mismo para todos los establecimientos de un mismo estrato, pero puede diferir entre estratos. En consecuencia se puede determinar el mínimo de $s_{\bar{a}ij}^2$ aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange. La función auxiliar será:

$$\begin{aligned} s_{\bar{a}ij}^2 - [C_1 t_{j1} + C_2 t_{j2} + \dots + C_p t_{jp} - C_j - C_0] \\ = \sum_{k=1}^p \frac{w_{jk}^2 s_{ijk}^2}{t_{jk}} - \sum_{k=1}^p \frac{w_{jk} s_{ijk}^2}{T_j} - [C_1 t_{j1} + \dots + C_p t_{jp} - C_j - C_0] \end{aligned}$$

Derivando con respecto a cada t_{jk} e igualando a cero, resulta que:

$$-\sum_{k=1}^p \frac{w_{jk}^2 s_{ijk}^2}{t_{jk}^2} + \lambda C_k = 0 \quad k=1, 2, \dots, p$$

y por consiguiente

$$t_{jk} \cdot \sqrt{\lambda} = \frac{w_{jk} s_{ijk}}{\sqrt{C_k}} \quad k=1, 2, \dots, p$$

La suma para $k=1, 2, \dots, p$ resulta:

$$t_j \cdot \sqrt{\lambda} = \sum_{k=1}^p \frac{w_{jk} s_{ijk}}{\sqrt{c_k}}$$

y entonces

$$t_{jk} = t_j \frac{\frac{w_{jk} s_{ijk}}{\sqrt{c_k}}}{\sum_{k=1}^p \frac{w_{jk} s_{ijk}}{\sqrt{c_k}}} = t_j \frac{\frac{T_{jk} s_{ijk}}{\sqrt{c_k}}}{\sum_{k=1}^p \frac{T_{jk} s_{ijk}}{\sqrt{c_k}}}$$

Si todos los c_k son iguales

$$(7) \quad t_{jk} = t_j \frac{T_{jk} s_{ijk}}{\sum_{k=1}^p T_{jk} s_{ijk}}$$

Obviamente el valor de t_{jk} cambiará según el valor del subíndice i es decir según cuál sea el a_{ij} para el que procuramos la máxima precisión.

Para determinar un único t_{jk} vamos a convenir que la precisión total de la estimación es igual al promedio de las precisiones de cada a_{ij} considerado por a_{ij} . Es decir que valoraremos la precisión en función de la magnitud del coeficiente a_{ij} . Se tratará entonces de minimizar

$$a_{1j} s_{\bar{a}1j}^2 + a_{2j} s_{\bar{a}2j}^2 + \dots + a_{nj} s_{\bar{a}nj}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ij} s_{\bar{a}ij}^2$$

Aplicando el mismo procedimiento anterior resultará

$$t_{jk} = t_j \frac{\frac{\sum_{i=1}^n T_{jk}^2 s_{ijk}^2 a_{ij}}{\sqrt{c_k}}}{\sum_{i=1}^p \frac{\sum_{i=1}^n T_{jk}^2 s_{ijk}^2 a_{ij}}{\sqrt{c_k}}}$$

y si los C_k son todos iguales entre sí

$$(8) \quad t_{jk} = t_j \frac{\sum_{i=1}^n T_{jk}^2 S_{ijk}^2 a_{ij}}{\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n T_{jk}^2 S_{ijk}^2 a_{ij}}$$

Los t_{jk} así determinados constituyen los tamaños óptimos de la muestra en cada estrato.

III. Discusión de la conveniencia de sustituir la variable de la estratificación

Los valores de la $\sum_{i=1}^n a_{ij} S_{a_{ij}}^2$ para los t_{jk} óptimos permitirá determinar los subgrupos industriales en los que la dispersión es claramente mayor a la de los restantes subgrupos. En los subgrupos así detectados convendrá examinar la conveniencia de sustituir al "número de personas ocupadas" por alguna otra variable que asegure menor dispersión.

CUARTA PARTE

1. Un ejemplo numérico

Cuando discutimos el ejemplo numérico presentado para aclarar el procedimiento de definición de los estratos, concluimos que para el subgrupo j , debían realizarse tres estratos (a partir de los 5 sub-estratos originales). La tabla de los X_{ijk} para tres estratos, (de tal forma que $k=1,2,3$) es:

Cuadro N°1

estratos índice origen de insu- mos i k	1	2	3	
1	64	8	228	0,30
2	35	71	94	0,20
3	101	121	278	0,50
	200	200	600	

Para poder calcular las S_{ijk}^2 y resolver el problema de la afijación óptima, debemos disponer de los X_{ijk1} , es decir de la desagregación de cada una de las columnas del cuadro anterior en los establecimientos que conforman el estrato. Esta desagregación aparece en los cuadros siguientes:

Para $k=1$

$i \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	x_{ijk}
1	6	7	6	7	8	5	6	7	4	8	64
2	4	3	3	4	5	2	2	5	4	3	35
3	10	10	8	12	12	8	10	10	11	10	101
$x_{.jkl}$	20	20	17	23	25	15	18	22	19	21	200

Para $k=2$

$i \backslash l$	1	2	3	4	5	x_{ijk}
1	2	0	2	3	1	8
2	10	15	6	20	20	71
3	20	30	40	10	21	121
x_{ijkl}	32	45	48	33	42	200

Para $k=3$

$i \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	x_{ijk}
1	20	20	20	25	30	18	21	20	24	30	228
2	10	8	9	10	7	11	8	9	12	10	94
3	30	15	20	25	30	25	27	32	28	46	278
x_{ijkl}	60	43	49	60	67	54	56	61	64	86	600

Para calcular los S_{ijk}^2 trabajaremos primero para $k=1$, luego para $k=2$ y así sucesivamente.

