

CURSO DE
MATEMATICAS PARA MUESTRISTAS

Prof. Ing. P. Dominguez

agosto diciembre 1955

CENTRO DE CAPACITACION TECNICA PARA
FUNCIONARIOS ESTADISTICOS

PROGRAMA DE MATEMATICAS PARA MUESTRISTAS

(Programa sintético)

Profesor: Ing. Pedro Domínguez

I) Elementos de Aritmética:

- 1.- Principios lógicos. Objeto y carácter de la Matemática. División de la misma. La aritmética.
- 2.- Números Naturales. Operaciones aritméticas. Leyes formales. Propiedades.
- 3.- Análisis Combinatorio simple. Arreglos. Permutaciones y combinaciones. Formación y cálculo de su número. Propiedades.
- 4.- Análisis Combinatorio con repetición. Variaciones. Permutaciones y combinaciones. Formación y cálculo de su número. Potencias de binomios y polinomios.
- 5.- Números fraccionarios. Operaciones. Leyes formales. Progressiones aritméticas y geométricas. Propiedades.
- 6.- Fracciones continuas. Desarrollo y propiedades.
- 7.- Determinantes. Determinantes de segundo y tercer orden. Transformaciones. Adjuntos. Producto.
- 8.- Números irracionales. Sucesiones monótonas, convergentes. Racionalización de denominadores. Cálculo de potencias de exponente racional. Logaritmos. Propiedades. Tablas. Series. Convergencia. Propiedades.

II) Elementos de Trigonometría:

- 1.- Funciones trigonométricas. Definiciones. Valores particulares. Signos.
- 2.- Fórmulas generales. Fórmulas de la suma, del doble arco y del arco medio. Identidades trigonométricas. Transformaciones de una suma en producto.
- 3.- Variaciones de las funciones trigonométricas.
- 4.- Números complejos. Definición. Representación. Operaciones. Fórmula de Moivre. Raíces. Aplicaciones.

III) Elementos de Algebra:

- 1.- Operaciones fundamentales. Su cálculo.
- 2.- Fracciones Algebraicas. Simplificación. Operaciones.
- 3.- Ecuaciones de primer grado, con una incógnita. Resolución Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché.
- 4.- Ecuaciones de segundo grado, con una incógnita, Resolución y discusión.
- 5.- Ecuaciones de tercer y cuarto grado.

IV) Cálculo infinitesimal y Geometría Analítica:

- 1.- Funciones y límites. Concepto de función. Límite de las funciones. Derivada de una función en un punto. Reglas de derivación de funciones elementales.
- 2.- Infinitésimo. Infinitos. Máximo y mínimo de funciones. Teorema de Rollé. Teorema del valor medio. Regla de L'Hopital.
- 3.- Fórmulas de Taylor y Mac Laurin. Restos.
- 4.- Integrales. Concepto de integral definida. Métodos de integración. Integrales impropias. Integrales de Euler.
- 5.- Tangente y normal. Curvatura de las curvas planas. Puntos notables.
- 6.- Aplicaciones de las integrales simples. Cuadratura de áreas planas. Rectificación. Área y volumen, de superficies de revolución.
- 7.- Ecuaciones diferenciales. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Ecuaciones a variables separables. Ecuaciones homogéneas. Ecuaciones lineales. Ecuaciones a coeficientes constantes. Ecuaciones diferenciales de segundo orden. Ecuaciones lineales a coeficientes constantes. Ecuaciones diversas.
- 8.- Función explícita de varias variables. Coordenadas cartesianas en el espacio. Coordenadas polares. Superficies de revolución. Derivadas parciales. Diferencial total. Fórmula de Taylor y Mac Laurin. Máximo y mínimo para funciones de dos variables.
- 9.- Integrales curvilíneas. Diferencial exacta. Fórmulas de Green.
- 10.- Polinomios trigonométricos. Series trigonométricas de Fourier. Integral de Dirichlet. Integral de Laplace. Integral de Gauss. Integral de Fourier. Inversiones.
- 11.- Diferencias finitas. Cálculo y fórmulas.

CENTRO DE CAPACITACION TECNICA PARA FUNCIONARIOS ESTADISTICOS

MATEMATICAS PARA MUESTRISTAS

Profesor: Ing. Pedro Domínguez

M.m.
1a. Conferencia
26-8-1955

Las presentes lecciones tienen por objeto suministrar los conocimientos necesarios para el desarrollo de los cursos de Estadística General y Teoría de las Muestras, razón por la cual su exposición no responde a un esquema detallado y lógico como el que se aprecia en todo tratado sobre esta asignatura, sino que su finalidad es la de servir de complemento y capacitar al alumno, mediante adecuados repasos de los conocimientos ya adquiridos, y agregado de otros nuevos que lo habiliten para seguir en los desarrollos de las asignaturas mencionadas.

Se procura que los conocimientos teóricos queden suficientemente cimentados, para lo cual se dan oportunas aplicaciones y ejercicios que en su solución fijen las nociones teóricas, así como, para los que desean ampliarlos, se da la bibliografía al finalizar cada capítulo.-

1. -INTRODUCCION

1.1.- PRINCIPIOS LOGICOS

Según el filósofo griego Aristóteles (384-322 a J.C), nuestro pensamiento se halla sometido a cuatro principios lógicos, en cuanto a las verdades primeras, que se imponen por su evidencia; ellos son:

- I) PRINCIPIO DE IDENTIDAD: por el cual se afirma que una cosa es igual a sí misma. Si esto no es admitido, toda deducción se hace imposible.
- II) PRINCIPIO DE CONTRADICCION: que afirma la imposibilidad que algo sea y no sea al mismo tiempo y bajo la misma relación.
- III) PRINCIPIO DE EXCLUSION DEL TERCER TERMINO: que especifica que de dos juicios contradictorios uno tiene que ser verdadero y el otro falso, sin decidir cual es el verdadero y cual es el falso. Este principio es muy útil pues permite efectuar las demostraciones por reducción al absurdo, que consiste en admitir como hipótesis lo contrario de lo que se quiere demostrar, para deducir de ella, admitida provisionalmente como cierta, una contradicción con las verdades ya demostradas o admitidas.
- IV) PRINCIPIO DE RAZON SUFICIENTE: que expresa que nada hay sin razón suficiente. También se lo designa con principio de inteligibilidad universal.

Estos son los cuatro principios clásicos admitidos como preexistentes a la Matemática y que rigen a todo razonamiento lógico. La Ciencia Moderna agrega otros, tales como:

- V) PRINCIPIO DE EMPIRISMO que afirma que todo nuestro conocimiento proviene de la experiencia. Previsto por el filósofo español Raimundo Lulio (1235-1315) y el filósofo inglés Roger Bacon (1214-1292) es formulado definitivamente por el filósofo inglés John Locke (1631-1704).
- VI) PRINCIPIO DEL CRITICISMO IDEALISTA explica que nuestro conocimiento se funda en formas a priori no pudiendo ser explicado ni por el puro empirismo ni por el racionalismo dogmático. Su creador fué el filósofo alemán Immanuel Kant (1724-1804).
- VII) PRINCIPIO DE TRANSITIVIDAD O IDENTIDAD COMPARADA que expresa que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
- VIII) PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD que afirma si se completan las hipótesis cuyas tesis se excluyen, todos los teoremas recíprocos son ciertos. Es debido a Karl Friedrich Hauber (1775-1856) que se utiliza para establecer una condición necesaria y suficiente.
- IX) PRINCIPIO DE ORIENTACION PRAGMATICA: expresa que los principios científicos son solo convenios, según lo expresa el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912). En este mismo sentido contribuye Ernst Mach (1838-1916, austriaco) al expresar que el objeto de la ciencia es la economía del pensamiento y Albert Einstein (1878-1955, alemán) al decir que el espacio y el tiempo absolutos no tienen sentido.

1.2.- OBJETO Y CARACTER DE LA MATEMATICA

Cada vez que se inicia el estudio de una ciencia, que se asienta sobre principios lógicos, es necesario emplear palabras, que a su vez deben ser definidas. En este sentido, la dificultad es grande, si se quiere dar una definición de la Matemática, la más antigua de las ciencias cultivada por el hombre. Todas las que se dan, necesariamente son defectuosas, pues las ideas sobre las que se apoyan no se prestan a definiciones.

A pesar de ello, el hombre siente la necesidad de explicarse, desde el comienzo, de lo que va a tratar, razón por la cual deben admitirse conocimientos previos de orden, magnitud, forma, etc.; hecho esto, diremos que: La Matemática es la Ciencia de la Magnitud y del Orden o del número y la forma, o del orden y la medida o la ciencia de los conjuntos.

Es la ciencia de la verdad absoluta que la diferencia de las verdades relativas de las ciencias físicas y naturales, sometidas a continua revisión y ajuste. Nadie pone en tela de juicio ni extraña la perpetua movilidad de la física, la química y la biología, ciencias que van adquiriendo cuerpo por aproximaciones sucesivas y tendiendo hacia la verdad. Sin embargo cualquiera se asombraría de lo que expresó el filósofo Bertrand A.W. Russell (1872.. inglés); "La matemática es una ciencia en la cual nunca sabemos de que hablamos, ni si lo que decimos es cierto". Al ser las deducciones matemáticas un producto exclusivo del pensamiento humano, queda de hecho descartada la duda. Sus conclusiones se admiten como verdaderas por que no son contradictorias; he ahí el prestigio de la matemática; sus proposiciones son absolutamente ciertas.

Esta ciencia llamada exacta, sin embargo tiene un origen experimental, que por sucesivas abstracciones ha sido olvidado. Las nociones que utiliza son conceptos empíricos, sin ningún contenido intuitivo, que solo tienen vida en el pensamiento puro y

y cuyo contenido físico es llenado por las ciencias naturales que los aplican.

Para el matemático un ente idealizado existe cuando no es contradictorio, no cuando es intuitivo; siendo las premisas que de ellos se deducen, compatibles entre sí. Esta es la causa por la cual se haya llegado a considerar a la matemática como una rama de la Lógica.

1.3.- DIVISION DE LA MATEMATICA

Si es difícil definir la matemática no lo es menos de verla. Pudo hacerse hasta el siglo XVII pues hasta esa época la aritmética, el álgebra, la geometría y la trigonometría eran cuerpos de doctrina sin relaciones entre sí. A partir de René Descartes, filósofo y matemático francés (1596-1650) se derrumban las murallas que aislaban a cada uno de estos compartimentos estancos y se producen compensaciones recíprocas que borran todos los límites. La creación de la geometría analítica al intercomunicar el álgebra con la geometría métrica, demostró que la matemática es una ciencia única, cuyas ramas se entrelazan entre sí de modo que múltiples problemas de una de ellas son resueltos mucho más fácilmente, con un ahorro de energías, con los recursos de las otras.

Sin embargo por razones didácticas, se suele dividir a la matemática en dos grandes grupos que se apoyan respectivamente en los conceptos de tiempo y espacio. El primer grupo lo forma

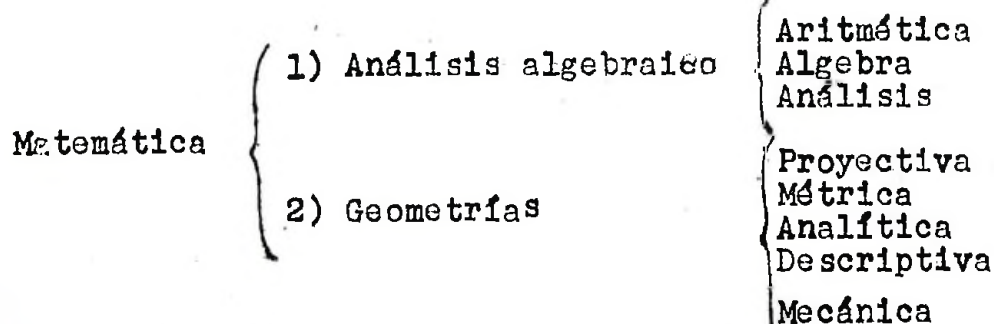
- a) la Aritmética que estudia las propiedades de los números.
- b) el Álgebra que estudia las ecuaciones.
- c) el análisis, que estudia las correspondencias entre las variables.

Estas tres ramas se hallan incluidas en el Análisis Algebraico, ciencia que se edifica sobre el concepto de número.

El segundo grupo lo forman las distintas geometrías: métrica, analítica, proyectiva, descriptiva, infinitesimal, etc, que estudian las propiedades de las figuras. Dentro de este grupo se suele incluir a la mecánica, que estudia el movimiento realizado en el espacio y en el tiempo.

Resumiendo:

- 1) El pensamiento es regido por principios lógicos.
- 2) Todas las definiciones de la matemática son defectuosas.
- 3) La matemática se considera ciencia exacta.
- 4) Sus entes son creaciones idealizadas del pensamiento, y existen por cuanto no son contradictorios.
- 5) División:



2.1.- INTRODUCCION

Llámanse análisis matemático a la ciencia edificada sobre el concepto de número. Se lo divide en algebraico y trascendente.

El análisis algebraico estudia las operaciones con los números y los diversos algoritmos que se obtienen al combinarlos.

El análisis trascendente estudia las funciones de variables reales y complejas, continuas y discontinuas, analíticas y no analíticas, algebraicas, implícitas y trascendentes.

El desarrollo de las distintas cuestiones que comprende el análisis algebraico, origina las siguientes ramas de la matemática: la Aritmética, la Teoría de los Números, la Combinatoria, el Algebra, etc. La aritmética es la parte más abstracta del análisis algebraico; se desarrolló inicialmente partiendo del número natural, prescindiendo de todas las propiedades físicas, químicas, geométricas, de los objetos de la vida real, y por sucesivas ampliaciones crea nuevos entes numéricos, llegando a generalizar el concepto de número.

Toda combinación de operaciones llevada a cabo con los números, da origen a un nuevo número, tal combinación se llama algoritmo, palabra derivada de Muhamed ibn Musa Alchwarizmi (siglo IX d.J.C.) matemático árabe, autor del Al-dscher walmukabala, de donde se origina la palabra Algebra al ser traducida su obra al latín.

La construcción lógica de la Aritmética es obra de Augustin Louis Cauchy (1789-1857, francés) que la llamó Análisis Matemático, cuya aritmetización fue comenzada por Karl Wilhem Theodor Weierstrass (1815-1897, alemán) a partir del concepto de número entero.

2.2.- DESARROLLO DEL CONCEPTO DE NUMERO

La mente humana ha llegado a la creación del concepto de número natural y de número entero en una edad realmente remota, a varios milenios de nuestra Era. El conocimiento de los números fraccionarios era patrimonio de los egipcios que ya los trataban en su manual de cálculo, conocido con el nombre de Papiro Rhind, del escriba Ahmes, entre 2000 y 1600 años antes de J.C.; pero el primero en estudiar a estos números, desde el punto de vista abstracto es Diofanto de Alejandría, al final del siglo III después de J.C.-

Se debe a Pitágoras (580-501 a. J.C.) el descubrimiento de los números irracionales y guardado por su escuela pitagórica y sus continuadores hasta que aparece en el libro V de los Elementos de Euclides (alrededor del año 300 a. J.C.) que en sustancia, es un tratado de Aritmética.

El concepto de número real recién aparece claramente con Isaac Newton (1642-1727).

Los números complejos fueron introducidos por Raffaele Bombelli, alrededor de 1578 d.J.C. y su interpretación geométrica se debe a C. Wessel (1745-1818) y a C.F. Gauss (1777-1855) y en forma independiente de estos dos volvió hallarla J.R. Argand (1768-1822).

La invención y estudio de los números complejos de más de dos Unidades, se debió a W.R. Hamilton (1805-1865), creador de los cuaternios, y a H. Grassmann (1809-1877).

A Karl Weierstrass (1815-1897) se debe la demostración del teorema final de la Aritmética, en el año 1863, y a Georg Frobenius (1849-1917) la demostración de que después de los números complejos ordinarios y cuaternos no es posible crear nuevos números, que cumplan determinadas condiciones impuestas a la ampliación del campo numérico.

2.3.- NUMEROS NATURALES

El concepto de número natural se obtiene del estudio de la coordinabilidad de conjuntos. Llamaremos conjunto a una pluralidad de terminada, cada uno de cuyos en'es u objetos es un elemento de aquel.

Dados dos conjuntos, decimos que existe una correspondencia entre ellos cuando se ha establecido un convenio o ley cualquiera de modo que quedan determinados uno o varios elementos de uno de los conjuntos una vez fijado un elemento del otro.

Así por ejemplo, cada familia, cada clase, es un conjunto de objetos o personas.-

La correspondencia es unívoca si a un elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo y es plurívoca en caso contrario.

La correspondencia entre hijos y madres es unívoca porque cada hijo tiene una sola madre, y en cambio es plurívoca la correspondencia inversa madres-hijos.-

Los conjuntos pueden ser: ordenados, dándose para ello criterios de ordenación; finitos e infinitos.

Si cada elemento de un conjunto se corresponde con uno y sólo uno del otro conjunto, y recíprocamente, la correspondencia se llama bimívoca; por ejemplo, en los pueblos monógamos entre sus individuos existe una correspondencia bimívoca.

Dos conjuntos son coordinables cuando entre sus elementos se puede establecer una correspondencia bimívoca

Ejemplo:

$$M \ni A, B, C, D, E$$

$$P \ni X, Y, Z, V, W$$

son coordinables, pues a cada elemento de uno se le puede asociar un homólogo del otro. Esta propiedad de coordinación se la indica así:

M. P

El estudio de las propiedades de la coordinación de conjuntos conduce al concepto de número cardinal de un conjunto que es el ente abstracto que representa todos los conjuntos coordinables entre sí y los distingue de los no coordinables; esta es una definición abstracta que caracteriza a un ente definido por una propiedad común con otros y se la utiliza para los conceptos fundamentales de una Ciencia.

El número que representa a los conjuntos nulos o que tienen elementos, se llama cero.

El conjunto de los números cardinales, incluyendo el cero, se llama campo de los números naturales.

2.3.1.- OPERACIONES FUNDAMENTALES

Dos son las clases de operaciones: Directas e inversas. Si a, b y c son tres números naturales y son dados a y b y se pide c, se ha hecho una operación directa y si en cambio, son dados a y c; la operación que permite obtener b, es inversa de la anterior. Las operaciones directas son : multiplicación y adición y las inversas : división y sustracción.

2.3.1.1.- PRODUCTO DE DOS NUMEROS

Producto de dos números, a y b, es el número de pares que se pueden formar componiendo de todos los modos posibles cada elemento de un conjunto de a objetos, con cada elemento de un conjunto de b objetos.

Los números a y b se llaman factores del producto; a es multiplicando y b es el multiplicador.

Notación: El producto a por b se designará así: a x b o bien a.b o simplemente ab.- Ejemplo: $4 \times 5 = 4.5$, pero no en cambio $4 \times 5 = 45$ pues daría lugar a confusión.

2.3.1.2.- LEYES FORMALES DE LA MULTIPLICACION

- I) Propiedad uniforme: multiplicando miembro a miembro dos igualdades, resulta una igualdad.
Si $a = b$ y $m = n$
es $a.m = b.n$
- II) Propiedad conmutativa: El orden de los factores no altera el producto.
 $a.m = m.a$
- III) Propiedad asociativa: En un producto se pueden sustituir varios factores por su producto efectuado.
 $(ab) c = a (bc) = a (bc)$

2.3.1.3.- MODULO DE LA MULTIPLICACION

El número 1 es el único que multiplicado por cualquier otro da como resultado éste mismo.
 $a.1 = a$

Uno es el módulo de la multiplicación.

2.3.1.4.- POTENCIAS Y MONOMIOS

Si en el producto a.b.c.d.---h, de n factores, todos son iguales al primero, se obtiene:
a.b.c.d.---h = a.a.a.a---a = a^n
n factores n factores

Al número a se lo designa como base y n es el exponente.

Convendremos siempre que cualquier número elevado a la potencia cero es igual a la unidad, es decir:

$$a^0 = 1$$

Definición: Se llama monomio o expresión monomial a la expresión compuesta con varios números mediante la operación única de multiplicar. El factor numérico de la expresión monomial se llama coeficiente.

Ejemplo:

$$11 a^2 b^3 c^{10}$$

es un monomio de coeficiente 11.- Se llama grado del monomio al número total de factores literales que contiene. En el caso anterior el monomio es de grado 15.

2.3.1.5.- SIMBOLO II

Cuando los factores de un producto son números que se deducen de una expresión única, en la cual figura un número indeterminado i, dando a éste valores sucesivos, se representa el producto brevemente utilizando el signo pi (letra mayúscula del alfabeto griego equivalente a la P castellana) y se lee producto de, antepuesto a dicha expresión y escribiendo arriba y abajo de ese signo los valores extremos que adopta i. Ejemplo:

$$\prod_{i=1}^7 i^3 = 1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 \cdot 6^3 \cdot 7^3$$

$$\prod_{h=3}^6 2h = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 6) = 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$$

$$\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$$

este último ejemplo representa el producto de los n primeros números naturales.

e) Factorial de n.

El producto de los n primeros números naturales, se designa factorial de n y se presenta con mucha frecuencia en los cálculos, sobretodo en Análisis Combinatorio, como veremos más adelante. Por esa razón se lo designa con una notación especial: n o bien n! que se lee: factorial de n, es decir, que

$$\prod_{k=1}^n k = n!$$

Así:

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5.040$$

$$20! = 243.290 \times 10^{13}$$

$$75! = 248.001 \times 10^{102}$$

$$100! = 933.262 \times 10^{152}$$

mentan extraordinariamente ya a partir de los diez primeros números naturales, se han construido tablas, de las cuales se han extraído los tres últimos resultados.

2.3.1.6.- SUMA DE NUMEROS

Definición: Se llama suma o agregado de varios conjuntos, que no tienen ningún objeto común, al conjunto formado por todos los objetos de esos conjuntos y solo de ellos.

La operación de sumar se llama adición y cada uno de los números se llama sumando
 $a + b + c + \dots + \ell = s$

2.3.1.7.- LEYES FORMALES DE LA ADICION

I) Propiedad uniforme: Sumando miembro a miembro varias igualdades, se obtiene otra igualdad

Si $a = a'; b = b'; c = c'; \dots; \ell = \ell'$
 es

$$a + b + c + \dots + \ell = a' + b' + c' + \dots + \ell'$$

II) Propiedad conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma
 Será, por ejemplo:

$$a + b + c + d = d + a + b + c = b + c + a + d = \dots = d + c + b + a$$

$$3 + 5 + 7 + 2 = 2 + 3 + 5 + 7 = 5 + 7 + 3 + 2 = \dots = 2 + 7 + 5 + 3$$

III) Propiedad asociativa: En una suma, se pueden sustituir varios sumandos por su suma efectuada. Por ejemplo:

$$a + b + c + d + e + f = (a + d) + (b + f) + e + c = d + (a + c) + e + (f + b) = \text{etc.}$$

$$2 + 5 + 8 + 3 + 6 + 9 = (2 + 3) + (5 + 9) + 6 + 8 = 9 + (2 + 8) + 6 + (3 + 5) = \text{etc.}$$

IV) Propiedad distributiva: El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando por éste cada sumando.

Vale decir que:

$$(a + b + c + \dots + \ell) \cdot m = am + bm + cm + \dots + \ell m$$

$$(3 + 7 + 9) \times 5 = 3 \times 5 + 7 \times 5 + 9 \times 5$$

2.3.1.8.- MODULO DE LA ADICION

Módulo de la adición: El número 0, cuya suma con otro no lo altera, se llama módulo.

Es decir:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$3 + 0 = 0 + 3 = 3$$

El cero es el único número que sumado a cualquier otro da una suma igual a éste.

2.3.1.9.- EL SIMBOLO Σ

Cuando los diversos sumandos de una suma se deducen de una misma expresión, dando valores sucesivos a un número indeterminado que en ella figura, se representa abreviadamente esa operación escribiendo delante del mismo, el símbolo de sumación sigma (letra mayúscula del alfabeto griego equivalente a la S del castellano) y escri-

biendo arriba y abajo de ese signo los valores primero y último que toma ese número indeterminado.
Así por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{10} n^2$$

indica la suma de los cuadrados de los diez primeros números naturales, es decir:

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

Otro ejemplo:

$$\sum_{l=5}^9 2l = 10 + 12 + 14 + 16 + 18$$

indica la suma de los cinco primeros números pares que siguen a 8.

Otro ejemplo:

$$\sum_{m=1}^{3,4} a^m \cdot b^n = ab^2 + ab^3 + ab^4 + a^2b^2 + a^2b^3 + a^2b^4 + a^3b^2 + a^3b^3 + a^3b^4$$

2.3.1.10.- MULTIPLICACION COMO CASO PARTICULAR DE LA SUMA

La multiplicación es un caso particular de la suma de varios sumandos, en efecto, por definición de suma, se puede escribir que:

$$a \cdot n = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ sumandos}}$$

es decir, el producto de a por n es igual a la suma de n sumandos iguales a a.

2.3.1.11.- PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Las propiedades de la suma, permiten reducir a una potencia única el producto de varias potencias de la misma base. En efecto:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p \dots a^r = \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{m \text{ factores}} \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{n \text{ factores}}$$

$$\cdot \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{p \text{ factores}} \dots \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{r \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{m+n+p+\dots+r \text{ factores}} = a^{m+n+p+\dots+r}$$

que permite decir:

I) El producto de varias potencias de la misma base es otra potencia de esa base, cuyo exponente es la suma de los exponentes dados.

En particular, si todos los exponentes son iguales, es decir:

$$m = n = p = \dots = r = \alpha$$

será

$$\underbrace{a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdot \dots \cdot a^r}_{\beta \text{ factores}} = \underbrace{a^\alpha \cdot a^\alpha \cdot a^\alpha \cdot \dots \cdot a^\alpha}_{\beta \text{ factores}} = (a^\alpha)^\beta$$

y teniendo en cuenta la propiedad anterior, es:

$$(a^\alpha)^\beta = \underbrace{a^\alpha \cdot a^\alpha \cdot a^\alpha \cdot \dots \cdot a^\alpha}_{\beta \text{ factores}} = a^{\overbrace{\alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha}^\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}$$

II) Potencia de una potencia es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es el producto de los exponentes dados.

Ejemplos: I) $x^3 \cdot x^{10} \cdot x^5 = x^{3+10+5} = x^{18}$

II) $(x^3)^5 = x^{3 \cdot 5} = x^{15}$

2.3.1.12.- OPERACIONES INVERSAS

I) Sustracción

1.- Definición: Dados los números naturales a y b, tal que $a > b$, se llama diferencia del primero por el segundo, a un tercer número c tal que sumado al b de por resultado el a:

$$a - b = c \quad \text{si} \quad c + b = a \quad \text{Se llama:}$$

- a = minuendo
- b = sustraendo
- c = diferencia

2.- Paréntesis: Se introduce en los cálculos el paréntesis como un vínculo para indicar que se someten determinados datos a nuevas operaciones. Así

$$[a \cdot (b + c) \cdot d] + [(m+n) - p]$$

indica que en el primer corchete debe efectuarse previamente $(b+c)$ para luego efectuar el producto de a por $(b+c)$ como un solo número. Lo mismo en el segundo corchete.

3.- Polinomios: Cuando una expresión aparece solamente compuesta por adiciones y sustracciones de números, se llama polinomio

o forma polinómica, que puede ser binomio, trinomio, etc. según que conste de 2,3 etc. términos componentes.

Así, con los números:

$3x^3$; $5x^2$; $7x^4$ puede formarse el siguiente trinomio;

$$3x^3 + 5x^2 + 7x^4$$

Se llama grado de un polinomio al mayor de los grados de sus términos.

Ejemplo

$6x^2xyz^2 - 2z^3z^5 + 9z^3 - 3xyz$ es un polinomio de 8º grado.

II) División:

- 1.- Definición: Dados dos números naturales a y b , tal que a sea múltiplo de b y $b \neq 0$, se llama cociente exacto de a por b a un tercer número natural c , que multiplicado por b de por resultado a .

En símbolos

$$a : b = c \text{ siempre que } c \cdot b = a$$

a = dividendo.

b = divisor.

c = cociente exacto.

Si $b = 0$ la división no tiene sentido.

- 2.- Propiedad fundamental: El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente.

- 3.- Definición: Si a no es múltiplo de b , se llama división entera de a por b a un tercer número c tal que su producto por b sea menor o igual que a .

En símbolos: $a : b = c$ si $cb \leq a$

- 4) Resto: A la diferencia del dividendo menos el producto del divisor por el cociente se llama resto. Así:

$$r = a - bc$$

Si $r = 0$ la división es exacta.

- 5) Propiedad fundamental: El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resto:

$$a = bc + r$$

Ejemplo: Si $17 : 5 = 3$ $r = 17 - 5 \times 3 = 2$ es $17 = 5 \times 3 + 2$

III) Potencia:

- 1)
- Definición:
- La potenciación como caso particular de la multiplicación:

$$a^m = \underbrace{a, a, a, \dots a}_{m \text{ factores}}$$

La potencia mésima de un número a es igual al producto de m factores iguales a a,

a = base.

m = exponente.

Ejemplo:

$$3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ factores}} = 81$$

2) Propiedades:

- a)
- Producto de potencias de igual base:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

$$2^3 \cdot 2^4 \cdot 2 = 2^{3+4+1} = 2^8$$

- b)
- Cociente de potencias de igual base:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \frac{4^7}{4^3} = 4^{7-3} = 4^4$$

- c)
- Potencia de una potencia:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$$

IV) Operaciones inversas de la potenciación.1.- Radicación.

- a)
- Definición:
- La raíz
- m
- ésima exacta de un número natural
- a
- es otro número natural
- b
- , tal que la potencia
- m
- ésima de
- b
- es igual a
- a
- . En símbolos.

$$\sqrt[m]{a} = b \quad \text{si } b^m = a$$

a = radicando o subradical.

b = raíz.

$\sqrt{}$ = radical.

m = índice.

$$\sqrt[3]{64-4}$$

pues $4^3 = 64$

b) Propiedades

Raíz enésima de un producto

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$$

$$\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 8 \cdot 2 = 80$$

Raíz enésima de un cociente

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt[m]{64}}{\sqrt[m]{16}} = \frac{8}{4} = 2$$

Raíz de una raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{25}} = \sqrt[3 \cdot 2]{25} = \sqrt[6]{25}$$

2) Logaritmación

- a) Definición : Se llama logaritmo de un número positivo β , en base $\alpha > 0$ y distinta de 1 , al exponente con que hay que elevar la base α para obtener el número β . En símbolos:

$$\log_{\alpha} \beta = \lambda \quad \text{si es } \alpha^{\lambda} = \beta$$

Ejemplo:

$$\log_3 81 = 4 \quad \text{pues } 3^4 = 81$$

- b) Propiedades

Logaritmo de un producto

$$\log_{\alpha} (\beta \cdot \gamma) = \log_{\alpha} \beta + \log_{\alpha} \gamma$$

$$\log_2 (4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

Logaritmo de un cociente

$$\log_{\alpha} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) = \log_{\alpha} \beta - \log_{\alpha} \gamma$$

$$\log_3 \left(\frac{81}{9} \right) = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$$

Logaritmo de una potencia

$$\log_{\alpha} \beta^{\gamma} = \gamma \cdot \log_{\alpha} \beta$$

$$\log_3 81^9 = 9 \times \log_3 81 = 9 \times 4 = 36$$

Logaritmo de una raíz

$$\log_{\alpha} \sqrt[\gamma]{\beta} = \frac{1}{\gamma} \cdot \log_{\alpha} \beta$$

$$\log_2 \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3} \times \log_2 64 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

Bibliografía:

- 1) Julio Rey Pastor : "Elementos de Análisis Algebraico". Madrid 1930.
- 2) T. Danzing : "El Número". Ed. Librería del Colegio, Buenos Aires .
1950
- 3) Francisco Vera: "Conceptos de Aritmética Moderna" Ed. Instituto Gráfico - Bogotá - Colombia - 1943
- 4) A.N. Whitehead : "Introducción a las Matemáticas" Ed. Emecé. Buenos Aires.- 1944
- 5) Michele Cipolla : "La Matematica Elementare" Ed. Luigi Macri-
Firenze - Bari -
- 6) Duilio Gigli : "Aritmética General" Enciclopedia delle Matematiche Elementari- Ed. U. Hoepli - Milán - 1930 - Vol. I - part. I.-

ANALISIS COMBINATORIO

3.- ANALISIS COMBINATORIO SIMPLE

3.1.- INTRODUCCION

Se tienen noticias de que los primeros conocimientos de combinatoria lo tenían los chinos. Los griegos no prestaron a este asunto mayor atención y pasó casi inadvertido para ellos. Recién, alrededor del año 510, después de Cristo, el matemático latino Boethius nos da el número de permutaciones de n objetos

Alrededor de 1150, el matemático hindú Bhaskara da las reglas para hallar el número de permutaciones con n objetos, sin repetición de algunos de ellos. Así como también la que permite hallar el número de combinaciones. Alrededor de 1140, el matemático hebreo Rabbi ben Ezra, estudiando las posibles conjunciones de los planetas conocidos por él, en número de 7, aplica la regla general para hallar el número de combinaciones. En 1321, otro matemático hebreo Levi ben Gerson publica también las reglas generales para el cálculo del número de permutaciones y combinaciones.

Una moderna aplicación de las reglas de las combinaciones para el juego de dados fué dada en 1523 por Nicolás Tartaglia, (1500-1557) notable matemático italiano que fué el primero que resolvió la ecuación cúbica. Buteo en 1559 estudió el número de combinaciones posibles que se obtienen arrojando cuatro dados. A partir de estas fechas el estudio de la combinatoria adquiere mayor incremento pasando a ser una de las ramas mas interesantes del Análisis Algebraico, con importantes aplicaciones en el Cálculo de probabilidades y en la Estadística.

En realidad el origen de esta rama del Análisis se remonta al siglo XVII, y se la halla en la obra de B. Pascal: "Traité du Triangle Arithmétique", escrita en 1654 y en la G.W. Leibniz: "Dissertatio de Arte Combinatoria", Leipzig 1666, al cual se le debe la denominación de "Ars combinatoria". Se desarrolla en las obras de J. Wallis: "Treatise of Algebra", Londres, 1685; B. Frénicle De Bessy, "Abrégé des Combinaisons", París 1693, y sobre todo se la sistematiza en las obras de J. Bernouilli: "Ars conjectandi", Basilea 1713 y de A. de Moivre: "Doctrine of Chances", Londres 1718.

3.2.- ARREGLOS, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

El Cálculo Combinatorio tiene por objeto el estudio de las propiedades de los diversos agrupamientos que se pueden formar con un número finito de elementos dados, de cualquier naturaleza y en base a leyes prefijadas. En particular se propone la búsqueda de reglas que permitan formar todos estos agrupamientos y calcular su número.

Los agrupamientos más importantes que se pueden formar son: las permutaciones, los arreglos y las combinaciones.

17

Dados m elementos, ya sean objetos, números o individuos de cualquier naturaleza, distintos entre sí, tomemos un conjunto $n \leq m$ de dichos objetos. Tal conjunto, puede ser considerado bajo dos formas distintas, a saber:

- a) teniendo en cuenta el orden de estos elementos,
- b) no teniendo en cuenta el orden;

de modo, que dos conjuntos que tengan el mismo número n de elementos se considerarán distintos si:

- a) dos elementos iguales no ocupan el mismo lugar en los dos conjuntos.
- b) dos elementos no son iguales en ambos conjuntos.

Por ejemplo: si los m elementos dados son:

$a, b, c, d, \dots, n$

y tomamos un conjunto de 3 elementos de éstos ($n = 3$), tal como el acd, cuando se prescinde del orden, los conjuntos

$acd; adc; cad; dca; \text{etc.}$

son todos iguales, mientras que tales conjuntos son distintos cuando se los considera ordenados.

Cuando un conjunto n de los m objetos dados se lo considera ordenado, se tiene un arreglo de m elementos tomados de n en n ; en tanto que si del conjunto se abstrae el orden, se tiene una combinación de m elementos tomados de n en n .

Cuando $n = m$ hay una sola combinación, mientras que los arreglos de m objetos tomados todos ellos a la vez se obtienen ordenando de todas las maneras posibles a esos m objetos. Estos arreglos especiales se llaman permutaciones de m elementos.

3.3.- ARREGLOS, DISPOSICIONES O COORDINACIONES

Definición:

Arreglos, disposiciones o coordinaciones de m objetos distintos, tomados de n en n a la vez ($n \leq m$) son todos los posibles grupos de n objetos tomados entre los m dados, de modo tal, que dos de ellos se diferencian o bien por el orden de los objetos o bien por la naturaleza de los mismos.

Ejemplo: Dados 3 objetos

$a, b \text{ y } c$

los arreglos de esos tres objetos, tomados de 1 en 1 son

$a - b - c$

y se los indica así $A \frac{1}{3} = 3$

Los arreglos de 2 en 2 son:

$ab; ba; ca$

$ac; bc; cb$

y se los indica: $A_3^2 = 6$

y finalmente, los arreglos de 3 en 3 son:

abc; bac; cab
acb; bca; cba

luego

$$A_3^3 = 6$$

3.3.1.- CALCULO DEL NUMERO DE ARREGLOS

Dados m objetos, todos distintos:

a, b, c,h, l

el número de arreglos, tomándolos de 1 en 1 a la vez es

$$A_m^1 = m$$

Para formar los arreglos de esos mismos objetos tomándolos de 2 en 2, bastará colocar a la derecha de cada A_m^1 , cada uno de los objetos que faltan, es decir los restantes $(m-1)$ objetos, y tendremos así,

ab	ac		ah	al
ba	bc		bh	bl
ca	cb		ch	cl
.....				
ha	hb		hl	
la	lb		lh	

obtendríamos tantas hileras horizontales como objetos hay, es decir m y en cada hilera habrá $(m-1)$ arreglos, El número total será $m(m-1)$:

$$A_m^2 = m(m-1)$$

Para formar los arreglos de m objetos, tomándolos de 3 en 3 agregariamos a cada A_m^2 anterior, a su derecha, cada uno de los $(m-2)$ objetos restantes, obteniendo el cuadro siguiente:

abc		abh	abl
acb		ach	acl
.....			
.....			
eha	ehb	ehc	

y obtendríamos así tantas hileras horizontales como arreglos teníamos antes, o sea, $m(m-1)$ hileras, cada una de las cuales contiene $(m-2)$ arreglos.

De modo que

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2)$$

Analogamente

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

y observando que el sustraendo del último factor es inferior en una unidad al orden del arreglo correspondiente, deducimos que;

$$A \frac{n}{m} = m(m-1)(m-2) \dots \dots \dots (m-(n-1))$$

o sea

$$A \frac{n}{m} = m(m-1)(m-2) \dots \dots \dots (m-n+1)$$

es decir que:

El número de arreglos de m objetos tomados de n en n, es igual al producto de n factores consecutivos decrecientes, a partir de m.

Ejemplos:

I) Tres viajeros llegan a un pueblo donde solo hay 4 hoteles. De cuántas maneras pueden ocupar sus cuartos, debiendo estar cada uno en un hotel diferente?

El primer viajero puede elegir uno de los cuatro hoteles y cuando ha seleccionado su hotel, al segundo viajero le quedan solo 3 hoteles para elegir, y por consiguiente los dos primeros viajeros pueden elegir su comodidad de 4x3 maneras.

El tercer viajero puede escoger su hotel de dos maneras. El número pedido de manera será

$$A \frac{3}{4} = 4, 3, 2 = \underline{24 \text{ maneras.}}$$

II) Cuantos números diferentes de seis cifras pueden formarse con los nueve dígitos, 1, 2, 3,9?

El número de objetos distintos es 9 que se tomarán de 6 a la vez. La cantidad pedida es:

$$A \frac{6}{9} = 9, 8, 7, 6, 5, 4 = \underline{60.480}$$

3.4.- PERMUTACIONES

Son los arreglos de m objetos tomándolos todos a la vez, y su número se representa por P_m ; es decir, que:

$$P_m = A \frac{m}{m}$$

luego

$$P_m = m(m-1)(m-2) \dots \dots \dots (m-m+1)$$

o sea

$$P_m = m(m-1)(m-2) \dots \dots \dots 1$$

o bien

$$P_m = m!$$

El número de permutaciones de m objetos es igual al factorial de m.

Para expresar el producto de los m primeros números naturales se usa el símbolo $\pi(m)$ introducido por C.F. Gauss en 1811, pero es corriente la notación $m!$ debida a Chr. Kramp que la utilizó en su "Arithmetique universelle ou L'Algebre", Colonia 1808.

Los matemáticos ingleses utilizan esta otra: m , y ambas se leen factorial de m , vocablo introducido por L.F. Arbogast en su obra: "Du calcul des derivations", Strassburgo, 1800.

Ejemplos:

I) Cuantas permutaciones podrán formarse con la palabra ómnibus?

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5.040$$

II) De cuántas maneras distintas pueden sentarse 5 comensales alrededor de una mesa.

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

3.5.- COMBINACIONES

Se llaman combinaciones de m objetos, tomados de n en n los diferentes grupos que pueden formarse con ellos, tomando n objetos cada vez, sin repetir ningún objeto en un mismo grupo, y de manera que cada uno de éstos se diferencie de los restantes por lo menos en un objeto.

Considerando el cuadro de los A_m^2 obtenido anteriormente:

ab	ac		ah	al
ba	bc		bh	bl
ca	cb		ch	cl
.....				
.....				
ha	hb		hl	
la	lb		lh	

se observa que dos arreglos tales como ab y ba ; ac y ca ;; hl y lh no son combinaciones distintas ya que entran los mismos objetos y para serlo, deben diferenciarse por lo menos en un objeto ya que el simple cambio de orden de los objetos no origina combinaciones diferentes.

Designando con C_m^n a las combinaciones de m objetos tomados de n en n , el cuadro anterior nos dice que si tuviéramos formadas las C_m^n y permutamos de todas las maneras posibles los n objetos de cada grupo, el conjunto de todos los grupos obtenidos son los arreglos de m objetos tomados de n en n , es decir que:

$$A_m^n = C_m^n \times P_n$$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{n!}$$

Multiplicando, numerados y denominador del segundo miembro por $(m-n)!$ se obtiene:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)!}{n! (m-n)!}$$

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)(m-n-1) \dots 3.2.1}{(m-n)! n!}$$

es decir:

$$C_m^n = \frac{n!}{(m-n)! n!}$$

Ejemplos:

1) Si tenemos 12 libros de cuántas maneras puede hacerse una selección de 5, cuando un libro determinado se incluye siempre y cuando un libro determinado se excluye siempre?

a) Cuando un libro se incluye solo se pueden escoger 4 de los 11 libros restantes

$$C_{11}^4 = \frac{11!}{(11-4)! 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_{11}^4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330 \text{ maneras}$$

b) Cuando un libro se excluye siempre, tenemos que elegir 5 libros entre los 11 restantes.

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)! 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_{11}^5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462 \text{ maneras}$$

3.6. COMBINACIONES COMPLEMENTARIAS

El número de combinaciones de n elementos tomados de n en n es igual al número de combinaciones de esos mismos elementos tomados de $(m-n)$ en $(m-n)$.

C_m^n y C_m^{m-n} son combinaciones complementarias. Se debe de mostrar que:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

Multiplicando, numerados y denominador del segundo miembro por $(m-n)!$ se obtiene:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)!}{n! (m-n)!}$$

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)(m-n-1) \dots 3.2.1}{(m-n)! n!}$$

es decir:

$$C_m^n = \frac{n!}{(m-n)! n!}$$

Ejemplos:

1) Si tenemos 12 libros de cuántas maneras puede hacerse una selección de 5, cuando un libro determinado se incluye siempre y cuando un libro determinado se excluye siempre?

a) Cuando un libro se incluye solo se pueden escoger 4 de los 11 libros restantes

$$\therefore C_{11}^4 = \frac{11!}{(11-4)! 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\therefore C_{11}^4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330 \text{ maneras}$$

b) Cuando un libro se excluye siempre, tenemos que elegir 5 libros entre los 11 restantes.