Para $k=1$, resulta $q=10$, $x_{.jk}=200$, $a_{1jk} = \frac{64}{200} = 0,32$ y

$a_{2jk} = \frac{35}{200} = 0,175$. En el cuadro siguiente se calculan todos los restantes elementos de la fórmula (5):

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_{i=1}^q$
x_{1jkl}^2	36	49	36	49	64	25	36	49	16	64	424
x_{2jkl}^2	16	9	9	16	25	4	4	25	16	9	133
$x_{1jkl} x_{.jkl}$	120	140	102	161	200	75	108	154	76	168	1304
$x_{2jkl} x_{.jkl}$	80	60	51	92	125	30	36	110	76	63	723
$x_{.jkl}^2$	400	400	289	529	625	225	324	484	361	441	4078

y por consiguiente

$$s_{1j1}^2 = \frac{10}{200} \left[424 - 2 \times 0,32 \times 1304 + (0,32)^2 \times 4,078 \right] = 0,35$$

$$s_{2j2}^2 = \frac{10}{200} \left[133 - 2 \times 0,175 \times 723 + (0,175)^2 \times 4078 \right] = 0,31$$

Para $k=2$, q es 5, $x_{.jk}$ es 200, $a_{1jk} = \frac{8}{200} = 0,04$ y $a_{2jk} = \frac{71}{200} = 0,35$.
En el cuadro siguiente se determinan todos los restantes elementos de la fórmula (5):

Conceptos ¹	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^q$
x_{1jkl}^2	4	0	4	9	1	18
x_{2jkl}^2	100	225	36	400	400	1161
$x_{1jkl} x_{.jkl}$	64	0	96	99	42	301
$x_{2jkl} x_{.jkl}$	320	675	288	660	840	2783
$x_{.jkl}^2$	1024	2025	2304	1089	1764	8206

y por consiguiente

$$s_{1j2}^2 = \frac{5}{200} [18 - 2 \times 0,04 \times 301 + (0,04)^2 \times 8206] = 0,18$$

$$s_{2j2}^2 = \frac{5}{200} [1161 - 2 \times 0,35 \times 2783 + (0,35)^2 \times 8206] = 5,43$$

Finalmente, para $k=3$, resulta que $q=10$, $x_{.jk}=600$, $a_{1jk} = \frac{228}{600} = 0,38$ y $a_{2jk} = \frac{94}{600} = 0,157$. En el cuadro siguiente aparecen el resto de los cálculos:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_{l=1}^q$
x_{1jkl}^2	400	400	400	625	900	324	441	400	576	900	5366
x_{2jkl}^2	100	64	81	100	49	121	64	81	144	100	904
$x_{1jkl} x_{.jkl}$	1200	860	980	1500	2010	972	1176	1220	1536	2580	14034
$x_{2jkl} x_{.jkl}$	600	344	441	600	469	594	448	549	768	860	5673
$x_{.jkl}^2$	3600	1849	2401	3600	4489	2916	3136	3721	4096	7396	37204

y por consiguiente:

$$s_{1j3}^2 = \frac{10}{600} [5366 - 2 \times 0,38 \times 14034 + (0,38)^2 \times 37204] = 0,95$$

$$s_{2j3}^2 = \frac{10}{600} [904 - 2 \times 0,157 \times 5673 + (0,157)^2 \times 37204] = 0,88$$

Estamos en condiciones de determinar la afijación óptima de la estratificación. Aplicando la fórmula (8), y teniendo en cuenta que $a_{1j}=0,30$ y $a_{2j}=0,20$, resulta:

$$t_{j1} = t_j \frac{\sqrt{10^2 (0,35 \times 0,30 + 0,3 \times 0,20)}}{\sqrt{10^2 (0,35 \times 0,30 + 0,31 \times 0,20) + 5^2 (0,18 \times 0,30 + 5,43 \times 0,20)} + \sqrt{10^2 (0,95 \times 0,30 + 0,88 \times 0,20)}} = t_j 0,25$$

$$t_{j2} = t_j \frac{\sqrt{5^2(0,18 \times 0,30 + 5,43 \times 0,20)}}{\sqrt{10^2(0,35 \times 0,30 + 0,31 \times 0,20) + 5^2(0,18 \times 0,30 + 5,43 \times 0,20)}} + \sqrt{10^2(0,95 \times 0,30 + 0,88 \times 0,20)} = t_j 0,35$$

$$t_{j3} = t_j \frac{\sqrt{10^2(0,95 \times 0,30 + 0,88 \times 0,20)}}{\sqrt{10^2(0,35 \times 0,30 + 0,31 \times 0,20) + 5^2(0,18 \times 0,30 + 5,43 \times 0,20)} + \sqrt{10^2(0,95 \times 0,30 + 0,88 \times 0,20)}} = t_j 0,42$$

Si por ejemplo t_j se fijara en 12, es decir si se decidiese encues-
tar a 12 establecimientos de los 25 que existen en el subgrupo indus-
trial j , deberán seleccionarse al azar 3 del primer estrato, 4 del se-
gundo y 5 del tercero. Obsérvese que teniendo la población en el se-
gundo estrato la mitad de elementos que en el primer estrato, el tama-
ño de la muestra en el segundo estrato es mayor que en el primero.
Ello se debe al hecho que la dispersión en el segundo estrato es mayor
que en el primero.

Hay una nota aclaratoria final: No se ha usado la tercer fila de da-
tos del cuadro N°1 debido a que suponemos que representa el valor agre-
gado, y en consecuencia es linealmente dependiente de las producciones
totales y los restantes valores.