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)! 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_{11}^5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462 \text{ maneras}$$

3.6. COMBINACIONES COMPLEMENTARIAS

El número de combinaciones de n elementos tomados de n en n es igual al número de combinaciones de esos mismos elementos tomados de $(m-n)$ en $(m-n)$.

mostrar que: C_m^n y C_m^{m-n} son combinaciones complementarias. Se debe de

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! n!} \quad (1)$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{[m-(m-n)]! (m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)! (m-n)!} = \frac{m!}{n! (m-n)!} \quad (2)$$

De (1) y (2) es:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

Observación: La suma de los órdenes es igual al número de objetos; en efecto:

$$n + m - n = m$$

Ejemplo:

$$C_{10}^6 = C_{10}^4$$

En efecto:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)! 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)! 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

3.7.- NUMEROS COMBINATORIOS

Al número C_m^n se suele representar también con el símbolo $\binom{m}{n}$, que se lee m sobre n y se denomina coeficiente binomial o número combinatorio, de modo que:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

En particular, observemos que:

$$\binom{m}{m} = 1 ; \quad \binom{m}{1} = m ; \quad \binom{m}{m-1} = m$$

además, es inmediato que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

pues son combinaciones complementarias.-

Para que estas expresiones sean generales, se admite por definición que:

$$0! = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{0} = 1$$

L. EULER (1707-1783), en las Actas de la Academia de Petrópolis, año 1781, utiliza la notación $\binom{m}{n}$ para designar los coeficientes binomiales, llamados así por utilizarse en el desarrollo del binomio de Newton. La notación actual $\binom{m}{n}$ es debida a A. von ETTINGHAUSEN que la usa en su obra "Vorlesungen über Math." Viena 1827. A veces se utiliza la notación m_n dada por H. A. ROTHE en su obra "Theorie der combinatorischen Integrale" Nuremberg, 1819.-

3.8.- BIBLIOGRAFIA

- 1.- E. MORALES: "Algebra Elemental"
Ed. Ivaldi y Checchi- Buenos Aires -
- 2.- BERNARDINO SANCHEZ VIDAL: "Lecciones de Algebra" Tomo I-
Ed. Librería de los Sucesores de Hernando-Madrid-
-1916-
- 3.- G. BRUÑO: "Elementos de Algebra"
Ed. Ch. Bouret-México.-
- 4.- HALL y KNIGHT: "Algebra Superior"
Traducc. de Rafael García Díaz-
Ed. V.T.E.H.A.- México- 1948.-
- 5.- B. NIEWENGLOWSKI: "Cours d'Algèbre"
Ed. Armand Colin- París- 1917-
- 7.- J. DE LA C. PUIG: "Complementos de Algebra"
Ed. Biedma- Bs. Aires- 1909-

8.- LUIGI BERZOLARI: "Calcolo Combinatorio"
Enciclopedia delle matematiche elementari.
Vol.I-2a.parte. Ed.U.Hoepli- Milán-1930-

M,m,III

4.- ANALISIS COMBINATORIO CON REPETICION

4.1.- ARREGLOS, VARIACIONES O COORDINACIONES

Definición: Son los diferentes grupos que se pueden formar con m objetos tomados de n en n pudiendo cada objeto estar repetido varias veces en el mismo grupo. Se consideran grupos diferentes a los que difieren en el orden en que están agrupados los objetos, o en algunos de ellos.

Casos $\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ Todos los objetos pueden repetirse } n \text{ veces.} \\ (2) \text{ Sólo alguno o algunos objetos se repitan y} \\ \text{ esas repeticiones sean de distinto número.} \end{array} \right.$

Notación: A_{rm}^n : arreglos con repetición de m objetos tomados de n en n .

Formación: Sean a, b, c , los objetos dados.

A_{r3}^1 : a, b, c , total = 3

A_{r3}^2 : $\begin{array}{lll} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{array}$ Total = 9

A_{r3}^3 : $\begin{array}{llllllll} aaa & aab & aac & baa & bab & bac & caa & cab \\ cac & aba & abb & abc & bba & bbb & bbc & bca \\ bcb & bcc & caa & cab & cac & cba & cbb & cbc \\ cca & ccb & ccc & & & & & \end{array}$

Total = 27

Número de arreglos

a) 1er. caso: A_{rm}^n pudiendo cada objeto estar repetido n veces en un mismo grupo.

Supongamos conocer el número de A_{rm}^{n-1} ; si a cada uno de estos arreglos le agregamos uno a uno (al principio o al final) los m objetos dados, de cada A_{rm}^{n-1} objetos resultarán m arreglos de n objetos, repitiéndose una vez más en cada grupo, uno al menos de los objetos que lo forman. El total de arreglos de m objetos tomados de n en n es

$$A_{rm}^n = A_{rm}^{n-1} \cdot m$$

Si hacemos $n = 1, 2, 3 \dots n$ se tiene:

$$A_{rm}^1 = m$$

$$A_{rm}^2 = A_{rm}^1 \cdot m$$

$$A_{rm}^3 = A_{rm}^2 \cdot m$$

$$A_{rm}^n = A_{rm}^{n-1} \cdot m$$

$$A_{rm}^n = m^n$$

para

$$m = 3$$

$$n = 1$$

$$A_{r3}^1 = 3$$

$$m = 3$$

$$n = 2$$

$$A_{r3}^2 = 3^2 = 9$$

$$m = 3$$

$$n = 3$$

$$A_{r3}^3 = 3^3 = 27$$

que son los arreglos efectuados anteriormente.

b) 2do. caso: Supongamos que solo haya una letra repetida, por ejemplo, que se tuviese α letras iguales a a entre las m letras con las cuales nos proponemos formar todos los arreglos posibles.

1) Los arreglos en que no entra la letra a , serán todos diferentes y su número serán los arreglos simples de $(m-\alpha)$ letras tomadas de n en n , es decir:

$$A_{m-\alpha}^n = C_{m-\alpha}^n \cdot P_n$$

Ejemplo: si $m = 3$ letras : a, b, c

al suprimir la letra a se obtienen:

$$A_{r3}^2 = \left\{ \begin{matrix} ab & ba & ca \\ bc & cb & ac \end{matrix} \right\} A_{3-1}^2 = C_{3-1}^2 \cdot P_2 = 2$$

2) Los arreglos en los que entra a una sola vez serán también diferentes; en efecto: en el ejemplo anterior es:

- $ab \quad ac$
 $ba \quad - \quad bc$
 $ca \quad cb \quad -$

Su número se deduce del número de las combinaciones simples de $(m-\alpha)$ letras tomadas de $(n-1)$ a las que después le agregaremos una $M_{n-1} IV$.

letra a, efectuando las permutaciones posibles en cada grupo, cuyo número sería:

$$C_{m-1}^{n-1} \cdot P_n$$

para nuestro caso:

$$C_{3-1}^{2-1} = C_2^1 \left\{ \begin{array}{l} b \rightarrow ba \quad ab \\ c \rightarrow ca \quad ac \end{array} \right.$$

3) Los arreglos en los que entra a dos veces se deducirán tomando las C_{m-1}^{n-2} a las cuales le agregasemos dos letras a y efectuando en cada grupo resultante todas las permutaciones posibles. Al hacerlo se obtienen grupos de n letras; los cuales no serán todos diferentes pues al permutar en cada uno de ellos las dos letras a se obtiene el mismo grupo. Por consiguiente habrá que dividir el número de arreglos así obtenidos por el número de permutaciones que se pueden hacer con la letra repetida, en este caso, por P_2 ; tenemos así, que el número de arreglos diferentes en la que a entra dos veces será:

$$\frac{C_{m-1}^{n-2} \cdot P_n}{P_2}$$

IV) Si a entra 3 veces se tendrán los arreglos distintos:

$$\frac{C_{m-1}^{n-3} \cdot P_n}{P_3}$$

V) Si a entra α veces es:

$$\frac{C_{m-1}^{n-\alpha} \cdot P_n}{P_\alpha}$$

y la suma de todos estos arreglos nos dará el número total de los que se buscan:

$$P_n C_{m-1}^n + \frac{C_{m-1}^{n-1} \cdot P_n}{P_1} + \frac{C_{m-1}^{n-2} \cdot P_n}{P_2} + \frac{C_{m-1}^{n-3} \cdot P_n}{P_3} + \dots + \frac{C_{m-1}^{n-\alpha} \cdot P_n}{P_\alpha} =$$



$$= P_n \left[C_{m-\alpha}^n + \frac{C_{m-\alpha}^{n-1}}{P_1} + \frac{C_{m-\alpha}^{n-2}}{P_2} + \frac{C_{m-\alpha}^{n-3}}{P_3} + \dots + \right]$$

$$\dots C_{m-\alpha}^n = P_n \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{C_{m-\alpha}^{n-i}}{P_i}$$

VI) Supongamos que en los m objetos dados haya α iguales a a y β iguales a b ; en este caso, los arreglos en los cuales no entran ni los a ni los b serían:

$$C_{m-\alpha-\beta}^n \cdot P_n$$

todas diferentes mientras sea

$$n < m - \alpha - \beta .-$$

Los demás arreglos, en que entran los objetos a y los b repetidos, diferente número de veces, tendrán por expresión general

$$C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu} \cdot P_n$$

$$P_\mu \cdot P_\nu$$

en donde μ = número de objetos iguales a a
 ν = " " " " " " b

En efecto, se formarían las $C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu}$ de $m - \alpha - \beta$ objetos diferentes, y le agregaríamos a cada una de ellas, μ objetos iguales a a y ν iguales a b , con lo que obtendríamos grupos de n elementos. Permutaríamos luego entre sí los n elementos de c / uno de los grupos obteniendo el número total de arreglos:

$$C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu} \cdot P_n$$

pero no todos serían diferentes, pues permutando entre sí los μ objetos iguales a a y los ν iguales a b , se obtienen siempre los mismos grupos. Luego el número de arreglos distintos

sería:

$$\frac{C_{n-\mu-\nu} \cdot P_m}{P_\mu \cdot P_\nu}$$

se obtiene así el número de arreglos distintos que se pueden hacer con m objetos dados en los cuales hay α iguales a a y β iguales a b , en el caso en que entrarán μ objetos a y ν objetos b .

Para $\mu = 0, 1, \dots, \alpha$
 $\nu = 0, 1, \dots, \beta$

la expresión:

$$\sum_{\substack{\nu = 0 \\ \mu = 0}}^{\nu = \beta} \frac{C_{n-\mu-\nu} \cdot P_m}{P_\mu \cdot P_\nu}$$

nos da el número total de arreglos posibles.

4.2.- PERMUTACIONES

a) Número de permutaciones

Supongamos efectuadas las permutaciones simples con n objetos, supuestos todos distintos es:

$$P_n = n!$$

Si ahora admitimos que entre los n objetos haya α iguales a a , permutados entre sí esos α objetos iguales; no se obtienen grupos diferentes, sino el mismo grupo, luego el número de permutaciones distintas será:

$$\frac{P_n}{P_\alpha} = \frac{n!}{\alpha!}$$

Si además suponemos que entre los n objetos haya α iguales a a y β iguales a b , con idéntico razonamiento, el número de permutaciones distintas será:

$$\frac{P_n}{P_\alpha \cdot P_\beta} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta!}$$

Y en general, habiendo α objetos iguales a a , y β iguales a b , -----, λ iguales a λ se tiene:

$$P_n^{\alpha \cdot \beta \dots \lambda} = \frac{P_n}{P_\alpha \cdot P_\beta \dots P_\lambda}$$

$$P_n^{\alpha, \beta, \dots, \lambda} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!}$$

en la cual se deberá tener:

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$$

4.3.- COMBINACIONES COMPLETAS

a) Definición:

Son los diferentes grupos que se pueden formar con m objetos tomados de n en n los que pueden encontrarse repetidos en un mismo grupo, debiéndose diferenciar un grupo de otro por lo menos en uno de los objetos que lo forman.-

b) Formación:

Supongamos que se han dado cuatro objetos:

a b c d

y se nos pide que formemos las combinaciones con repetición, en las que todas las letras se repitan igual número de veces. Si $n = 1$ se tienen:

D $\frac{1}{4}$: a b c d Total = 4

Si $n = 2$ es:

D $\frac{2}{4}$: { aa ab ac ad
 bb bc
 cc cd
 dd

Total = 10

Si $n = 3$ es:

D	3 4	:	aaa	abb	acc	add
			aab	abc	acd	
			aac	abd		
			aad			
			bbb	bbc	bhd	
			bcc	bed		
			bdd			
			ccc	ccd		
			cdd			
			ddd			
						Total = 20

c) Cálculo del número de combinaciones:

1) Las letras se repiten igual número de veces

Supongamos tener formadas ya las combinaciones completas de m objetos, tomados de n en n y para mayor claridad supongamos que se trata de m letras.-

El número total de letras que entran en la formación de esas D_m^n combinaciones, es de $D_m^n \cdot n$; por ser n el número de letras que entra en cada D_m^n y como todas las letras son tomadas igual número de veces, el número de veces que entra cada una de ellas será:

$$\frac{D_m^n \cdot n}{m}$$

para:

$$m = 4 ; n = 3 \text{ es } \frac{D_{4,3}^3}{4} = \frac{20 \times 3}{4} = 15 \text{ letras } a$$

Vamos a calcular este mismo número de otro modo. Supongamos que se apartan todas las combinaciones en que entra un objeto determinado, por ejemplo la letra a . Si a cada una de estas combinaciones le quitamos una a , nos quedan las D_m^{n-1} . Como cada D_m^{n-1} tiene $(n-1)$ elementos o letras, y hay un total de D_m^{n-1} ; el número total de letras que contienen estas combinaciones es de:

$$D_m^{n-1} \cdot (n-1)$$

en nuestro caso es:

$$D_4^2 \cdot (3-1) = 10 \times 2 = 20$$

y como todas las letras entran igual número de veces, el número de

veces que entrará la a será:

$$\frac{D_m^{n-1} \cdot (n-1)}{m}$$

que para el caso propuesto es:

$$\frac{D_4^2 (3-1)}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

al cual debemos agregar el número a que quitamos, que fué de D_m^{n-1} , puesto que quitamos una a a cada combinación. Tendremos así que el número total de letras a es de:

$$\frac{D_m^{n-1} \cdot (n-1)}{m} + D_m^{n-1}$$

en nuestro ejemplo es:

$$\frac{20}{4} + 10 = 15$$

el cual deberá ser igual al número total de veces que una cualquiera de dichas letras entra en las D_m^n combinaciones:

$$\frac{D_m^n \cdot n}{m} = \frac{D_m^{n-1} \cdot (n-1)}{m} + D_m^{n-1}$$

$D_m^n = D_m^{n-1} \cdot \frac{m + n - 1}{n}$

Si damos a n, valores tales:

$$n = 2, 3, \dots \quad \text{----- } n$$

se obtendrá:

$$D_m^1 = m$$

$$D_m^2 = D_m^1 \cdot \frac{m+1}{2}$$

X

$$D_m^3 = D_m^2 \cdot \frac{m+2}{3}$$

$$D_m^n = D_m^{n-1} \cdot \frac{m+n-1}{n}$$

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2) \cdots (m+n-1)}{n!}$$

2) Las letras no se repiten igual número de veces

Supongamos que entre las m letras haya α iguales a a y β iguales a b .

Supongamos tener una cualquiera de las combinaciones con repetición de m objetos, en la cual hay μ letras a y ν letras b . Si quitamos de la misma todas las a y todas las b quedará una combinación simple de $(m - \alpha - \beta)$ objetos tomados de $(n - \mu - \nu)$ en $(n - \mu - \nu)$, luego:

$$C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu}$$

será el número de las combinaciones distintas en las que entran μ veces a y ν veces b . Haciendo variar a μ y ν respectivamente de 0 a α y de 0 a β

$$\mu = 0, 1, 2, \dots, \alpha$$

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, \beta$$

el número total de combinaciones con repetición buscado estará dado por la suma de expresiones análogas a la anterior:

$$\sum_{\mu=0}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\beta} C_{m-\alpha-\beta}^{n-\mu-\nu}$$

1) El número de combinaciones completas que se pueden formar con m objetos tomados de n en n , es igual al número de combinaciones completas que se pueden formar con m objetos tomados de $(n-1)$ en $(n-1)$, más el número de combinaciones completas que se pueden formar con $(m-1)$ objetos tomados de n en n .-

$$T) D_m^n = D_m^{n-1} + D_{m-1}^n$$

Formemos las D_m^n para $m = 4$

$n = 1, 2, 3$

D_4^1 :	a	b	c	d
D_4^2 :	aa	ab	ac	ad
	bb	bc	bd	
	cc	cd		
	dd			
D_4^3 :	aaa	aab	aac	aad
	abb	abc	abd	
	acc	acd		
	add			
	bbb	bbc	bbd	
	bcc	bcd		
	bdd			
	ccc	ccd		
	cdd			
	ddd			

Estas combinaciones pueden dividirse en dos grupos:

a) Contienen un elemento dado, b) No contienen un elemento dado.

Nosotros las podemos dividir así:

aaa; aab; aac; aad; abb; abc; abd; acc; acd; add
bbb; bbc; bbd; bcc; bcd; bdd; ccc; ccd; cdd; ddd

un primer grupo donde están las combinaciones que contienen la letra a; un segundo grupo que no la contienen.-

El primer grupo, con sólo suprimirle la letra a, queda reducido a las D_3^2 ; las del segundo grupo, desde que no contienen a a, son las combinaciones completas de las tres letras b, c, d, tomadas de 3 en 3, es decir, D_3^3 . Luego pues:

$$D_4^3 = D_4^2 + D_3^3$$

En general

$$D_m^n = D_m^{n-1} \div D_{m-1}^n$$

En efecto:

$$D_m^{n-1} = \frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{n}{n}$$

$$D^m = \frac{(m)(m-1)(m+1) \dots (m+n-2)}{n!}$$

Sumando es:

$$D_m^{n-1} + D_{m-1}^n = \frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-2)(m-1+n)}{n!} = D_m^n$$

2) El número de combinaciones completas que se pueden hacer con m elementos tomados de n en n es igual a la suma de las combinaciones completas que sucesivamente se pueden hacer con uno, con dos, --- hasta con m objetos, tomados en todas ellas de $(n-1)$ en $(n-1)$.--

$$T) D_m^n = D_1^{n-1} + D_2^{n-1} + D_3^{n-1} + \dots + D_m^{n-1}$$

De la fórmula $D_m^n = D_m^{n-1} + D_{m-1}^n$ (pág 10)

es para $m = 2, 3, \dots, m$

$$D_0^n = D_1^n + D_2^n - 1$$

$$D_3^n = D_2^n + D_3^n - 1$$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

$$D_{m-1}^n = D_{m-2}^n + D_{m-1}^{n-1}$$

$$D_m^n = D_{m-1}^{n-1} + D_m^{n-1}$$

$$D_m^n = D_1^{n-1} + D_2^{n-1} + D_3^{n-1} + \dots + D_{m-1}^{n-1} + D_m^{n-1}$$

y como $D_1^n = D_1^{n-1} = 1$

es

$$D_m^n = D_1^{n-1} + D_2^{n-1} + D_3^{n-1} + \dots + D_m^{n-1}$$

3) El número de combinaciones completas que se pueden formar con m objetos tomados de n en n , es igual al número de combinaciones simples que se pueden hacer con $(m+n-1)$ objetos tomados de n en n .-

$$T) D_m^n = C_{m+n-1}^n$$

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{n!}$$

que puede escribirse así:

$$D_m^n = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\dots(m+2)(m+1)(m)(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = C_{m+n-1}^n$$

$$D_m^n = C_{m+n-1}^n$$

pero además, como

$$C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1} \quad \text{por ser combinaciones complementarias.}$$

será:

$$D_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = \frac{(m+n-1) \cdots (m+n-1 - (m-1) + 1)}{(m-1)!}$$

$$D_m^n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}$$

Que es la fórmula más usada en las aplicaciones

4.4.- BIBLIOGRAFIA

- S. PINCHERLE: "Algebra Complementaria" Ed. M. Zanichelli. Bolonia.-
 J. DE LA C. PUIG: "Complementos de Algebra" Ed. Biedma. Bs. As. 1909.-
 B. NIEWENGLOWSKI: "Cours d'Algebre" Ed. Armand Colin-Paris- 1917.-
 F. SEVERI: "Lecciones de Análisis" Ed. Labor Buenos Aires- 1951.-

4.5. EJERCICIOS

ANALISIS COMBINATORIO

1.- Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras a,b,c,d,e ?

R= 120.-

2.- Cuántas combinaciones pueden formarse con las mismas letras, tomándolas de 2 en 2; 3 en 3; 4 en 4 y 5 en 5 ?.- Fórmulas

R= 10; 10; 5; 1.-

3.- De cuántos modos pueden escribirse las letras que entran en las palabras ESO y PERO, tomándolas separadas y tomándolas todas juntas ?

R= 6; 24; 1260.-

4.- Cuántas permutaciones pueden formarse con los dos primeros números dígitos? Cuántos con los 3 primeros? Cuántos con los 4?... etc. y Cuántas con los nueve?

R= 2; 6; 24; 120; 720; 5040; 40320; 362880.-

5.- Cuántos arreglos pueden formarse con 15 objetos tomados de 6 en 6 ?

R= 3.603.600.-

6.- Cuántos arreglos pueden formarse con 26 letras tomándolas: 1) de 4 en 4; y 2) de 6 en 6 ?

R= 358.800 y 165.765.600

7.- Cuántos números de 3 cifras pueden formarse con las de 1 a 9 inclusive ?

R= 504 números.-

8.- Con las cifras 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0, cuántos números pueden formarse: 1) de 3 cifras; 2) de 4 cifras, ~~excluyendo~~ aquellos en que el cero ocupe el primer lugar de la izquierda ?

R= 900 números y 9.000 números.-

9.-Cuál es el número total de arreglos sin repetición, que pueden obtenerse con 16 objetos, tomándolos de 1,2,3..... 16 a la vez ?

R= 56.874.039.553.216.-

10.-Cuál sería la solución del problema anterior, si los arreglos se hacen con repetición ?

$$R = 19.676.527.011.956.855.056.-$$

11.- Un negociante, que tiene 8 clases de café, quiere hacer mezclas por partes iguales, tomando para cada mezcla tres clases diferentes, Cuántas mezclas diferentes puede hacer ?

$$R = 36.-$$

12.- De cuántas maneras diferentes pueden sentarse 6 personas alrededor de una mesa ?

$$R = 720.-$$

13.- De cuántas si fueran 8 las personas ?

$$R = 40.320.-$$

14.- De cuántas maneras diferentes, tomados todos juntos, pueden colocarse 7 colores.

$$R = 5.040.-$$

15.- De cuántas maneras diferentes pueden colocarse 6 letras, tomadas primeramente una a una, después 2 a 2; 3 a 3 y así sucesivamente hasta tomarlas todas juntas ?

$$R = A = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1956$$

16.- Cuántos productos diferentes pueden formarse 2 a 2; con los números 3,4,5,6 ?

$$R = C_4^2 = 6.-$$

17.- Determinar el número de combinaciones de 4 en 4 que pueden hacerse con los 90 primeros números.-

$$R = 2.555.190$$

18.- Cuántos productos diferentes pueden formarse tres a tres con los números 1,3,5,7,y9 ?

$$R = 10.-$$

19.- Con 17 consonantes y 5 vocales, cuántas palabras pueden formarse de modo que cada una contenga dos consonantes y una vocal ?

Con 17 consonantes se pueden formar

$$C_{17}^2 = \frac{17 \times 16}{2}$$

Con 2 consonantes y una vocal: $C_{17}^2 \times 5 = \frac{17 \times 16}{2} \times 5$
y permutando entre sí las letras se obtienen:

$$C_{17}^2 \times 5 \times P_3 = \frac{17 \times 16}{2} \times 5 \times 1 \times 2 \times 3$$

$$R = 4.080 \text{ palabras}$$

- 20.- Con 10 consonantes y 4 vocales. Cuántas palabras pueden formarse de modo que cada una contenga tres consonantes y 2 vocales ?

$$C_{10}^3 \times C_4^2 \times 5 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$R = 86,400 \text{ palabras}$$

- 21.- Con 10 banderas que representan los números 1,2,3,.... Cuántas señales pueden hacerse, dada la condición de que las mayores señales que se hagan no contengan más de 4 banderas ?

$$\text{Arreglos de 10 banderas de 4 en 4: } A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

$$\text{Arreglos que comienzan con cero: } A_9^3 = 9 \times 8 \times 7$$

$$\text{Señales con 4 banderas: } A_{10}^4 - A_9^3$$

$$\text{Con 3 banderas: } A_{10}^3 - A_9^2$$

$$\text{Con 2 banderas: } A_{10}^2 - A_9^1$$

$$\text{Con 1 bandera: } A_{10}^1$$

Número total:

$$R = A_{10}^4 - A_9^3 + A_{10}^3 - A_9^2 + A_{10}^2 - A_9^1 + A_{10}^1 = 5.265 \text{ señales}$$

- 22.- Con 21 bolas, todas diferentes. De cuántas maneras pueden formarse montones de 3 en 3, de 7 en 7 y de 11 en 11 ?

$$R = 42.325.920 \text{ maneras}$$

- 23.- Hallar el número de permutaciones de todas las letras que componen la palabra ALGEBRA.-

$$P \frac{2}{7} = \frac{7!}{2!}$$

$$R = 2.520$$

- 24.- De cuántas maneras pueden ordenarse 17 bolas de billar si 7 son negras, 6 rojas y 4 blancas ?

$$R = P_{17}^{7,6,4} = 4.084.080$$

POTENCIA DE UN POLINOMIO

4.6.1.-Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta.

I) Producto de una suma por un número:

El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos parciales de cada uno de los sumandos por dicho número.-

En símbolos:

$$(a + b + c + \dots + l) \cdot m = am + bm + cm + \dots + lm$$

II) Producto de una suma por otra

El producto de una suma por otra es igual a la suma de los productos parciales que se obtienen multiplicando cada uno de los sumandos de una sucesivamente por los sumandos de la otra.-

En símbolos:

$$(a + b + c + d) \cdot (m + n) = am + bm + cm + dm + an + bn + cn + dn$$

Observación : la propiedad distributiva se cumple también para la resta con solo tener en cuenta el signo de cada factor en los productos parciales que se van obteniendo.-

III) Producto de dos binomios

Aplicando la propiedad anterior, se tiene :

$$(x + a) \cdot (x + b) = \begin{array}{l} x^2 \\ + a \\ + b \end{array} \left| \begin{array}{l} x \\ + ab \end{array} \right.$$

IV) Producto de tres binomios

Análogamente, se obtiene :

$$(x + a) \cdot (x + b) \cdot (x + c) = \begin{array}{l} x^3 \\ + a \\ + b \\ + c \end{array} \left| \begin{array}{l} x^2 \\ + ab \\ + ac \\ + bc \end{array} \right| \begin{array}{l} x \\ + abc \end{array}$$

V) Producto de cuatro binomios: en forma análoga, es:

$$(x + a) \cdot (x + b) \cdot (x + c) \cdot (x + d) = \begin{array}{l} x^4 \\ + a \\ + b \\ + c \\ + d \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 \\ + ab \\ + ac \\ + ad \\ + bc \\ + bd \\ + cd \end{array} \right| \begin{array}{l} x^2 \\ + abc \\ + abd \\ + acd \\ + bcd \end{array} \left| \begin{array}{l} x \\ + abcd \end{array} \right.$$

Observaciones :

- 1) Cada producto es un polinomio ordenado según las potencias de - crecientes del término común x.
- 2) El número de términos de cada polinomio es una más que el número de factores.

- 3) El exponente de x en el primer término del polinomio es igual al número de factores del producto. En los términos sucesivos este exponente disminuye en una unidad hasta ser cero en el último término.
- 4) El coeficiente del primer término es 1, el del segundo término es la suma de los términos no comunes de los binomios dados; el del tercero es la suma de los productos binarios de dichos términos no comunes; el del cuarto, es la suma de los productos ternarios, y así sucesivamente.

VI) Generalizando, de acuerdo con lo expuesto, el producto de m factores:

$$(x + a) \cdot (x + b) \cdot (x + c) \cdots (x + h) \cdot (x + l) =$$

| | | | |
|-----------|----------------|-----------------|------------------------------------|
| $x^m + a$ | $x^{m-1} + ab$ | $x^{m-2} + abc$ | $x^{m-3} + \cdots + abc \cdots hl$ |
| $+ b$ | $+ ac$ | $+ abh$ | $+ abh$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $+ abl$ | $+ abl$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $+ h$ | $+ ah$ | $+ chl$ | $+ chl$ |
| $+ l$ | $+ al$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

Es un polinomio ordenado de grado m en x que tiene $m+1$ términos

Ahora bien, si todos los binomios del producto dado son iguales, vale decir, que :

$$a = b = c = \cdots = h = l$$

en consecuencia :

$$(x + a) (x + b) (x + c) \cdots (x + h) (x + l) =$$

- m factores -

$$= (x + a) (x + a) (x + a) \cdots (x + a) (x + a) = (x + a)^m$$

Luego, en el desarrollo anterior, en el segundo miembro, se obtendrá el polinomio siguiente :

Primer coeficiente = 1

Segundo coeficiente = $\overbrace{a + a + a + \cdots + a}^m = a \cdot m$

Tercer coeficiente = $ab + ac + \cdots + ah + al =$
 $= a^2 + a^2 + \cdots + a^2 + a^2$

repetidas tantas veces como combinaciones binarias pueden formarse con m elementos, tomados de 2 en 2, es decir :

$$C_m^2 = m \frac{(m-1)}{2!}$$

Analogamente, el cuarto coeficiente sería $C_m^3 \cdot a^3 =$

$$= m \frac{(m-1)(m-2)}{3!} a^3$$

Finalmente, se tendría el siguiente desarrollo

$$(x + a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{m-3}a^3 + \dots + a^m$$

Esta identidad recibe el nombre de desarrollo del binomio de Newton, siendo m un exponente entero y positivo.

Utilizando las notaciones del análisis combinatorio, el desarrollo anterior se acostumbra a escribir así :

$$(x + a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} a + C_m^2 x^{m-2} a^2 + C_m^3 x^{m-3} a^3 + \dots + a^m$$

Observaciones :

- 1) El desarrollo del binomio de Newton es un polinomio homogéneo de grado m , que mientras disminuye el grado de x , aumenta el de a .
- 2) El exponente de a en cualquier término es igual al número de términos que le preceden y el de x es igual al número de los que le siguen.

4.6.2. Noticias históricas del binomio de Newton

Alrededor del año 300 a.J.C., Euclides halló el desarrollo de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ que fué el primer desarrollo del teorema del binomio. "El poeta hindú y filósofo Omar Khayyám, 1100 d.J.C., parece haber descubierto la ley general del desarrollo del binomio, pues fué capaz de hallar la 4a., 5a. y 6a. potencia de $(a + b)$. En 1742, el matemático italiano Salvemini demostró el teorema del binomio para valores positivos de m .

Sir Isaac Newton (1642 - 1727) demostró el teorema del binomio para valores negativos y fraccionarios de m , y parece que ningún otro, anterior a él, sospechó de la validez de la fórmula para esos valores.

En 1774, Euler, demostró el teorema para valores fraccionarios de m . Alrededor de 1825, el matemático noruego Abel, demostró el teorema del binomio para todo valor de m incluyendo los números complejos. Fueron necesarios veinte siglos, de Euclides a Abel, para descubrir el significado total del teorema del binomio y demostrar que él es cierto en todos los campos de la Aritmética.

4.6.3.- Números combinatorios

Con la notación

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$

se indica el valor o número de las combinaciones que pueden formarse con m elementos tomados de n en n ; expresión que se ha llamado número combinatorio y se lee m sobre n .

Con esta notación, el binomio de Newton se puede escribir así:

$$(x + a)^m = \binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} a + \binom{m}{2} x^{m-2} a^2 + \dots + \binom{m}{m} a^m$$

que presente mayor simetría en la escritura

4.6.4.- Desarrollo de $(x - a)^m$

$$(x - a)^m = \left[x + \left(-a \right) \right]^m = x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} (-a) + \binom{m}{2} x^{m-2} (-a)^2 + \dots + \binom{m}{m} (-a)^m$$

y recordando que :

1) Toda potencia par de un número negativo da un valor positivo, es decir, que :

$$(-a)^{2k} = + a^{2k}$$

2) Toda potencia impar de un número negativo da un valor negativo, o sea que :

$$(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$$

El desarrollo anterior, teniendo en cuenta los signos, toma la forma siguiente :

$$(x - a)^m = x^m - \binom{m}{1} x^{m-1} a + \binom{m}{2} x^{m-2} a^2 - \binom{m}{3} x^{m-3} a^3 + \dots + (-1)^m a^m$$

Observación:

a^m será positivo o negativo, según que m sea par o impar.

Ejemplo:

$$(x + a)^6 = x^6 + \binom{6}{1} x^5 a + \binom{6}{2} x^4 a^2 + \binom{6}{3} x^3 a^3 + \binom{6}{4} x^2 a^4 + \binom{6}{5} x a^5 +$$

$$+ \binom{6}{6} a^6 =$$

$$(x + a)^6 = x^6 + 6x^5 a + \frac{6 \cdot 5}{2!} x^4 a^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} x^3 a^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} x^2 a^4 +$$

$$+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5!} x a^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6!} a^6$$

$$(x + a)^6 = x^6 + 6x^5 a + 15x^4 a^2 + 20x^3 a^3 + 15x^2 a^4 + 6x a^5 + a^6$$

4.6.5. Propiedades de los coeficientes

1) Coeficiente de un término cualquiera

Es igual al coeficiente anterior multiplicado por el exponente de x y dividido por el exponente de a aumentado en una unidad

M.m. V

Ejemplo : En el desarrollo de $(x + a)^6$, tomemos el quinto término, su coeficiente, es :

$$\frac{6.5.4.3}{4!} = 15$$

el del sexto término será :

$$\frac{6.5.4.3.2}{4!.5} = \frac{6.5.4.3.2}{5!} = 6$$

2) Coeficientes de los términos equidistantes de los extremos

Consideremos los coeficientes del desarrollo, ordenados según su posición en el polinomio, se tendrá :

Término : 1^o ; 2^o ; 3^o ---- ; $(m - 1)^o$; m^o ; $(m + 1)^o$

Coeficientes : C_m^0 ; C_m^1 ; C_m^2 ---- C_m^{m-2} ; C_m^{m-1} ; C_m^m

Recordando que: $C_m^n = C_m^{m-n}$

por ser combinaciones complementarias, resulta que

$$C_m^0 = C_m^m ; C_m^1 = C_m^{m-1} ; C_m^2 = C_m^{m-2} ; C_m^3 = C_m^{m-3} ; \text{etc.}$$

Es decir, que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos del desarrollo, son iguales, con lo que en la práctica será suficiente calcular la mitad de los coeficientes del desarrollo, como se observa en el cálculo de $(x + a)^6$.

4.6.6.- Término General

Con las propiedades anteriores, se puede escribir un término cualquiera del desarrollo sin haber calculado previamente a los anteriores. Así, el término que ocupa el lugar $n + 1$ que llamaremos término general, y lo indicaremos con T_{n+1} , tendrá la siguiente expresión :

$$T_{n+1} = C_m^n x^{m-n} a^n$$

Ejemplo : Hallar el 5º término del desarrollo

$$(2x + 3y)^5$$

$$T_4 + 1 = C_5^2 (2x)^{3-1} (3y)^{-1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} (2x)^{-1} (3y)^{-1}$$

$$T_4 + 1 = 5 \cdot 2x \cdot 3^4 y^4 = 10 \cdot 81 \cdot xy^4$$

$$T_4 + 1 = 810xy^4$$

4.6.7.- Forma más simple

Una forma más simple del desarrollo del teorema del binomio se obtiene en el desarrollo de $(1+x)^m$, que se obtiene de la forma general 2.1 y 2.3 colocando 1 en lugar de x y x en lugar de a . Luego:

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^r x^r + \dots + x^m$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \dots + x^m$$

siendo

$$C_m^n x^n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$$

su término general.

A esta forma puede reducirse cualquier otra, por ejemplo

$$(x+a)^m = \left[\left(\frac{x}{a} + 1 \right) \cdot a \right]^m = a^m \left(1 + \frac{x}{a} \right)^m$$

y haciendo $\frac{x}{a} = z$, es:

$$(x+a)^m = a^m (1+z)^m$$

Lo mismo si se tuviera:

$$(x+y)^m = \left[x \left(1 + \frac{y}{x} \right) \right]^m = x^m \left(1 + \frac{y}{x} \right)^m = x^m (1+z)^m$$

siendo $z = \frac{y}{x}$

Ejemplo: Hallar el coeficiente de x^{16} en el desarrollo de $(x^2 - 2x)^{10}$

$$(x^2 - 2x)^{10} = \left[x^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right) \right]^{10} = x^{20} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{10}$$

y como x^{20} es factor de todos los términos del desarrollo de $\left(1 - \frac{2}{x} \right)^{10}$, debemos buscar en este desarrollo el coeficiente del término que contiene $\frac{1}{x^4}$, pues:

$$x^{20} \cdot \frac{1}{x^4} = x^{16} = x^{16}$$

$$\text{Término que contiene } a^{\frac{1}{4}} = C_{10}^4 \left(-\frac{2}{x} \right)^4 =$$

$$\cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} \cdot a^4 \cdot \frac{1}{x^4} = 3360 \cdot \frac{1}{x^4}$$

Siendo 3360 el coeficiente buscado

4.6.8.- Desarrollo del binomio para exponente fraccionario

En el desarrollo de:

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + C_m^3 x^3 + \dots + C_m^r x^r + \dots + x^m$$

dada en 2.8, si hacemos

$$m = \frac{h}{k}$$

Se obtiene el desarrollo para exponente fraccionario demostrado por Newton, y el binomio, en este caso adopta la siguiente forma, reemplazando a m en:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + x^m$$

Es decir :

$$(1+x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \frac{h}{k} x + \frac{\frac{h}{k} \left(\frac{h}{k} - 1 \right)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\frac{h}{k} \left(\frac{h}{k} - 1 \right) \left(\frac{h}{k} - 2 \right) \dots \left(\frac{h}{k} - r + 1 \right)}{r!} x^r + \dots$$

Ejemplo :

Calcular los cuatro primeros términos del desarrollo de

$$\sqrt{(1-x)^3}$$

$$\sqrt{(1-x)^3} = (1-x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{2} (-x) + \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right)}{2!} (-x)^2 +$$

$$+ \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \left(\frac{3}{2} - 2 \right)}{3!} (-x)^3 + \dots$$

$$\sqrt{(1-x)^3} = 1 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{8} x^2 - \frac{1}{16} x^3 + \dots$$

4.6.9.- Desarrollo del binomio para exponente negativo

Si $m = -n$

En el desarrollo de 2.8 se obtiene :

$$(1 + x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

el desarrollo para exponente negativo.

Ejemplo : Calcular los cuatro primeros términos del desarrollo de

$$(2 + 3x)^{-4}$$

$$(2 + 3x)^{-4} = \left[2 \left(1 + \frac{3x}{2} \right) \right]^{-4} = 2^{-4} \left(1 + \frac{3x}{2} \right)^{-4} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \left[1 + (-4) \left(\frac{3x}{2} \right) + \frac{(-4)(-5)}{2!} \left(\frac{3x}{2} \right)^2 + \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!} \left(\frac{3x}{2} \right)^3 + \dots \right]$$

$$(2 + 3x)^{-4} = \frac{1}{16} \left(1 - 6x + \frac{45}{2}x^2 - \frac{135}{2}x^3 + \dots \right)$$

4.6.10.- Cuadrado de un polinomio

Sea el polinomio $P = a + b + c + d + e$

cuyo cuadrado se desea hallar. Si hacemos :

$$a + b + c + d = x$$

tendremos

$$P^2 = (a + b + c + d + e)^2 = (x + e)^2$$

$$P^2 = x^2 + 2ex + e^2$$

$$\text{pero } x^2 = (a + b + c + d)^2$$

$$\text{y haciendo } a + b + c = y$$

es :

$$x^2 = (a + b + c + d)^2 = (y + d)^2 = y^2 + 2dy + d^2$$

para determinar y^2 hacemos

$$a + b = z$$

$$y^2 = (a + b + c)^2 = (z + c)^2 = z^2 + 2cz + c^2$$

y finalmente

$$z^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

sustituyendo este valor arriba es :

$$y^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c(a + b) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

volviendo a sustituir este valor de y^2 más arriba, se obtiene :

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

este valor, sustituido en P^2 nos da :

$$P^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2(ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)$$

y en el paréntesis se obtiene la suma de las combinaciones simples que se pueden hacer con a, b, c, d, e tomadas de 2 en 2 .-

$$= 1 + 9x^2 + 25x^4 + 2(3x + 5x^2 + 15x^3)$$

$$= 1 + 9x^2 + 25x^4 + 6x + 10x^2 + 30x^3$$

4.6.11.- Cubo de un polinomio

En la misma forma se calcula el cubo de

$$P = a + b + c + d$$

tendremos :

$$P^3 = (a + b + c + d)^3$$

$$\text{hacemos } a + b + c = x$$

$$\begin{aligned} \text{resulta : } P^3 &= (a + b + c + d)^3 = (x + d)^3 = \\ &= x^3 + 3x^2d + 3xd^2 + d^3 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{haciendo } a + b = y$$

$$\text{es } x^3 = (a + b + c)^3 = (y + c)^3$$

$$x^3 = y^3 + 3y^2c + 3yc^2 + c^3$$

$$x^2 = y^2 + 2yc + c^2$$

$$\text{pero : } y^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$y^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} \text{luego : } x^3 &= a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 + 3c(a^2 + 2ab + b^2) + \\ &+ 3c^2(a+b) + c^3 \\ x^2 &= a^2 + b^2 + 2ab + 2c(a+b) + c^2 \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo :

$$x^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + ca^2 + c^2a + b^2c + bc^2) + 6abc$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

valores que sustituidos en (1) nos dan:

$$\begin{aligned} p^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + a^2d + ad^2 + b^2c + \\ &+ c^2b + b^2d + bd^2 + c^2d + cd^2) + 6(abc + abd + acd + bcd) \end{aligned}$$

El cubo de un polinomio cualquiera es igual a la suma de los cubos de sus diferentes términos, más el triplo de la suma de los productos que se obtienen multiplicando el cuadrado de un término cualquiera por otro, más seis veces la suma de los productos de los diferentes términos tomados de tres en tres .-

4.6.12.- Potencia enésima de un polinomio

El procedimiento seguido en 4.6.10 y 4.6.11 es general, pero las reglas que se deducen para potencias superiores a la tercera son cada vez más complicadas.-

Con el análisis combinatorio se soluciona elegantemente esta cuestión. En efecto, el desarrollo de la potencia enésima de $(a + b + c + d + \dots + 1)$ no es más que el resultado del producto de m factores iguales al dado, cosa que se obtiene sumando los productos parciales que se pueden hacer considerando un término de cada uno de ellos de todas las maneras posibles.-

Tomando el término a como factor de α polinomios, el b en β el c en γ , --- es decir, formando una de las combinaciones completas de m objetos tomados de n en n , obtenemos un término del desarrollo de la potencia enésima de dicho polinomio, cuya forma sería :

$$a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots \dots 1^\lambda$$

en donde se verifica que

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m.$$

Ahora, como los α objetos a ; los β objetos b , etc. se toman en los m polinomios $(a + b + c + \dots + 1)$ de todas las maneras posibles, habrá tantos como permutaciones con repetición se pueden formar con m

objetos entre los cuales hay α iguales a a , β iguales a b , γ iguales a c , ---- etc. igual número de veces resultará repetida la combinación anterior, de modo pues que :

$$\frac{P_m}{P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \dots P_\lambda} \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots l^\lambda$$

será la expresión general de un término cualquiera y la potencia buscada no será otra cosa que la suma de expresiones análogas, luego será, :

$$(a + b + c + \dots + l)^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \dots P_\lambda} \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots l^\lambda$$

De lo anterior se deduce :

El número de términos del desarrollo es igual al número de combinaciones completas que se pueden formar con m objetos, suponiendo que sea m el número de términos del polinomio, tomados de n en n , es decir :

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{n!}$$

4.6.13.- Cálculo de un término cualquiera del desarrollo

Consideremos un polinomio :

$$P = A_n + A_{n-1}x + A_{n-2}x^2 + A_{n-3}x^3 + \dots + A_0x^n$$

cuya potencia m -ésima se desea hallar; será :

$$P^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \dots P_\lambda} \cdot A_n^\alpha \cdot (A_{n-1}x)^\beta \cdot (A_{n-2}x^2)^\gamma \dots (A_0x^n)^\lambda$$

$$P^m = \sum \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!} A_n^\alpha \cdot A_{n-1}^\beta \dots A_0^\lambda \cdot x^{\alpha + 2\gamma + 3\delta + \dots + n\lambda}$$

Para formar un término cualquiera del desarrollo, por ejemplo, al que contiene x^p , deberemos hacer :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m \\ \beta + 2\gamma + 3\delta + \dots + n\lambda = p \end{cases}$$

Cada sistema de valores enteros y positivos que satisfagan a este sistema de ecuaciones de condición, nos dará un valor determinado para

$$\frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot A_n^\alpha \cdot A_{n-1}^\beta \dots A_0^\lambda \quad (1)$$

M.m. V

y la suma de todos esos valores dará el coeficiente del término que contiene a x^4 del desarrollo

Ejemplo : Calcular el término en x^4 del desarrollo

$$P^5 = (1 + 3x + 5x^2)^5$$

Ecuaciones de condición :

$$\alpha + \beta + \gamma = 5$$

$$\beta + 2\gamma = 4$$

Para determinar los valores enteros y positivos que satisfagan simultáneamente a ambas ecuaciones, damos a γ el máximo valor que puede tomar, en este caso $\gamma = 2$

$$\text{Si } \gamma = 2 \quad \dots \beta = 0 \text{ y } \alpha = 3$$

$$\text{Si } \gamma = 1 \quad \dots \beta = 2 \text{ y } \alpha = 2$$

$$\text{Si } \gamma = 0 \quad \dots \beta = 4 \text{ y } \alpha = 1$$

obtenemos así la siguiente tabla de valores :

| α | β | γ |
|----------|---------|----------|
| 3 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 4 | 0 |

Sustituyendo estos valores en (1) y recordando que se conviene para $0! = 1$, resulta para el primer sistema de valores lo siguiente :

$$\frac{5!}{3! 2!} \cdot 1^3 \cdot 1 \cdot 5^2 = \frac{120}{6 \times 2} \times 25 = \underline{250}$$

Para el segundo sistema :

$$\frac{5!}{2! 2!} \cdot 1^2 \times 3^2 \times 5^1 = 1350$$

y para el tercero :

$$\frac{5!}{4!} \times 1^1 \times 3^4 = \underline{405}$$

El coeficiente del término en x^4 es :

$$250 + 1350 + 405 = \underline{2005}$$

y el término pedido es :

$$2005 x^4$$

4.6.14.- Bibliografía

- 1) Juan de la C. Puig " Complemento de Algebra "
Ed. Biedma- Bs. Aires - 1909
- 2) Esteban Morales : " Lecciones de Algebra Elemental "
Ed. Ivaldi y Checchi. Bs. As.
- 3) H.S. Hall y S.R. Knight: " Algebra Superior "
Ed. U.T.E.H.A. - México - 1948
- 4) Rey Pastor ; " Elementos de Análisis Algebraico "
Madrid 1930 .-
- 5) Bernardino Sánchez Vidal : " Lecciones de Algebra "
Ed. Suc. de Hernando- Madrid - 1916 .-
- 6) B. Niewenglowski : " Cours d'Algebre "
Ed. Armand Colin - París - 1917 .-

4.7.1. NOTA HISTORICA

4.7.2. FORMATION

```

para: (a + b)0 : ----- 1
para: (a + b)1 : ----- 1 1
para: (a + b)2 : ----- 1 2 1
para: (a + b)3 : ----- 1 3 3 1
para: (a + b)4 : ----- 1 4 6 4 1
para: (a + b)5 : ----- 1 5 10 10 5 1
para: (a + b)6 : ----- 1 6 15 20 15 6 1
para: (a + b)7 : ----- 1 7 21 35 35 21 7 1

```

para: $(a + b)^m$: _____ $1 \text{ cm}^1 \text{ cm}^2 \text{ cm}^3 \text{ cm}^4 \text{ cm}^5 \text{ cm}^6 \text{ cm}^7$

el triángulo aritmético que se conoce con el nombre de TRIANGULO ARITMETICO DE PASCAL-TARTAGLIA.

Los números de la segunda columna forman la serie natural de los números naturales y se llaman números figurados de primer orden o naturales. Los de la tercera columna están formados por el número de combinaciones que se puedan formar sucesivamente con 2 objetos, con 3, con 4, ..., con m objetos, tomados siempre de dos en dos y se los conoce como números figurados de segundo orden o triangulares. Los de la cuarta columna son las combinaciones que se pueden hacer con 3 objetos, con 4, con 5, ..., con m objetos, tomados de tres en tres y se llaman números figurados de tercer orden o piramidales. La quinta columna está formada por el número de combinaciones que se pueden formar con 4 objetos, con 5, ..., con m objetos, tomados de cuatro en cuatro, llamándose los números figurados de cuarto orden o triangulares. En general, los números que constituyen la columna $(n+1)$ ésima, se llaman números figurados de enésimo orden.

En cambio, los números de una fila cualquiera de orden $(n+1)$ son los números de combinaciones que se pueden formar con m objetos tomados de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, etc.

4.7.3.~ PROPIEDADES

1) Un número cualquiera del triángulo de Pascal es igual a la suma del que está inmediatamente arriba, más el que está a la izquierda de este último.

Así por ejemplo: el número 21 de la columna tercera y fila octava es igual a la suma del 15 que está inmediatamente arriba, más el 6 que está a su izquierda. Esta propiedad nos permite escribir una fila cualquiera del triángulo conociendo la anterior y construirlo con rapidez.

2)~ Un número cualquiera del triángulo de Pascal es igual a la suma de todos los de la columna anterior que están por encima de su fila.

Así, el número 35 de la 4a. columna y 8a. fila es igual a :

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1$$

ARTIMETICO GENERAL

| | | | | | | |
|----|------|--------|---------|--------|------|------|
| a | | | | | | |
| a | b | | | | | |
| a | a+b | b | | | | |
| a | 2a+b | a+2b | b | | | |
| a | 3a+b | 3a+3b | a+3b | b | | |
| a | 4a+b | 6a+4b | 4a+6b | a+4b | b | |
| a | 5a+b | 10a+5b | 10a+10b | 5a+10b | a+5b | |
| -- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- |
| -- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- | ---- |

En el que también se verifica:

3) Un número cualquiera es igual a la suma del inmediato superior más el que está a la izquierda de este último.

1) Un número cualquiera es igual a la suma del inmediato superior, más el que está a la izquierda de este último.

Ejemplo:

$$4a + 6b = (a + 3b) + (3a + 3b)$$

2) Un número cualquiera es igual a la suma de todos los de la columna inmediata anterior que están arriba de la fila del número considerado.

Ejemplo:

$$(10a + 10b) = (6a + 4b) + (3a + 3b) + (a + 2b) + b$$

4.7.5.- APLICACION

Una de las más directas aplicaciones del triángulo mencionado, es la del cálculo del número de balas esféricas que pueden haber una pila de forma triangular, cuadrangular y rectangular.

4.7.6. EL NUMERO e

Existe un binomio particular $(1 + \frac{1}{n})$ cuya potencia enésima llevada al límite cuando n se acrecienta cada vez más hasta tomar valores superiores a cualquiera fijado, por grande que éste sea, que tiene una importancia extraordinaria en el Análisis Matemático. Consideremos la expresión:

$$z = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Si damos a n valores crecientes, z tomará los valores que se leen en el cuadro:

| n | 1 | 10 | 100 | 1.000 | 10.000 | 100.000 |
|---------------------------|---|-------|-------|-------|--------|---------|
| $z = (1 + \frac{1}{n})^n$ | 2 | 2,594 | 2,705 | 2,717 | 2,7182 | 2,71827 |

Se observa que z tiende a aproximarse a un valor límite cuyas tres primeras cifras decimales ya se van repitiendo: 2,718 cuando n va teniendo a valores cada vez mayores.

Para poder calcularlos, desarrollemos el binomio

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} (\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (\frac{1}{n})^3 + \dots$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 2 + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \frac{n^4}{4!} + \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{4!} + \dots$$

A medida que n adquiere valores más grandes, aumenta el número de términos de esa suma y son cada vez menores los valores de $\frac{1}{n}$; $\frac{2}{n}$; $\frac{3}{n}$ --- y cuando $n \rightarrow \infty$, el número de sumandos es infinito, con lo cual la suma se ha convertido en una serie y $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ lo mismo que $\frac{2}{n}$; $\frac{3}{n}$, etc., en tal caso, se podrá escribir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

y en Análisis Matemático se demuestra que la serie del segundo miembro converge a un valor determinado, comprendido entre 2 y 3, que se denomina número e, compuesto de infinitas cifras decimales y que no es raíz de ninguna ecuación algebraica, y cuyo valor exacto lo da esa serie, que abreviadamente se escribe así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818285 \dots$$

4.7.7.- SUMA DE POTENCIAS DE NUMEROS NATURALES

Una aplicación de la fórmula de la potencia de un binomio, es el cálculo de la suma de potencias semejantes de los m primeros números naturales:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + m^k$$

para calcular S_k , en la igualdad

$$(x+1)^{k+1} = x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k + \binom{k+1}{2} x^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{1} x + 1$$

hagamos sucesivamente:

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots, m;$$

sumando y simplificando, resulta:

$$(m+1)^{k+1} = \binom{k+1}{1} s_k + \binom{k+1}{2} s_{k-1} + \dots + \binom{k+1}{1} s_1 + m+1$$

fórmula recurrente, que permite calcular s_k , conocidos s_{k-1} , s_{k-2} , -----, s_1

Dando valores sucesivos:

$k = 1, 2, 3, \dots$ obtenemos las fórmulas:

$$s_1 = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$s_2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$s_3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

4.7.8.-

EJERCICIOS

a) Potencias de un Binomio

I) Desarrollar las potencias siguientes:

$$1) (a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$2) (a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$3) (5-4x)^4 = 625 + 2000x + 2400x^2 - 1280x^3 + 256x^4$$

$$4) (2x - 3y)^5 = 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5$$

$$5) (3ac-2bd)^5 = 243a^5c^5 - 810a^4c^4bd + 1080a^3c^3b^2d^2 - 720a^2c^2b^3d^3 + 240acb^4d^4 - 32b^5d^5$$

$$6) (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 - \dots$$

$$7) (1+2x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + \dots$$

$$8) (a^3 - x)^{\frac{1}{3}} = a - \frac{x}{3a^2} - \frac{x^2}{9a^5} - \frac{5x^3}{81a^8} - \frac{10x^4}{243a^{11}} - \dots$$

$$9) \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$10) \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

$$11) \frac{a^2}{(a+x)^2} = a^2(a+x)^{-2} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} - \frac{4x^3}{a^3} + \dots$$

$$12) \quad \sqrt[3]{1-x^3} = (1-x^3)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{9} - \frac{5x^9}{81}$$

$$13) \quad \sqrt{a^2+x} = (a^2+x)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + \frac{x^3}{16a^5} - \frac{5x^4}{128a^7} + \dots$$

$$14) \quad \sqrt{a^2-x^2} = (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$$

$$15) \quad \sqrt[3]{a+x} = (a+x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \left(1 + \frac{x}{3a} - \frac{x^2}{9a^2} + \frac{5x^3}{81a^3} - \frac{10x^4}{243a^4} + \dots \right)$$

$$16) \quad (a^3+x^3)^{\frac{1}{3}} = a \left(1 + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{2x^6}{3 \cdot 6a^6} + \frac{2 \cdot 5x^9}{3 \cdot 6 \cdot 9a^9} - \dots \right)$$

$$17) \quad \sqrt[3]{a^3-x^3} = a \left(1 - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{2x^6}{3 \cdot 6a^6} - \dots \right)$$

$$18) \quad (1+x)^{-10} = 1 - 10x + 55x^2 - 220x^3 + 715x^4 - 2002x^5 + \\ + 5005x^6 - 11440x^7 + \dots$$

$$19) \quad (b^3-x^2)^{-8} = \frac{1}{b^{24}} + \frac{8x^2}{b^{27}} + \frac{36x^4}{b^{30}} + \frac{120x^6}{b^{33}} + \frac{330x^8}{b^{36}} + \\ + \frac{792x^{10}}{b^{39}} + \frac{171x^{12}}{b^{42}} + \dots$$

II) Hallar en los desarrollos siguientes el término pedido.-

$$1) \text{ El } 8^{\circ} \text{ de } (1+x)^{11} \quad R = 330 x^7$$

$$2) \text{ El } 7^{\circ} \text{ de } (a^3 + 3ab)^9 \quad R = 61236 a^{15} b^6$$

$$3) \text{ El } 5^{\circ} \text{ de } (3a^2 - 7x^3)^8 \quad R = 13613670 a^8 x^{12}$$

$$4) \text{ El } 6^{\circ} \text{ de } (x - y)^{30} \quad R = -142506 x^{25} y^5$$

$$5) \text{ El } 6^{\circ} \text{ de } (ax + by)^{40} \quad R = 252 a^5 b^5 x^5 y^5$$

$$6) \text{ El } 5^{\circ} \text{ de } (3x^{\frac{1}{2}} - 4y^{\frac{1}{2}})^9 \quad R = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} 3^5 x^{\frac{5}{2}} y^2$$

$$7) \text{ El } 6^{\circ} \text{ de } (2a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}})^{10} \quad R = -\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} 2^5 a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{15}{2}}$$

$$8) \text{ El } 2001^{\circ} \text{ de } (a^{\frac{3}{10}} + x^{\frac{8}{10}})^{2002}$$

$$R = \frac{2002 \times 2001}{2!} a^{\frac{6}{10}} x^{600}$$

b) Potencias de Polinomios

I) Desarrollar las potencias siguientes:

$$1) (1+x-x^2)^4 = 1 + 4x + 2x^2 - 8x^3 - 5x^4 + 8x^5 + 2x^6 - 4x^7 + x^8$$

$$2) (a + 2b - c)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 - 3a^2c - 12abc \\ - 12b^2c + 3ac^2 + 6bc^2 - c^3$$

$$3) (1 + x + x^2)^5 = 1 + 5x + 15x^2 + 30x^3 + 45x^4 + 51x^5 \\ + 45x^6 + 30x^7 + 15x^8 + 5x^9 + x^{10}$$

$$(1 - 2x + x^2)^4 = 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + \\ + 28x^6 - 8x^7 + x^8$$

II) Hallar los coeficientes de los términos que se indican en los desarrollos siguientes:

$$1) \text{ El de } x^5 \text{ en } (1 + 2x + 3x^2)^5 \quad R = 5922$$

$$2) \text{ El de } x^6 \text{ en } (1 - 2x + 3x^2)^7 \quad R = 1590$$

$$3) \text{ El de } x^8 \text{ en } (1 - 2x^2 + 4x^4)^{-2} \quad R = -64$$

$$4) \text{ El de } x^5 \text{ en } (1 + 2x - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad R = -\frac{37}{2}$$

$$5) \text{ El de } x^4y^2 \text{ en } (1 + 2xy + 3x^2)^7 \quad R = 1260x^4y^2$$

$$6) \text{ El de } x^4 \text{ en } (1 + 3x + 5x^2)^5 \quad R = 2005x^4$$

4.7.9.- BIBLIOGRAFIA

- 1.- JUAN DE LA PUIG: "Complementos de Algebra"
Ed. M. Biedma - Bs. As. 1909 .-

- 2.- BERNARDINO SANCHEZ VIDAL: "Lecciones de Algebra"
Ed. Sucesores de Hernando -
Madrid - 1916.-
- 3.- B. NIEWENGLOWSKI: "Cours d' Algebre"
Ed. Armand Colin-París- 1917.-
- 4.- HALL Y KNIGHT: "Ejercicios de Algebra Superior"
Ed. U.T.E.H.A. México -1949.-
- 5.- UGO AMALDI Y F. ENRIQUES: "Complementi di Algebra e Nozioni
di Analisi"
Ed. N. Zanichelli-Bolonia-1950.-
- 6.- ANTONIO TERRY Y RIVAS: "Ejercicios de Algebra"
Ed. N. Moya- Madrid -1914.-

M.m. VI

5.- NUMEROS FRACCIONARIOS

5.1.- CONSTRUCCION GENETICA DE LA ARITMETICA

La Aritmética se construye genéticamente a partir del concepto de número, por ampliaciones sucesivas; este camino fué iniciado por JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831-1916) a partir de la coordinación de conjuntos. Las ideas de Dedekind juntamente con las de GEORG CANTOR (1845-1918) fueron recogidas por ALFREDO CAPELLI (1855-1910, italiano) en su ISTITUZIONI DI ANALISI ALGEBRICA, Nápoles, 1855. El trabajo de Capelli ha sido el punto de partida de nuevos perfeccionamientos siendo el más lógico, hasta nuestros días, el de FEDERICO ENRIQUES (1871-1946) italiano que ha simplificado y dado rigor a la composición de Capelli.-

Hasta época reciente se efectuaban las operaciones aritméticas sin darse cuenta a que leyes obedecían; una oportuna llamada a la intuición permitía pasar de un campo a otro de los números salvando estas dificultades. Recien, a mediados del siglo XIX, se hizo la revisión crítica de los fundamentos de la Matemática, viéndose en la necesidad de remodelar a la Aritmética para adaptarla al pensamiento lógico, aceptándose para ello el llamado PRINCIPIO DE PERMANENCIA O CONSERVACION DE LAS LEYES FORMALES, enunciado incompletamente por GEORGE PEACOCK (1791-1858, inglés) en su SYMBOLICAL ALGEBRA, Cambridge, 1845; fué completado más tarde por HERMANN HANKEL (1839-1873, alemán), cuyo nombre lleva.

Dice este principio " Si dos formas expresadas por los signos generales de la Aritmética universal son equivalentes, se seguirán siendo cuando los signos dejen de designar magnitudes simples y las operaciones reciban un contenido cualquiera "

Este principio sirve de norma para definir las operaciones aritméticas en campos cada vez más amplios, y generaliza, sin nueva demostración, los teoremas antes obtenidos para campos restringidos, pero debe usarse con ciertas precauciones, pues existen sistemas para los cuales su aplicación puede dar origen a proposiciones incompatibles con el sistema más restringido.-

En la ampliación del concepto de número, en las sucesivas fases de la Aritmética, será preciso definir en cada caso las dos operaciones fundamentales: adición y multiplicación. Esto no puede hacerse arbitrariamente, sino de modo que las anteriores propiedades de los números en el campo restringido se conserven en el campo más amplio, pues al no quedar incluidas las propiedades anteriores en las nuevas, como casos particulares, la Aritmética que así se construya, sería contradictoria consigo misma. Para que la Aritmética conserve unidad y armonía, en cada nueva ampliación del concepto de número, definiremos las operaciones en el nuevo campo, de modo tal que subsistan las leyes formales de uniformidad, asociativa, conmutativa, distributiva y conservación del modelo.-

5.2 - LOS SIGNOS DE LA ARITMETICA

Los hindúes y los árabes son los iniciadores del cálculo literal y simbólico, pero recién en el siglo XVI los signos aritméticos se generalizaron y admitieron.-

Los signos $+$ y $-$ fueron inventados por J.W. WIDMANN (1450 ? - ? alemán) que los utilizó por primera vez en su tratado de Aritmética comercial, Leizig, 1489.-

El signo $=$ lo usó por primera vez ROBERT RECORDE (1510-1558, inglés) en el año 1540 en su tratado de Aritmética. Lo usó también WILHELM HOLZMAN (1532-1576, alemán) en su Aritmética de Diofanti, Heidelberg, 1575.-

El signo de multiplicar $\times$, lo usó por primera vez WILLIAM OUGHTRED (1574-1660, inglés) utilizando la cruz de San Andrés en su Clavis Mathematicae, Oxford, 1631.- En cambio THOMAS HARRIOT (1560-1621, inglés) utiliza un punto para indicar esa operación y RENE DESCARTES suprime estos símbolos cuando los factores son literales.- También a HARRIOT se debe el signo $:$ para la división y $>$, $<$ para las desigualdades.- Los signos $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ se deben a PIERRE BOUGUER (1698-1758, francés).- Este mismo signo de dividir fué adoptado por GOTTFRIED WILHELM FREIHERR VON LEIBNITZ (1636-1716, alemán) y en cambio ISAAC NEWTON lo transforma en este otro $\div$ adoptado por los países del habla inglesa.-

El paréntesis $()$ fué introducido por ALBERT GIRAD (1590 ? - 1633 ? , alemán), el signo factorial $!$ por C. KRAMPF (- ? - 1812, alemán)

Los símbolos de la potenciación se deben a RAFFAELE BOMBELLI, italiano hacia 1572, siendo mejorados por FRANCOIS VIETE (1550-1603, francés).- La notación actual es de Descartes.-

La raíz inicialmente indicada con una $\sqrt{\quad}$ de donde el signo $\sqrt{\quad}$ deriva. NICOLAS CHUQUET, francés, a mediados del siglo XV, 1484, y CHR. RODOLFF, alemán, de esa misma época, le agregaron el vínculo correspondiente.-

El símbolo $\equiv$ es debido a KARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855, alemán).-

El paso decisivo en la Historia del Algebra se debe a FRANCOIS VIETE por su invención del cálculo literal, pues aún cuando sus notaciones no son todavía sencillas, representaron el instante en que el cálculo se apropia de estos signos que le han de permitir liberarse de la engorrosa fraseología anterior y desenvolverse más agilmente con su propio simbolismo.-

5.3.- NECESIDAD DE AMPLIAR EL CAMPO DE LOS

NUMEROS NATURALES: EL NUMERO NEGATIVO

La suma de números naturales es siempre posible, pero no lo es la sustracción, cuando el minuendo es menor que el sustraendo; de aquí nace una primera necesidad de ampliar el campo de los números

naturales.- La operación

$$a - b = c$$

no tiene sentido si $a < b$

pero en cambio tiene sentido la resta $b-a$ que da un número negativo, Diremos que si $b > a$ es

$$a - b = -c$$

siendo c un número negativo.-

Los saldos deudor y acreedor de las cuentas corrientes, los grados de temperatura bajo y sobre cero; los años antes y después de Cristo; la hora antes y después del paso del Sol por el Meridiano, etc., son otros tantos ejemplos intuitivos de esta clase de números.-

Prescindiendo del signo, el valor que resulte se llama valor absoluto del número y se lo simboliza así : $|c|$, y se lee, valor absoluto de c.

$$|-5| = 5 \quad |-7| = 7$$

Con la creación del número negativo deja de existir la sustracción como operación independiente, quedando una sola operación con la suma.- En efecto, según lo observa MAX SIMON, alemán, en 1884, efectuar la operación de resta siguiente:

$$a - b = c$$

es lo mismo que hacer la suma:

$$a + (-b) = c$$

en donde se suma a a el opuesto de b .-

Observación: Admitimos, con el principio de Hankel, sin entrar en mayores detalles, que en este nuevo campo, son válidas las definiciones de suma y producto, como operaciones fundamentales, con las respectivas convenciones en cuanto a los signos; así como las propiedades conocidas y válidas para el campo de los números naturales.-

El conjunto de los números naturales más el de los números negativos, constituyen el campo de los números enteros.-

| | | |
|----------------|---|-----------------|
| Nos. naturales | } | Números enteros |
| Nos. negativos | | |

5.4.- Nueva ampliación del campo numérico :

Números fraccionarios.-

El problema de la división crea la necesidad de una nueva ampliación del campo numérico con nuevos entes que permitan dividir en el caso de no ser el dividendo múltiplo del divisor. Estos entes

son los números fraccionarios.- Se debe a LEONARDO PISANO (1270) esta designación, que los llamó números rupti o fracti.-posteriormente 1400 se dió los nombres de numerador y denominador a sus componentes.-

a) Definición: Una fracción es un par de números naturales, no nulos, dados en un cierto orden.-

b) Notación: $\frac{m}{n}$ es un número fraccionario

m = numerador n = denominador

$$n \neq 0$$

Las fracciones son positivas o negativas según sea su signo, por ejemplo :

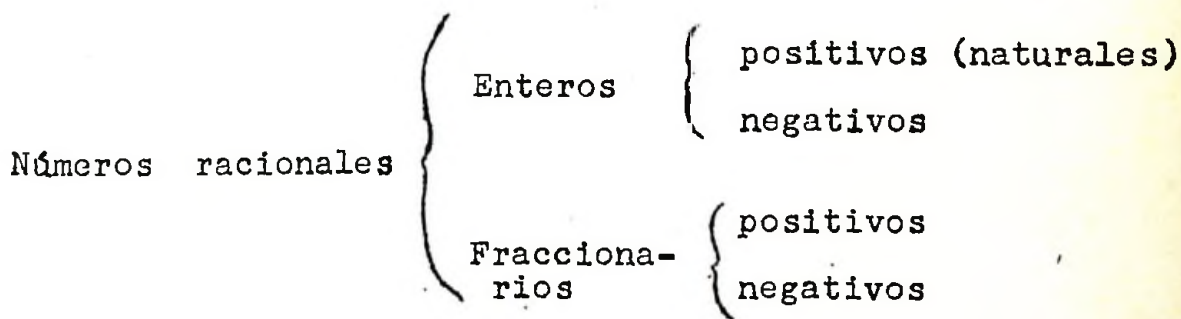
$+\frac{m}{n}$ fracción positiva

$-\frac{m}{n}$ fracción negativa

Si $\frac{m}{n} = 1$ $-\frac{m}{n} = -m$

obteniéndose un número natural $+\frac{m}{n}$ o un número negativo $-\frac{m}{n}$, quedando incluidos estos números, naturales y negativos, en los números fraccionarios como casos particulares.-

Ampliado ya el concepto de número, se forma con los anteriores, un nuevo campo llamado el de los números racionales que incluye a los anteriores, en la forma que se indica a continuación:



Observación: Se admite, sin enunciarse, que son conocidas las definiciones de las operaciones fundamentales y las leyes formales que las rigen.-

5.5. Fracciones decimales

a) Definición: Son fracciones cuyos denominadores son potencias de 10.-

Se conviene escribir en estas fracciones solo el numerador separando de su derecha por medio de una coma tantas cifras como tenga el exponente de 10 en el denominador. Así por ejemplo:

$$\frac{1536765}{100.000} = \frac{1536765}{10^5} = \frac{15,36765}{5 \text{ lugares}}$$

En general si indicamos con E la parte entera, que puede ser nula. y con a, b, c,, la parte decimal, la fracción puede escribirse así:

$$f = \frac{Eabc \dots 1}{10^n} = \underbrace{E, abc \dots 1}_n$$

Las operaciones fundamentales con las fracciones decimales son conocidas desde la escuela primaria, razón por la cual las consideramos como conocidas.-

b) Noticia histórica:

Las fracciones decimales aparecen por primera vez en la obra de SIMON STEVIN (1548-1620, belga) publicada en Brujas, en el año 1585. En su Aritmética práctica escribe el número 5,673 bajo la forma 5,6⁷3^m.- JOBST BURGUI (1552-1632, suizo) escribía ese mismo número 5,673 bajo la forma 5673 cuya notación se la halla también en las tablas LOGARITHMORUM CHILIAS PRIMA, 1617 de HENRY BRIGGS (1661-1631, inglés).-

En la obra de JOHN NAPIER (1550-1617, escocés), conocido por NEPER más corrientemente, titulada MIRIFICI LOGARITHMORUM CANONIS CONSTRUCTIVIC, Edimburgo, 1619, el número 5,673 viene simbolizado así : 5673, en donde se subrayan las cifras decimales.-

Más tarde HENRY BRIGGS separó la parte entera de la decimal por medio de un punto, vale decir, que el número 5,673 viene escrito así: 5.673.-

En esta forma se conserva en los países del habla inglesa, pero a principios del siglo XVIII, con la adopción del sistema Métrico-decimal, generalizó la notación actual, que fué iniciada por J. WALLIS (1616-1703) en su obra MATHESES UNIVERSALIS, Oxoniae 1657.-

c) CONVERSION DE FRACCIONES DECIMALES

Convertir una fracción ordinaria en decimal es hallar otra fracción decimal que le sea equivalente, o que se le aproxime tanto como se quiera.-

Teorema I: La condición necesaria y suficiente para que una fracción irreducible se convierta exactamente en decimales, es que su denominador no contenga más factores que 2 y 5.-

En general, se entiende por simplificar una fracción, a transformarla, en otra igual, de términos menores que los suyos.-

Una fracción es irreducible o está reducida a su más simple expresión, cuando no puede ser simplificada.-

Una fracción cuyos términos son primos entre sí, es irreducible. Para reducir una fracción a su expresión más sencilla, bastará dividir los dos términos por su máximo común divisor.-

Ejemplo:

$$\frac{34.188}{85.470} = \frac{17.094}{42.735} = \frac{5.698}{14.245} = \frac{518}{1.295} = \frac{74}{185} = \frac{2}{5}$$

Se han suprimido los factores comunes 2, 3, 11, 7 y 37 respectivamente.

Teorema II: Cuando una fracción ordinaria irreducible contiene en su denominador factores primos distintos del 2 y del 5, da origen a una fracción decimal indefinida.-

Ejemplo: $\frac{2}{13} = 0,1538 \dots\dots\dots$

indicando con los puntos todas las cifras decimales indefinidas.-

d) FRACCIONES DECIMALES PERIODICAS

Cuando en una fracción decimal indefinida, las cifras se repiten periódicamente y en el mismo orden, a partir de un cierto lugar, la fracción se llama fracción decimal periódica; y el conjunto de cifras repetidas se llama período. Si el período empieza desde la coma, la fracción es periódica pura; y se llama periódica mixta en el caso contrario; la parte no periódica se halla comprendida entre la coma y el primer periódico.-

Ejemplo:

- a) 0,378378378 fracción periódica pura
de período 378
b) 0,52461461461 fracción periódica mixta
de período 461, siendo 52 la parte no periódica.

Notación:

0,378 es la fracción periódica pura
0,52461 es la fracción periódica mixta

Las fracciones decimales periódicas, que son casos particulares de las fracciones decimales indefinidas, son las únicas de esa clase que dan origen a fracciones ordinarias.

Teorema I: La fracción ordinaria, generatriz de una decimal periódica pura, sin parte entera, tiene por numerador el período y por denominador un número formado de tantos nueves como cifras tiene el período.

Sea la fracción $0,\overline{abc}$

llamando f la fracción pedida, se tendrá:

$$\begin{aligned}
 f &= 0, \overline{abc} \\
 1000.f &= \overline{abc, abc} \\
 \hline
 999.f &= \overline{abc} \\
 \\
 f &= \frac{abc}{999}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: $0, \overline{045} = \frac{45}{999} = \frac{15}{333} = \frac{5}{111}$

Si la fracción propuesta tuviese parte entera, que designaremos por E, se obtendría :

$$\begin{aligned}
 E, \overline{abc} &= E \frac{abc}{999} = \frac{E.999 + abc}{999} = \frac{E(1000-1) + abc}{999} \\
 &= \frac{E000 - E + abc}{999} = \frac{Eabc - E}{999}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{E, \overline{abc} = \frac{Eabc - E}{999}}$$

Ejemplo : $3, \overline{235} = \frac{3235 - 3}{999} = \frac{3232}{999}$

TEOREMA II : La fracción ordinaria, generatriz de una fracción decimal periodica mixta, sin parte entera, tiene por numerador el conjunto de la parte no periodica seguida del periodo, disminuido, en la parte no periodica; y por denominador un número formado de tantos nueves como cifras tiene el periodo, seguido de tantos ceros como cifras hay en la parte no periodica.-

Si la fracción es $0, \overline{mnabc}$, llamando f a la fracción ordinaria equivalente se tendrá :

$$\begin{aligned}
 f &= 0, \overline{mnabc} \\
 100.000.f &= \overline{mnabc, abc} \\
 100.f &= \overline{mn, abc}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (100.000-100)f &= mnabc - mn \\
 99900f &= mnabc - mn
 \end{aligned}$$

$$f = \frac{mnabc - mn}{99900}$$

Ejemplo :

$$0,34756 = \frac{34756 - 34}{99900} = \frac{34722}{99900} = \frac{17361}{49950} = \frac{1929}{5550} = \frac{643}{1850}$$

Utilizando el teorema I) se puede escribir :

$$100 f = mn,abc = \frac{mnabc - mn}{999}$$

$$f = \frac{mnabc - mn}{99900}$$

Si la función periódica mixta tiene parte entera E, obtendríamos:

$$E, mnabc = \frac{Emnabc - Emn}{99900}$$

Ejemplo:

$$8,02083 = \frac{802083 - 80208}{90000} = \frac{721875}{90000} = \frac{385}{48}$$

5.6.- EJERCICIOS

a) Operaciones con fracciones

$$1) \quad \frac{\frac{55}{48}}{3\frac{7}{8}} = \frac{55}{186}$$

$$2) \quad \frac{705\frac{5}{9}}{13\frac{8}{15}} = 52\frac{22}{609}$$

$$3) \quad \frac{11.457 \frac{14}{17}}{\frac{137}{5}} = 83 \frac{3277}{16.388}$$

$$4) \quad \frac{\frac{3}{4} \times \frac{7}{8}}{\frac{15}{16} \times 7} = \frac{1}{10}$$

$$5) \quad \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{7}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{14}} = \frac{1}{2}$$

$$6) \quad \frac{3\frac{1}{3}}{7} \div \frac{2}{10\frac{1}{2}} - \left(\frac{5}{18} \times \frac{4}{7} \right) \times 1\frac{3}{4} = \frac{8}{9}$$

$$7) \quad \frac{\frac{3}{3\frac{1}{4}}}{9 + \frac{2}{7}} = \frac{195}{223}$$

$$8) \quad \frac{3\frac{1}{4} - \left(\frac{5}{6} \times \frac{4}{15} \right)}{21\frac{1}{5} - \frac{3}{10} + \left(\frac{1}{3} \times 5 \right)} = \frac{109}{1554}$$

$$9) \quad \frac{2\frac{3}{4} - \left(\frac{5}{2} \times \frac{7}{3\frac{4}{5}} \right) - \frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}}{1 \frac{77}{228}} = 5$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \\
 10) \frac{1 \frac{1}{2} - \frac{23}{38}}{2 \quad 38}
 \end{array}$$

b) FRACCIONES DECIMALES PERIODICAS

$$1) \quad 0,1\overline{65} = \frac{82}{495}$$

$$2) \quad 0,1458\overline{3} = \frac{7}{48}$$

$$3) \quad 0,0123\overline{6} = \frac{17}{1375}$$

$$4) \quad 8,0208\overline{3} = \frac{385}{48}$$

$$5) \quad \frac{0,375\overline{92}}{0,05} = 6,7\overline{6}$$

$$6) \quad \frac{411,351\overline{9}}{58,764\overline{5}} = 7$$

$$7) \quad \frac{0,59\overline{3}}{1,78} \times \frac{0,3\overline{6}}{0,072} = 1,68350\overline{1}$$

$$8) \quad \frac{4,5\overline{5} + 2,7\overline{7} - 0,45\overline{3}}{0,54\overline{6} + 0,7 - 0,02\overline{6}} = 5 \frac{22}{73}$$

$$9) \quad \frac{0,004}{0,0005} = 1$$

$$\begin{array}{r}
 \overline{3,5 - 1,83} \times \overline{71} \\
 10) \overline{9,7 - 6,4} = 0,05 \\
 \overline{3,1 \times 0,101} \\
 2,15
 \end{array}$$

M.m. VII

12/9/1955

5.8. POTENCIAS DE EXPONENTES NEGATIVOS.

I) Definición: Aplicando el teorema del cociente de dos potencias de igual base se tiene:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^m}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n}$$

según que sea:

$$m \geq n$$

se tendrá

$$m = n + p; \quad m = n; \quad n = m + p$$

Para el primer caso es:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^p$$

Para el segundo:

$$\frac{a^m}{a^n} = 1$$

y para el tercero

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^p}$$

convendremos para evitar estos tres casos que:

$$1) \quad a^0 = 1 \quad 2) \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

con estos dos convenios, es válida la primera fórmula para los tres casos, cualesquiera sea el valor de $p = m - n$ y se cumplen las mismas reglas operativas que para las potencias de exponente positivo. En efecto:

II) PROPIEDADES :

a) Para multiplicar dos potencias de igual exponente,

se multiplican las bases y se conserva el mismo exponente.-

según los dos casos posibles, resulta:

$$a^m \cdot b^m = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^m \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^m = \overbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}^m$$

$$\boxed{a^m \cdot b^m = (ab)^m}$$

$$a^{-m} \cdot b^{-m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{1}{(ab)^m} = (ab)^{-m}$$

$$\boxed{a^{-m} \cdot b^{-m} = (ab)^{-m}}$$

b) Para dividir dos potencias de igual exponente se dividen las bases y se conserva el exponente.

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^m}{\overbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^m} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_m$$

$$\boxed{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

$$\frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\right)^m =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$$

$$\boxed{\frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}}$$

c) Para multiplicar dos potencias de la misma base basta sumar los exponentes

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^m \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n = a^{m+n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n}$$

d) Para dividir dos potencias de la misma base, basta restar los exponentes, conservando la misma base.-

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m} \cdot a^{+n} = a^{-m+n}$$

pues dividir por a^{-n} es lo mismo que multiplicar por su recíproco

$\frac{1}{a^{-n}} = a^{+n}$. Para englobar los exponentes positivos, pondremos:

$$\frac{a^{+m}}{a^{+n}} = a^{+m} \cdot a^{-n} = a^{+m-n}$$

e) Para elevar una potencia a otro exponente, se multiplican ambos exponentes, conservando la misma base.-

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^n = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a^{-m})^n = \overbrace{a^{-m} \cdot a^{-m} \cdot \dots \cdot a^{-m}}^n = a^{\overbrace{-m-m-\dots-m}^n}$$

$$(a^{-m})^n = a^{-m \cdot n}$$

$$(a^{+m})^{-n} = \frac{1}{(a^{+m})^n} = \frac{1}{a^{+m \cdot n}} = a^{-m \cdot n}$$

$$(a^{+m})^{-n} = a^{-m \cdot n}$$

5.9. SERIES DE FRACCIONES IGUALES

I) Definición: Se designa con el nombre de serie de fracciones iguales a una expresión de la forma:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots\dots\dots \frac{a_n}{b_n} = \lambda$$

siendo $a_1, a_2, \dots\dots\dots a_n$; $b_1, b_2, \dots\dots b_n$, números racionales cualesquiera, distintos de cero.-

Los números $a_1, a_2, \dots\dots\dots a_n$ son proporcionales a los $b_1, b_2, \dots\dots\dots b_n$, y el valor común de estas fracciones se llama razón de proporcionalidad que hemos designado con λ .-

De la relación anterior se obtiene:

$$a_1 = \lambda \cdot b_1; a_2 = \lambda \cdot b_2; \dots\dots\dots; a_n = \lambda \cdot b_n$$

y sumándolas miembro a miembro resulta:

$$a_1 + a_2 + \dots\dots\dots + a_n = \lambda (b_1 + b_2 + \dots\dots + b_n)$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots\dots\dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots\dots\dots + b_n} = \lambda$$

lo mismo obtendríamos restándoles, de modo que podrá escribirse:

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm \dots\dots\dots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm \dots\dots\dots \pm b_n} = \lambda$$

o bien

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} = \lambda}$$

Obtenemos la siguiente propiedad:

I) La fracción cuyo numerador es una suma algebraica de los numeradores (distinta de cero), y su denominador la suma algebraica análogamente formada con los denominadores, es igual a las fracciones dadas
Si una de estas sumas es nula, también lo es la otra.-

Más general:

Si a cada igualdad anterior se la multiplica por una constante k_1 , se obtiene:

$$a_1 k_1 = b_1 k_1 \lambda$$

$$a_2 k_2 = b_2 k_2 \lambda$$

$$\vdots$$

$$a_n k_n = b_n k_n \lambda$$

$$a_1 k_1 \pm a_2 k_2 \pm \dots \pm a_n k_n = \lambda (b_1 k_1 \pm b_2 k_2 \pm \dots \pm b_n k_n)$$

$$\frac{a_1 k_1 \pm a_2 k_2 \pm \dots \pm a_n k_n}{b_1 k_1 \pm b_2 k_2 \pm \dots \pm b_n k_n} = \lambda$$

$$b_1 k_1 \pm b_2 k_2 \pm \dots \pm b_n k_n$$

o sea

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i k_i}{\sum_{i=1}^n b_i k_i} = \lambda$$

válida siempre que el denominador

$$\sum_{i=1}^n b_i k_i \neq 0$$

II) PROPORCION: se llama así a la igualdad de dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

o bien

$$a : b = c : d$$

se designa a:

a y d como extremos de la proporción

b y c como medios

De la igualdad anterior se deduce que:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL: En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.-

Además, de ella se deduce que:

Pueden efectuarse con los términos de una proporción todos los cambios de lugar que no alteren la igualdad del producto de extremos con el producto de medios, con lo que es permitido invertir el orden de los extremos y el de los medios.-

Combinando esta propiedad con la I) se obtienen otras tantas proporciones muy útiles en el cálculo, Por ejemplo:

a) En toda proporción la suma ^{o diferencia} de los dos primeros términos es la suma de los segundos, como el segundo es al cuarto o como el primero es al tercero.-

si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

b) En toda proporción la suma o diferencia de antecedentes es a la suma de consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.

si
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

c) En toda proporción la suma de los dos primeros términos es a su diferencia, como la suma de los dos últimos es a la suya.-

si
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$$

d) En toda proporción la suma de antecedentes es a su diferencia, como la suma de consecuentes es a la suya.-

Si
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$$

e) En toda proporción, se puede multiplicar o dividir los antecedentes y consecuentes de sus razones por un mismo número sin que la proporción varíe.

si
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{c \cdot m}{d \cdot m}$$

$$\therefore \frac{a : m}{b : m} = \frac{c : m}{d : m}$$

f) Las potencias de un mismo grado de los cuatro términos de una proporción están también en proporción.-

si
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

o sea $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m$

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$$

g) Las raíces del mismo índice de los cuatro términos de una proporción forman también proporción.-

si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}}$$

o bien

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$$

5.9. BIBLIOGRAFIA:

- 1) Julio Rey Pastor: "Elementos de Análisis Algebraico"
Madrid- 1930.-
- 2) Francisco Vera: "Nociones de Aritmética Moderna".
Edic. Instituto Gráfico-Bogotá-Colombia-1943
- 3) Manuel Benitez-Ignacio Salinas: "Aritmética"
Edic. Sucesores de Hernando-Madrid 1913
- 4) Carlo Bourlet: "Cours Abrégé d' Arithmetique"
Edic. Hachette-Paris-1914
- 5) Bernardino Sanchez Vidal: "Lecciones de Aritmética"
Edic. Hernando-Madrid-1928
- 6) Reunión de Professeurs: "Exercices d' Arithmétique"
Edic. Librairie Générale de l'Enseignement
Libre-Paris-1940
- 7) Ettore Bortolotti-Duilio Gigli: "Aritmética Pratica"
Enciclopedia delle Matematiche Elementari
e Complementi-Edic. U.Hoepli- Vol.I., la
parte-Milán-1930.-

5.10. ALGORITMO DE LAS PROGRESIONES

5.10.1.-PROGRESIONES

La palabra progresión derivada del latín progressio, aparece por primera vez con el significado de operación en el Tractatus de arte numerandi de J.Holywood conocido por Sacrobosco, escrito en París, alrededor del año 1249 e impreso por primera vez en 1488 en Estrasburgo con el Computus manualis de ANIANO.-

DEFINICION: Una sucesión finita o indefinida de números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, forman una progresión si dado un elemento de ella excepto el último, existe el sucesivo.-

Los números enteros, dispuestos, en orden creciente, constituyen una progresión.-

Una progresión puede estar limitada a la izquierda o a la derecha, o en ambos sentidos; en el primero de estos casos, el término inicial, llamado origen, se le colocará índice 0 y al término genérico con índice m.-

5.10.2.- PROGRESIONES ARITMETICAS ORDINARIAS

Las progresiones aritméticas más simples se hallan en el PAPIRO RHIND; los pitagóricos las consideraron al estudiar la suma y los números poligonales. La regla para calcular la suma de sus términos fué demostrada por DIOFANTO DE ALEJANDRIA (siglo III ad de J.C.),

Cuando cada término de la sucesión se deduce del anterior sumándole un número fijo d (positivo o negativo), llamado diferencia de la progresión se obtiene la progresión aritmética ordinaria.

Para cualquier entero n se tiene:

$$(k) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + d \\ a_{n+2} = a_{n+1} + d \\ \dots\dots\dots \\ a_{n+k} = a_{n+k-1} + d \end{array} \right.$$

se obtiene una sucesión

$$a_{h+1} ; a_{h+2} ; \dots ; a_{h+k} ; \dots$$

que forman una sucesión.

PROPIEDADES:

Sumando estas igualdades y suprimiendo en ambos miembros los términos comunes, se obtiene:

$$a_{h+k} = a_h + (k-1)d \quad (1)$$

I) El término posterior a otro en (k+1) lugares, es igual a éste más (k-1)d

En (1) se obtiene:

$$a_h = a_{h+k} - (k-1)d \quad (2)$$

II) El término anterior a otro en (k+1) lugares, es igual a éste menos (k-1)d

Si

$h+k = m$ es el último lugar de una sucesión de m términos y es h el primero, resulta, en (1)

$$a_m = a_1 + (m-1)d \quad (3)$$

III) El último término de una progresión aritmética ordinaria, finita de m términos, es igual al primero más la diferencia por el número de términos menos uno.

Y haciendo lo mismo en (2) es:

$$a_1 = a_m - (m-1)d \quad (4)$$

IV) El primer término de una progresión aritmética ordinaria, finita de m términos, es igual al último menos la diferencia por el número de términos menos uno.

Consideramos en la proporción finita:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$$

dos términos cualesquiera, equidistantes de los extremos a_1 y a_m , por ejemplo:

$$a_{1+k} \quad \text{y} \quad a_{m-k}$$

para

$$k < m$$

teniendo presente la propiedad I) es:

$$a_{1+k} = a_1 + kd$$

$$a_{m-k} = a_m - kd$$

sumando es:

$$a_{1+k} + a_{m-k} = a_1 + a_m$$

(5)

luego

V) La suma de dos términos cualesquiera equidistantes de los extremos, es igual a la suma de éstos

SUMA DE LOS M TERMINOS CONSECUTIVOS.

Sea

$$\sum_{i=1}^m a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = a_m + a_{m-1} + \dots + a_2 + a_1$$

sumando ambas igualdades resulta:

$$2 \sum_{i=1}^m a_i = \overbrace{(a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \dots + (a_{m-1} + a_2) + (a_m + a_1)}^m$$

y teniendo en cuenta la igualdad (5) puede escribirse

$$2 \sum_{i=1}^m a_i = m(a_1 + a_m)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^m a_i = \frac{m(a_1 + a_m)}{2}$$

pero siendo

$$a_m = a_1 + (m-1)d$$

$$\therefore \sum_{i=1}^m a_i = \frac{m(a_1 + a_1 + (m-1)d)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = ma_1 + \frac{m(m-1)}{2} d$$

o bien

$$\sum_{i=1}^m a_i = ma_1 + \binom{m}{2}d$$

(6)

VI) La suma de m términos consecutivos de una progresión aritmética es igual a la mitad de m veces la suma de sus extremos.

Para $a_1 = 1$ la expresión (6) es la expresión del m-ésimo número poligonal de $d+2$ lados; en particular, para

$$d = 1, 2, 3, 4, \dots$$

se obtiene el m-ésimo número triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.

VII) Ejemplo 1) SUMA DE LOS m PRIMEROS NUMEROS ENTEROS.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + m$$

forman una progresión aritmética de diferencia igual a 1. Aplicando la expresión (6) es:

$$S = m \cdot 1 + \binom{m}{2} \cdot 1 = m + \frac{m(m-1)}{2}$$

$$S = \frac{2m + m^2 - m}{2} = \frac{m^2 + m}{2} = \frac{m(1+m)}{2}$$

$$S = \frac{m(1+m)}{2}$$

Ejemplo 2) SUMA DE LOS m PRIMEROS NUMEROS IMPARES

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2m - 1)$$

para obtener el número impar expresado por $(2m - 1)$ se aplicará la fórmula (3)

$$a_m = a_1 + (m - 1)d$$

en nuestro caso $a_1 = 1$ $d = 2$

$$a_m = 1 + 2(m - 1) = 2m - 1$$

$$S = \frac{(a_1 + a_m)m}{2} = \frac{(1 + 2m - 1)m}{2}$$

$$S = m^2$$

Ejemplo 3) SUMA DE LOS m PRIMEROS NUMEROS PARES

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + (2m-2) + 2m$$

en este caso es

$$a_1 = 2 ; d = 2 \quad \underline{m} \text{ número de términos}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_m &= a_1 + (m-1)d \\ a_m &= 2 + (m-1)2 \\ a_m &= 2 + 2m-2 \\ a_m &= 2m \end{aligned}$$

$$S = \frac{m(a_1 + a_m)}{2} = \frac{m(2 + 2m)}{2}$$

$$\therefore \boxed{S = m(m+1)}$$

INTERPOLAR m MEDIOS ENTRE OTROS DOS DADOS

Interpolare entre dos números dados a_1 y a_m un cierto número $\underline{m}$ de términos diferenciales es formar una progresión aritmética cuyos extremos sean a_1 y a_m y $\underline{m+2}$ el número total de términos. Los $\underline{m}$ términos intermedios se llaman medios diferenciales.

En esta progresión es:

$$a_m = a_1 + d(m+1)$$

$$\therefore \boxed{d = \frac{a_m - a_1}{m+1}}$$

será la diferencia de la progresión requerida.

Ejemplo:

Interpolare 12 medios diferenciales entre los dos números 1 y 40

$$\therefore d = \frac{40 - 1}{12 + 1} = \frac{39}{13} = 3$$

la progresión pedida será:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40

5.10.3.- PROGRESIONES GEOMETRICAS ORDINARIAS

Las progresiones geométricas eran conocidas por los babilonios y los egipcios, que estudiaron el problema de la interpolación M.m.VIII

de medios y la suma de los términos consecutivos. Euclides de Alejandría (300 a. de J.C.) da en el libro IX de sus Elementos una regla para calcular la suma. Aparece más tarde esta regla en el Algorismatus de PROSDOCIMO DE BELDOMANDI, publicado en Padua en el año 1483.

Se llama progresión geométrica ordinaria a toda sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, en que el cociente de cada término por el anterior es una cantidad constante llamada razón de la progresión. Es decir que para un h cualquiera es

$$\frac{a_{h+1}}{a_h} = q \gtrless 1$$

la razón se llama también cociente de la progresión. Si $q > 1$ la progresión es creciente y si $q < 1$ es decreciente.

De la relación anterior se obtiene:

$$(k) \left\{ \begin{array}{l} a_{h+1} = q \cdot a_h \\ a_{h+2} = q \cdot a_{h+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{h+k} = q \cdot a_{h+k-1} \end{array} \right.$$

multiplicando miembro a miembro y simplificando, resulta:

$$a_{h+k} = q^k \cdot a_h \quad (1)$$

I) Un término posterior a otro en $(k+1)$ lugares, es igual a éste más q^k .

De (1) se deduce:

$$a_h = a_{h+k} \cdot q^{-k} \quad (2)$$

II) Un término anterior a otro en $(k+1)$ lugares, es igual a éste dividido por q^k .

Si $h+k = m$ y se designa con a_m el último término de la progresión finita de m términos en la cual h es el primer lugar cuyo término designamos con a_1 , se obtiene:

$$a_m = a_1 \cdot q^{m-1} \quad (3)$$

III) El último término de la progresión geométrica ordinaria es igual al primero por la razón elevada al número de términos menos uno.

De (3) se obtiene:

$$a_1 = a_m \cdot q^{-m+1} \quad (4)$$

IV) El primer término de la progresión geométrica ordinaria es igual al último dividido por la razón elevada al número de términos menos uno.

Consideremos en la progresión finita

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{m-1} \cdot a_m$$

Los términos equidistantes de los extremos a_1 y a_m , por ejemplo:

a_{1+k} y a_{m-k} para $k > m$ teniendo presente la propiedad I) es:

$$\begin{aligned} a_{1+k} &= a_1 \cdot q^{k-1} \\ a_{m-k} &= a_m \cdot q^{-k+1} \end{aligned}$$

multiplicando miembro a miembro resulta:

$$\boxed{a_{1+k} \cdot a_{m-k} = a_1 \cdot a_m} \quad (5)$$

V) El producto de dos términos cualesquiera equidistantes de los extremos, es igual al producto de éstos.

PRODUCTO DE LOS TERMINOS CONSECUTIVOS.

Sea

$$\prod_{i=1}^m a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{m-2} \cdot a_{m-1} \cdot a_m$$

$$\therefore \prod_{i=1}^m a_i = a_m \cdot a_{m-1} \cdot a_{m-2} \cdot \dots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicando ambas igualdades, resulta:

$$\left(\prod_{i=1}^m a_i \right)^2 = (a_1 \cdot a_m) (a_2 \cdot a_{m-1}) \dots (a_{m-1} \cdot a_2) (a_m \cdot a_1)$$

y teniendo en cuenta la propiedad (5) es:

$$\left(\prod_{i=1}^m a_i \right)^2 = (a_1 \cdot a_m)^m$$

o sea

$$\boxed{\prod_{i=1}^m a_i = \sqrt{(a_1 \cdot a_m)^m}} \quad (6)$$

VI) El producto de los m términos consecutivos de una progresión geométrica ordinaria es igual a la raíz cuadrada de la m-ésima potencia del producto de los extremos.

SUMA DE LOS TERMINOS CONSECUTIVOS

$$\sum_{i=1}^m a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{m-1} + a_m$$

Multiplcando ambos miembros por la razón q :

$$q \sum_{i=1}^m a_i = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \dots + a_{m-1} q + a_m q$$

como $a_1 q = a_2$; $a_2 q = a_3$ $a_{m-1} q = a_m$

es

$$q \sum_{i=1}^m a_i = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_m \quad (7)$$

Restando la (8) de la (7) es:

$$\sum_{i=1}^m a_i - q \cdot \sum_{i=1}^m a_i = a_1 - a_m q$$

$$\therefore \sum_{i=1}^m a_i (1-q) = a_1 - a_m \cdot q$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^m a_i = \frac{a_1 + a_m \cdot q}{1 - q}} \quad (9)$$

Como

$$a_m = a_1 \cdot q^{m-1}$$

es

$$\sum_{i=1}^m a_i = a_1 \frac{1 - q^m}{1 - q}$$

o bien

$$\boxed{\sum_{i=1}^m a_i = a_1 \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}} \quad (10)$$

Si $q < 1$ $\therefore$

$$\sum_{i=1}^m a_i = a_1 \left(\frac{1}{q-1} - \frac{q^m}{1-q} \right)$$

cuando el número de términos tiende a ser infinito el término

$\frac{q^m}{1-q} \rightarrow 0$ pues el numerador tiende más rápidamente a cero que el denominador; quedando :

$$\sum_{i=1}^m a_i = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

que nos da la suma de los términos de una progresión con un número infinito de términos,

INTERPOLAR m MEDIOS ENTRE OTROS LOS DATOS

Interpolar entre dos números dados un cierto número m de términos proporcionales, es formar una progresión geométrica cuyos extremos sean esos números y un número total de términos igual a $(m+2)$. Estos m términos interpolados se llaman medios proporcionales.

En esta progresión es:

$$a_m = a_1 \cdot q^{m+1}$$

∴

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{a_m}{a_1}}$$

(11)

Ejemplo:

Interpolar 4 medios proporcionales entre 243 y 1

$$m = 4 \quad a_m = 1 \quad a_1 = 243$$

∴

$$q = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$$

la proporción pedida es:

$$243, 81, 27, 9, 3, 1$$

5.10.4.- EJERCICIOSI) Proporciones

1) Las dos cantidades $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$ y $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt{18}}$ son iguales?

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt[3]{27 \times 2}}{\sqrt{9 \times 2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$$

2) Demostrar que el producto de las cinco razones:

$$\frac{3}{2} ; \frac{15}{10} ; \frac{21}{14} ; \frac{27}{18} \text{ y } \frac{45}{30}$$

es igual a $(\frac{3}{2})^5$.

3) Se da $\frac{17}{a} = \frac{25}{b} = \frac{26}{c} = \frac{30}{d}$

$$\text{y } a.b.c.d. = 26.851.500$$

hallar a, b, c, d.

$$\begin{aligned} \left(\frac{17}{a}\right)^4 &= \left(\frac{25}{b}\right)^4 = \left(\frac{26}{c}\right)^4 = \left(\frac{30}{d}\right)^4 = \frac{17 \times 25 \times 26 \times 30}{a \times b \times c \times d} \\ &= \frac{17 \times 25 \times 26 \times 30}{26.851.500} \end{aligned}$$

$$\therefore a^4 = \frac{26.851.500 \times (17)^4}{17 \times 25 \times 26 \times 30} = 51$$

$$b^4 = \frac{26.851.500 \times (25)^4}{17 \times 25 \times 26 \times 30} = 75$$

$$c^4 = \frac{26.851.500 \times (26)^4}{17 \times 25 \times 26 \times 30} = 78$$

$$d^4 = \frac{26.851.500 \times (30)^4}{17 \times 25 \times 26 \times 30} = 90$$

4) Determinar los cuatro términos de una proporción continua, sabiendo que el producto de sus cuatro términos es 4096, y que el último término es igual a 1 de la suma de los medios.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción continua

$$\therefore b^2 = ac$$

$$\therefore b^2 \cdot ac = b^4 = 4096$$

$$b = \sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$$

Como $c = \frac{1}{4} \cdot (2b) = \frac{1}{4} \cdot (16) = 4$

Pero $b^2 = ac \therefore a = \frac{b^2}{c} = \frac{64}{4} = 16$

La proporción pedida es:

$$\boxed{\frac{16}{8} = \frac{8}{4}}$$

5) Un padre de 48 años tiene dos hijos: el uno de 16 años y el otro de 8; entre los tres hay que repartir proporcionalmente a la edad, 108 naranjas. Se desea saber cuantas le corresponden a cada uno.

a) al padre: $48 \times 16 \times 8 = 72$ años

$$\begin{array}{rcl} 72 \text{ años} & \text{---} & 108 \text{ naranjas} \\ 48 \text{ años} & \text{---} & x \end{array}$$

$$\therefore \frac{x}{48} = \frac{108}{72} \therefore \underline{x = 72}$$

b) al hijo mayor: $\frac{x}{16} = \frac{108}{72} \therefore \underline{x = 24}$

c) al hijo menor: $\frac{x}{8} = \frac{108}{72} \therefore \underline{x = 12}$

II) Progresiones Aritméticas

1) Un cuerpo que cae recorre 4,9 m. en el primer segundo de su caída y, en cada segundo sobrepasa 9,8 m. del que ha sido recorrido durante el segundo precedente. Se pide:

1º) lo que recorre el cuerpo durante el 10º segundo de caída.

2º) el espacio recorrido durante los 10 segundos.

$$L = 4,9 + 9 \times 9,8 = \underline{93,10 \text{ m.}}$$

$$S = (4,9 + 93,10)5 = \underline{490 \text{ m.}}$$

- 2) Un vagón se desprende de un tren que asciende una rampa. El vagón recorre 0,30 m. durante el primer segundo, $3 \times 0,30$ m. durante el 2º segundo, $5 \times 0,30$ m. durante el 3º segundo, $7 \times 0,30$ m. durante el cuarto, etc.
Cuánto recorrerá durante un minuto que dura el descenso?

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos}$$

El vagón recorrerá :

$$0,30(1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 119)$$

$$0,30 \cdot 60^2 = 1080 \text{ m.}$$

- 3) Se sabe que el 2º y el 7º término de una progresión aritmética dan por suma 92; que el 4º con el 11º dan 71. Cuáles son esos cuatro términos?

El primer término es : a; la razón es r

El 2º es: $a + r$

El 7º es: $a + 6r$

$$\therefore 2a + 7r = 92$$

El 4º es: $a + 3r$

El 11º es: $a + 10r$ $\therefore 2a + 13r = 71$

Se tiene así el sistema $\begin{cases} 2a + 7r = 92 \\ 2a + 13r = 71 \end{cases}$

$$\therefore \underline{r = -3,5} \quad a = \underline{58,25}$$

El 2º es 54,75

El 4º es 47,75

El 7º es 32,25

El 11º es 23,35

- 4) Un reloj que da las horas y los cuartos. Cuántos sonidos da en 24 horas?

Durante 12 horas dan :

$$12(1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + \dots + 12) = 198$$

y en 24 horas da 396 sonidos.

- 5) Un marinero deposita en la Caja de Ahorros 6 pesos, y a cada mes siguiente 1,50 mñ. más que en el precedente. Cuánto habrá depositado al cabo de 12 años y 3 meses?

$$R = 16878,50 \text{ mñ.}$$

- 6) Cuál es el precio de un caballo, ajustado a razón de mñ. 1, por el primer clavo de sus herraduras, 3 por el segundo, 5 por el tercero y así sucesivamente hasta completar el número de 24 clavos?

$$R = 576 \text{ mñ.}$$

- 7) Un número compuesto de tres cifras es igual a 26 veces la suma de sus cifras : éstas están en progresión aritmética, y si al número

95

dado se le suman 396, resulta el mismo número invertido. Cuál es el número?

Sea $X Y Z$ el número

$$100 X + 10 Y + Z = 26 (X + Y + Z)$$

$$100 X + 10 Y + Z + 396 = 100 Z + 10 Y + X$$

$$R = 468$$

III) Progresiones Geométricas

- 1) Se quiere saber el valor de un caballo que un chelán ajustó así: que por el primer clavo de los 32 de sus cuatro herraduras debe darse un centavo, por el segundo 2, por el tercero 4, por el cuarto 8, y así de los demás duplicando siempre.

$$R = 42949672,95 \text{ m.n.}$$

- 2) Un barril contiene 240 litros de vino. El 1º de enero se sacó la mitad; al siguiente la mitad del resto; al tercer día la mitad del nuevo resto y así sucesivamente. Cuánto se sacó hasta la tarde del día 31 de dicho mes?

$$R = 239,999.999 \text{ litros.}$$

- 3) Cuentan que Sessa, inventor del juego de ajedrez, instado por su soberano a que pidiera una recompensa proporcionada al mérito de su invención, se contentó con la siguiente, que pareció muy humilde a la generosidad del monarca, a saber: que por la primera casilla se le diese un grano de trigo, 2 por la segunda, 4 por la tercera, y así sucesivamente hasta las 64 que constituyen el tablero. Lo que pedía pues, era un número de granos de trigo igual al de las unidades de la suma de la progresión:

$$\begin{array}{l} \dots 1: 2: 4: 8: 16: \dots \\ \dots \underline{\hspace{1.5cm}} 64 \text{ términos} \end{array}$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1 = \underline{18,446.744.073,709.551,615}$$

granos de trigo

Toda la tierra casi podría producir esa cantidad en 70 años.

- 4) Un labrador emplea anualmente para sembrar sus tierras todo el trigo que recoge. El primer año ha sembrado un hectólitro de trigo: el segundo año recoge 1048576 hectólitros: suponiendo que exista esa relación del trigo en todos los años. Cuál será esta relación?

- 5) El Aquiles de Zenón de Elea:

(Zenón de Elea 460 antes de J.C.)

Se debe a Zenón de Elea la paradoja siguiente: en una porfía para correr, el pie veloz de Aquiles, nunca podrá alcanzar a una tortuga, cuando a esta se le da una pequeña ventaja. En efecto, supongamos que la ventaja sea de 100 metros y que la velocidad de Aquiles sea 10 veces la velocidad de la tortuga. Cuando Aquiles haya recorrido esos 100 m la tortuga habrá recorrido 10; cuando Aquiles haya recorrido 10 m, la tortuga lo habrá aventajado en 1 m; y así sucesivamente, tal que Aquiles llega al punto en el que

ya partió la tortuga, podrá acercarse a ella pero nunca podrá alcanzarla ni aún aventajarla.

Parece que esta paradoja de Zenón formó parte de una polémica con la escuela pitagórica, en la cual Zenón se valía de un razonamiento por reducción al absurdo de la concepción atomística o monádica del espacio o el tiempo adoptada por los pitagóricos.

Dado que estos matemáticos admitían al punto o mónada como parte elemental e irreducible de la línea, de la superficie y del sólido; una suma de infinitos segmentos debería resultar infinita, mientras que una suma de infinitos segmentos puede dar lugar a un valor finito, tal es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuya razón $|q| < 1$

Que Aquiles alcanza a la tortuga en forma efectiva está fuera de dudas y coincide con la experiencia común. En efecto, si se indica con v la velocidad de Aquiles, será $\frac{1}{10} v$ la velocidad de la tortuga.

La ecuación del movimiento uniforme de Aquiles y de la tortuga serán

$$s = vt$$

$$s = 100 + \frac{1}{10} vt$$

en donde, el instante t , en cual Aquiles alcanza a la tortuga, viene definido por la ecuación de primer grado

$$vt = 100 + \frac{1}{10} vt$$

$$\therefore t = \frac{1000}{9v}$$

El camino recorrido por Aquiles será:

$$s = \frac{1000}{9} \text{ m}$$

Si en vez, se quiere razonar, siguiendo el camino propuesto por Zenón, basta observar que la suma de los infinitos segmentos de camino que Aquiles recorre sucesivamente para alcanzar a la tortuga, viene dada por:

$$100 + \frac{100}{10} + \frac{100}{10^2} + \frac{100}{10^3} + \dots$$

$$\text{o sea } 100 \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right)$$

El paréntesis representa una progresión geométrica de infinitos términos de razón $\frac{1}{10} < 1$

...

$$S = a(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots)$$

$$S = a \frac{1}{1 - q}$$

$$S_a = 100 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1000}{9}$$

La suma de los infinitos tramos recorridos por la tortuga es:

$$S_T = \frac{100}{10} + \frac{100}{10^2} + \frac{100}{10^3} + \dots$$

$$S_T = \frac{1000}{9} - 100$$

- 6) De dos países unidos por un camino recto de 10 kms. de longitud, parten simultáneamente, uno hacia el otro, dos carros, arrastrados cada uno por un caballo y andando ambos con la misma velocidad de 5 kms./h. En el mismo instante una mosca que se hallaba posada sobre la frente del primer caballo, parte volando en línea recta, con la velocidad de 15 kms./h., y va a posarse sobre la frente del segundo caballo; parte enseguida de retorno, con la misma velocidad anterior, a posarse sobre la frente del primer caballo; y así sucesivamente, hasta que los dos caballos se encuentran y la mosca es aplastada contra las frentes de ambos caballos. Cuántos kms. ha recorrido la mosca?

Para responder, no es necesario ningún cálculo: los dos caballos se encuentran en la mitad del camino, después de una hora de marcha, y la mosca que siempre vuela a 15 kms./h. ha recorrido precisamente 15 kms. hasta el instante que queda aplastada.

Si en cambio se sigue el camino propuesto en el enunciado del problema, se halla el mismo resultado como suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, de razón menor que 1.

En efecto, calculemos la longitud de los sucesivos vuelos de la mosca. En el primer vuelo, como tiene una velocidad triple respecto a la del caballo, el cual va a encontrar, deberá recorrer los $\frac{3}{4}$ de la distancia inicial de 10 kms. Pero en el instante en

que la mosca se posa sobre la frente del segundo caballo, la distancia del primero, que ya ha recorrido $\frac{1}{4}$ de la distancia inicial,

está reducida a $\frac{1}{2}$ de 10 kms. y de esta nueva distancia la mosca,

en el segundo vuelo, solo debe recorrer los $\frac{3}{4}$, y así sucesivamente.

La suma de las longitudes de los infinitos vuelos viene dada por:

$$S = \frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 10 + \dots =$$

$$S = \frac{15}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right] =$$

En el corchete tenemos una progresión geométrica de infinitos términos de razón $\frac{1}{2} < 1$

$$\therefore S = a \cdot \frac{1}{1 - q}$$

$$S = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 15$$

$$R = \underline{15 \text{ kms.}}$$

5.10.5. Bibliografía

- 1) Ugo Amaldi- Federigo Enriques: "Elementi di Algebra" Vol.I - Ed. Zanichelli - Bolonia - 1951
- 2) Julio Rey Pastor: "Análisis Algebraico" - Madrid - 1930
- 3) Aldo Finzi: "Progressioni" -
Enciclopedia delle Matematiche Elementari - Ed.U.Hoepli
Vol. I parte Ia. - Milán - 1930
- 4) B. Sánchez Vidal: "Lecciones de Aritmética"-Ed.Hernando - Madrid
1928
- 5) Hall y Knight: "Algebra Superior y Ejercicios" - Ed.Uteha - México
1949
- 6) Reunión de Professeurs: "Exercices d'Algebre" - Libre du Maitre -
Ed. Générale de l'Enseignement Libre - Paris - 1939
- 7) A. Terry y Rivas: "Ejercicios de Algebra" Ed. Moya - Madrid - 1914
- 8) A.G.Ioachimescu: "Colección de Problemas de Algebra" - Ed.Boletín
Matemático - Bs.As.- 1940.-

6.- FRACCIONES CONTINUAS

Es posible que los antiguos griegos usaran para el cálculo de ciertos números algunos procedimientos que en el lenguaje moderno equivalen a su tratamiento como valores de las fracciones continuas, tal es la opinión de ER. BORTOLOTTI; F. AUDISIO y E. MACAFERRI, -

En el año 1572, RAFAEL BOMBELLI (1530-1579) en su ALGEBRA ha indicado un procedimiento para la extracción de la raíz cuadrada que mas tarde PIETRO ANTONIO CATALDI (1552-1626) en su Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri, Bolonia, 1613 ha demostrado que no es más que la expresión de la raíz cuadrada por medio de una fracción continua.-

Un estudio mas completo de las fracciones continuas es debido a JOHN WALLIS (1616-1703) en su Arithmetica : infin y LEONHARD EULER (1707-1783) que lo hace en su INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM, Lausana, 1748. En este capítulo debe mencionarse el tratado de OSKAR PERRON (1880) titulado DIE LEHRE VON DEN KETTENBRUCHEN, Leipzig, 1913 que las trata en forma más completa.-

El objeto de las fracciones continuas es hallar por medio de las fracciones ordinarias irreducibles y de términos sencillos, valores aproximados de los números reales y trascendentes, vale decir, en lenguaje corriente, de cantidades conmensurables e inconmensurables.-

6.1.- DEFINICION:

Dada una sucesión finita o indefinida de números racionales cualesquiera:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

de ella se deduce otra sucesión de números racionales llamados fracciones continuas, mediante el algoritmo siguiente:

$$a_1 ; \quad a_1 + \frac{1}{a_2} ; \quad a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} ; \dots a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (2)$$

si los números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ son números naturales, distintos de cero, excepto el a_1 que puede ser nulo, las fracciones continuas se llaman ordinarias y los números $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ reciben el nombre de cocientes incompletos, según que el número de éstos sea par o impar, la fracción continua es de orden par o impar.

Se simplifica la escritura acortando las rayas de las fracciones parciales, , en la forma siguiente:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (3)$$

o bien esta otra, utilizada por algunos autores:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Los números $a_1 ; \frac{1}{a_2} ; \frac{1}{a_3} ; \dots, \frac{1}{a_n}$ se denominan

Fracciones integrantes. La fracción ordinaria que se puede formar considerando una, dos, tres.... o más fracciones integrantes de una fracción continua, se llama fracción convergente o reducida de primer, de segundo, de tercero,, en general, del enésimo orden o lugar.

Así, de la fracción continua:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}$$

La primera reducida es a_1

La segunda reducida es:

$$a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + 1}{a_2}$$

La tercera reducida es:

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} &= a_1 + \frac{1}{\frac{a_2 \cdot a_3 + 1}{a_3}} \\ &= a_1 + \frac{a_3}{a_2 \cdot a_3 + 1} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 + a_3}{a_2 \cdot a_3 + 1} \\ &= \frac{(a_1 \cdot a_2 + 1) \cdot a_3 + a_1}{a_2 \cdot a_3 + 1} \end{aligned}$$

De la observación de estas dos últimas reducidas se deduce la ley de formación de ellas; a saber:

Se forma una reducida de un orden dado agregando al cociente incompleto de la reducida del orden anterior, el cociente incompleto de igual orden que la reducida que se desea, más la reducida que está dos lugares antes de la que se considera.-

6.2.- LEY DE FORMACION

Vamos a demostrar que la ley enunciada antes es cierta para cualquier orden; en efecto, designemos con R_o^n el valor de la reducida de enésimo orden; se tiene:

$$R_o^0 = a_1$$

$$R_o^1 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$$

$$R_o^2 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1}$$

Indiquemos con $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$; $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; $\frac{P_n}{Q_n}$ las fracciones correspondientes

a las reducidas R_o^{n-2} ; R_o^{n-1} ; R_o^n y admitiremos que todas las re-

ducidas anteriores a las R_o^{n-1} estén de acuerdo con la ley de formación anterior; si se logra demostrar que la reducida siguiente R_o^n se forma con la misma ley, ella se cumplirá para cualquier otro caso.-

Supongamos tener:

$$R_o^n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} \cdot a_n + Q_n - 2} \quad (4)$$

dado que la reducida siguiente R_o^{n+1} se obtiene limitando a la fracción continúa desde el primero al $(n+1)$ de los cocientes incompletos para obtener la fracción pedida, bastará sustituir en (4) a a_n

por $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ y efectuar las operaciones indicadas.-

$$\begin{aligned} R_o^{n+1} &= \frac{P_n + 1}{Q_n + 1} \cdot \frac{P_{n-1} \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) + P_{n-2}}{Q_{n-1} \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) + Q_n - 2} \\ &= \frac{P_n - 1}{Q_n - 1} \cdot \frac{a_n \cdot a_{n+1} + 1}{a_n + 1} + \frac{P_{n-2}}{Q_n - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P_{n-1} (a_n \cdot a_{n+1} + 1) + P_{n-2} \cdot a_{n+1}}{Q_{n-1} (a_n \cdot a_{n+1} + 1) + Q_{n-2} \cdot a_{n+1}} \\
 &= \frac{(P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2}) \cdot a_{n+1} + P_{n-1}}{(Q_{n-1} \cdot a_n + Q_{n-2}) \cdot a_{n+1} + Q_{n-1}}
 \end{aligned}$$

pero

$$P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2} = P_n$$

$$Q_{n-1} \cdot a_n + Q_{n-2} = Q_n$$

$$\boxed{R_o^{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n \cdot a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n \cdot a_{n+1} + Q_{n-1}}} \quad (4)$$

que en forma general podemos enunciar así:

- 1) El numerador de una reducida cualquiera se forma multiplicando el numerador de la reducida anterior, por el cociente incompleto de la que se quiere formar, y luego sumando a este producto el numerador de la reducida que está dos lugares antes de la fracción integrante que se considera.-
- b) El denominador de la reducida pedida se obtiene multiplicando el denominador de la reducida anterior por el cociente incompleto de la que se quiere formar, y sumándole el denominador de la reducida que está dos lugares antes del cociente incompleto que se considera.-

6.3. DESARROLLO DE UN NUMERO RACIONAL EN FRACCION CONTINUA

Todo número fraccionario positivo $\frac{a}{b}$ se puede desarrollar en fracción continua ordinaria. Este desarrollo es único, si se impone la condición de que el último cociente incompleto sea mayor que 1; y existe además otro desarrollo, que tiene un cociente incompleto más

M.m. X

igual a la unidad.-

Sea la fracción $\frac{a}{b}$ que queremos reducir a fracción continua. Hallaremos la mayor parte entera que dicha fracción contiene, para lo cual dividiremos a por b; designamos con a_1 a ese cociente entero y r_1 al resto; luego:

$$\frac{a}{b} = a_1 + \frac{r_1}{b} = a_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} \quad \text{pues } b > r_1$$

Hallaremos ahora la parte entera de la fracción $\frac{b}{r_1}$, efectuando la división de b por r_1 , de modo que si a_2 es el cociente entero y r_2 su resto, resulta:

$$\frac{b}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \quad \text{pues } r_1 > r_2$$

Hacemos lo mismo que antes con la fracción $\frac{r_1}{r_2}$ y se tendrá

$$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2} = a_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \quad \text{y es } r_2 > r_3$$

Continuando así esta serie de operaciones, llegaremos a:

$$\frac{r_{m-3}}{r_{m-2}} = a_{m-1} + \frac{r_{m-1}}{r_{m-2}} = a_{m-1} + \frac{1}{\frac{r_{m-2}}{r_{m-1}}} \quad \text{y es } r_{m-2} > r_{m-1}$$

se llegará a que:

$$\frac{r_{m-2}}{r_{m-1}} = a_m \quad \text{o bien} \quad \frac{r_{m-2}}{r_{m-1}} = (a_{m-1}) + \frac{1}{1}$$

según que efectuemos exactamente o por defecto la última división.-

Por sustituciones sucesivas obtenemos los dos desarrollos en fracción continua:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + a_{m-1} + \frac{1}{a_m}} \\ \frac{a}{b} &= a_1 - \frac{1}{a_2 + \dots + a_{m-1} + \frac{1}{a'_m + \frac{1}{1}}} \end{aligned}$$

siendo $a_m > 1$ y por lo tanto $a'_m = a_m \geq 1 > 1$

OBSERVACION: Si no se impusiera la condición de que todos los cocientes imcompletos sean ≥ 1 , todo número racional admitirá infinitos desarrollos.-

En efecto:

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{0 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 0 + \frac{1}{0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \dots \text{etc.}$$

El procedimiento operatorio para hallar los cocientes imcompletos y restas sucesivos es el mismo que el indicado para calcular el M. C.D. de dos números por el método de Euclides o método de las divisiones sucesorias, que indicamos así:

| | a_1 | a_2 | a_3 | | a_{m-2} | a_{m-1} | a_m |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|---------------|
| a | b | r_1 | r_2 | | r_{m-3} | r_{m-2} | $r_{m-1} = D$ |
| r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | | r_{m-1} | $r_m = 0$ | |

EJEMPLO I: Desarrollar la fracción continua la fracción $\frac{1384}{753}$

| | 1 | 1 | 5 | 5 | 1 | 4 | 4 | |
|------|-----|-----|-----|----|----|---|---|--|
| 1384 | 753 | 631 | 122 | 21 | 17 | 4 | 1 | |
| 631 | 122 | 21 | 17 | 4 | 1 | 0 | | |

La fracción continua equivalente a la fracción propuesta

será:

$$\frac{1384}{753} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}}}}}$$

EJEMPLO II : Desarrollar la fracción continua la fracción $\frac{123}{478}$

| | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|----|----|---|---|---|
| | 0 | 3 | 1 | 7 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 123 | 478 | 123 | 109 | 14 | 11 | 3 | 2 | 1 |
| 123 | 109 | 14 | 11 | 3 | 2 | 1 | 0 | |

luego será:

$$\frac{123}{478} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}$$

$$= \frac{1}{3 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{7 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{3 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{2}$$

la parte entera de esta fracción es cero, luego podrá escribirse así:

$$\frac{123}{478} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}$$

$$= \frac{1}{3 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{7 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{3 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{2}$$

EJEMPLO III: Desarrollar en fracción continua la fracción $\frac{1904}{1810}$

| | | | | | |
|------|------|----|----|----|----|
| | 1 | 19 | 3 | 1 | 11 |
| 1904 | 1810 | 94 | 24 | 22 | 2 |
| 94 | 24 | 22 | 2 | 0 | |

$$\frac{1904}{1810} = 1 + \frac{1}{19 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11}}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{19 +} \frac{1}{3 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{11}$$

6.4.- DESARROLLO DE UN NUMERO DECIMAL EN FRACCION CONTINUA

Dada una fracción decimal, ésta puede ser:

- a) exacta
- b) periódica pura
- c) periódica mixta
- d) inexacta, de un número infinito de cifras.-

En los tres primeros casos, se aplicará la regla anterior para una fracción ordinaria, y en cuanto al cuarto caso, cuando el número decimal dado no sea exacto, es decir, que solo da una aproximación del valor exacto del número, se podrá hallar también en fracción continua este valor aproximado en la siguiente forma:

Para desarrollar en fracción continua una fracción decimal inexacta, aumentaremos o disminuirémos su última cifra en una unidad según que la fracción se halle aproximada por defecto o por exceso obteniendo así dos límites, que comprenden al verdadero valor de la fracción propuesta; reduciremos simultáneamente a fracciones continuas ambos límites y continuaremos la operación hasta llegar a dos cocientes distintos, en cuyo caso la fracción continua que expresa el valor aproximado de la fracción dada será la que tenga por cocientes incompletos los cocientes que sean comunes a ambas fracciones.-

EJEMPLO: I.- Desarrollar en fracción continua el número $e = 2,71828...$ base de los logaritmos neperianos.-

Estando el número e aproximado por defecto, en menos de una unidad del 5º orden, aumentaremos su última cifra en una unidad y obtendremos por límite superior del número e a la fracción decimal

2,71829

$$\frac{271828}{100.000} < e < \frac{271829}{100.000}$$

apliquemos la regla conocida:

| | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 6 |
|--------|---------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|-----|
| 271828 | 100.000 | 71828 | 28172 | 15484 | 12688 | 2796 | 1504 | 1292 | 212 |
| 71828 | 28172 | 15484 | 12688 | 2796 | 1504 | 1292 | 212 | 20 | |

| | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 9 |
|-------|---------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|-----|
| 27829 | 100.000 | 71829 | 28172 | 15487 | 12684 | 2803 | 1472 | 1331 | 141 |
| 71829 | 28171 | 15487 | 12684 | 2803 | 1472 | 1331 | 141 | 62 | |

Luego el número vendrá expresado aproximadamente por la fracción
continua:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

EJEMPLO II: Desarrollar en fracción continua:

$$3,14159 < \pi < 3,14160$$

Efectuando el mismo desarrollo anterior se tiene:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{25 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{25 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}}$$

M.m. X

6.5.- ALGORITMO DE LOS CUMULANTES

a) Definición: Dada una sucesión finita o indefinida:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

de ella se deduce otra sucesión:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots \quad (2)$$

aplicando el algoritmo siguiente:

$$p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2} \quad (3)$$

Para comenzar el cálculo partiremos de los números 0_x y 1 , de modo que obtendremos:

$$p_1 = a_1$$

$$p_2 = a_1 \cdot a_2 + 1$$

$$p_3 = p_2 \cdot a_3 + p_1 = a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1$$

$$p_4 = p_3 \cdot a_4 + p_2 = (a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1) \cdot a_4 + a_1 a_2 + 1$$

$$p_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + a_1 a_2 + 1$$

$$p_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1$$

El número así formado por medio de los datos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se llama cumulante de estos n números y se representa con la notación

$$p_n = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

que también se conoce como paréntesis de Euler o de Gauss

Ejemplo: Dada la sucesión:

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

obtenemos los siguientes cumulantes:

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$$

$$p_3 = p_2 a_3 + p_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$p_4 = p_3 a_4 + p_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

$$p_5 = p_4 a_5 + p_3 = 5 \cdot 1 + 3 = 8$$

se obtiene la sucesión siguiente:

$$0, 1 \parallel 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

llamada sucesión de Fibonacci

Ejemplo II: Dada la sucesión:

$$1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots$$

se obtienen los siguientes cumulantes:

$$p_0 = 0$$

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = a_1 a_2 + 1 = 1 \cdot (-2) + 1 = -1$$

$$p_3 = p_2 a_3 + p_1 = (-1) \cdot 4 + 1 = -3$$

$$p_4 = p_3 a_4 + p_2 = (-3) \cdot (-8) + (-1) = 23$$

$$p_5 = p_4 a_5 + p_3 = 23 \cdot (16) + (-3) = 365$$

estos cumulantes pueden obtenerse directamente con el siguiente esquema:

$$0, 1 \parallel \begin{array}{ccccccc} 1, & -2, & 4, & -8, & 16, & -32, & \dots \\ \hline 1, & -1, & -3, & 23, & 365, & -11.657, & \dots \end{array}$$

b) Propiedades:

1) El cumulante $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ es una suma que tiene como primer término el producto $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$; y de él se deduce cada uno de los siguientes, suprimiendo de todos los modos posibles un par de factores consecutivos, o dos pares, o tres, $\dots$

Esto puede verse con facilidad en el cumulante

$$p_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1$$

donde el primer término es el producto $a_1 a_2 a_3 a_4$; el segundo el producto $a_1 a_2$ por supresión del par consecutivo $a_3 a_4$; el tercero, $a_1 a_4$ por supresión de $a_2 a_3$, par consecutivo y el cuarto es $a_3 a_4$ obtenido suprimiendo el par consecutivo inicial; finalmente la supresión de dos pares consecutivos da el último término 1.

Ejemplo: Calcular el cumulante (2,1,3, -5, -1,) en forma directa.

$$2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-5)(-1) + 3(-5)(-1) + 2(-5)(-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 + 2 = \\ 30 + 15 + 10 + 2 + 6 + 1 + 3 + 2 = \underline{63}$$

2) Los cumulantes formados con los mismos n números, en orden inverso, son iguales.

Esta propiedad se deduce de la ley de formación del cumulante n -ésimo de donde se obtiene la siguiente igualdad:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1)$$

3) Cambiando los signos a los n elementos de un cumulante, el valor de éste no varía y cambia o no de signo según sea n impar o par.

Estando formados los términos del cumulante n -ésimo de n factores, el primer sumando, de $n-2$ factores los términos obtenidos al suprimir un par consecutivo, de $n-4$ factores en los términos en los que se han suprimido dos pares consecutivos, etc. Al cambiar el signo de todos sus términos se obtiene:

$$(-a_1, -a_2, -a_3, \dots, -a_n) = (-1)^n (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

6.6.- FORMACION DE LAS REDUCIDAS DE UNA FRACCION CONTINUA

Considerando la fracción continua:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \dots + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_m}}}}}}$$

las reducidas sucesivas son:

$$a_1; a_1 + \frac{1}{a_2}; a_1 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}; \dots + a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} + \frac{1}{a_m}$$

y como se ha visto en 6.1. adoptan la forma siguiente:

$$R_0^1 = a_1$$

$$R_0^2 = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$$

$$R_0^3 = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3}{a_2 a_3 + 1}$$

$$R_0^4 = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1}{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4}$$

Observamos que las expresiones de sus numeradores y denominadores son los sucesivos acumulantes de:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

de modo que podrá escribirse:

$$R_0^1 = \frac{(a_1)}{1}$$

$$R_0^2 = \frac{(a_1 a_2)}{(a_2)}$$

$$R_0^3 = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{(a_2 a_3)}$$

$$R_0^4 = \frac{(a_1 a_2 a_3 a_4)}{(a_2 a_3 a_4)}$$

$$R_0^n = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)}$$

Designando abreviadamente con:

$$P_n = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)$$

$$y \quad Q_n = (a_2 a_3 \dots a_n)$$

al numerador y denominador de la reducida n-ésima se podrá escribir:

$$P_n = P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2} \quad y \quad Q_n = Q_{n-1} \cdot a_n + Q_{n-2}$$

pués por la ley de formación de los cumulantes, los terminos que no contengan a_n se obtienen suprimiendo al par $a_n - 1.a_n$ en el producto $a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n$ y en los otros productos del cumulante P_n , quedando el cumulante P_{n-1} y otros términos resultado de suprimir dos pares, tres pares, etc. que forman el cumulante P_{n-2} ; su suma total es:

$$P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2}$$

y el mismo razonamiento es válido para Q_n .

De esta manera resulta:

$$R_0^n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} \cdot a_n + Q_{n-2}}$$

la reducida n -ésima ya hallada en (4) de 6.2; sin embargo, el cálculo de R_0^n se efectúa más rápido haciendo separadamente P_n y Q_n en lugar de utilizar la expresión:

$$\frac{P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} \cdot a_n + Q_{n-2}}$$

Ejemplo I: Hallar la reducidas sucesivas de:

$$A = \frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}}}}}{1}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 5$$

$$a_4 = 5$$

$$a_5 = 1$$

$$a_6 = 4$$

$$a_7 = 4$$

$$R_0^1 = \frac{(1)}{1} = 1$$

$$R_0^2 = \frac{(1, 1)}{(1)} = \frac{1 \cdot 1 + 1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$R_0^3 = \frac{(1, 1, 5)}{(1, 5)} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 + 5}{1 \cdot 5 + 1} = \frac{11}{6}$$

$$R_o^4 = \frac{(1,1,5,5)}{(1,5,5)} = \frac{1.1.5.5 + 1.1 + 1.5 + 5.5 + 1}{1.5.5 + 1 + 5} = \frac{57}{31}$$

$$R_o^5 = \frac{(1,1,5,5,1)}{(1,5,5,1)} = \frac{68}{37}$$

$$0,1 \parallel \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 11 & 57 & 68 \end{array}$$

$$0,1 \parallel \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 31 & 37 \end{array}$$

$$R_o^6 = \frac{(1,1,5,5,1,4)}{(1,5,5,1,4)} = \frac{329}{179}$$

$$0,1 \parallel \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 11 & 57 & 68 & 329 \end{array}$$

$$0,1 \parallel \begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 31 & 37 & 179 \end{array}$$

$$R_o^7 = \frac{(1,1,5,5,1,4,4)}{(1,5,5,1,4,4)} = \frac{1384}{753}$$

$$0,1 \parallel \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 5 & 5 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 11 & 57 & 68 & 329 & 1384 \end{array}$$

$$0,1 \parallel \begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 5 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 31 & 37 & 179 & 753 \end{array}$$

A los mismos resultados se llega aplicando la ley de formación:

$$R_o^n = \frac{P_{n-1} \cdot a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} \cdot a_n + Q_{n-2}}$$

En efecto:

$$R_o^1 = a_1 = 1$$

$$R_o^2 = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{1.1 + 1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$R_o^3 = \frac{P_{n-2} \cdot a_3 + P_{n-1}}{Q_{n-2} \cdot a_3 + Q_{n-1}} = \frac{2.5 + 1}{1.5 + 1} = \frac{11}{6}$$

$$R_0^4 = \frac{P_n^{-3} \cdot a_4 + P_n^{-2}}{Q_n^{-3} \cdot a_4 + Q_n^{-2}} = \frac{11 \cdot 5 + 2}{6 \cdot 5 + 1} = \frac{57}{31}$$

$$R_0^5 = \frac{P_n^{-4} \cdot a_5 + P_n^{-3}}{Q_n^{-4} \cdot a_5 + Q_n^{-3}} = \frac{57 \cdot 1 + 11}{31 \cdot 1 + 6} = \frac{68}{37}$$

$$R_0^6 = \frac{P_n^{-5} \cdot a_6 + P_n^{-4}}{Q_n^{-5} \cdot a_6 + Q_n^{-4}} = \frac{68 \cdot 4 + 57}{37 \cdot 4 + 31} = \frac{329}{179}$$

$$R_0^7 = \frac{P_n^{-6} \cdot a_7 + P_n^{-5}}{Q_n^{-6} \cdot a_7 + Q_n^{-5}} = \frac{329 \cdot 4 + 68}{179 \cdot 4 + 37} = \frac{1384}{753}$$

Ejemplo II: Hallar las reducidas sucesivas de:

$$B := \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}$$

$$a_1 = 0; a_2 = 3; a_3 = 1; a_4 = 1; a_5 = 7; a_6 = 3; a_7 = 1; a_8 = 2.$$

Por cualquiera de las dos formas de cálculo empleadas en el ejercicio I, se encuentran las reducidas siguientes:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{8}{31}; \frac{9}{35}; \frac{35}{136}; \frac{44}{171}; \frac{123}{478}$$

Ejemplo III: Hallar las reducidas sucesivas de:

$$e = \frac{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}}}{1}$$

$$a_1 = 2 ; a_2 = 1 ; a_3 = 2 ; a_4 = 1 ; a_5 = 1 ; a_6 = 4 ; a_7 = 1 ; a_8 = 4 ;$$

.....

Con el mismo proceso se halla:

$$\frac{2}{1} ; \frac{3}{1} ; \frac{8}{3} ; \frac{11}{4} ; \frac{19}{7} ; \frac{87}{32} ; \frac{106}{39} ; \frac{139}{71} ; \dots$$

Ejemplo IV: Hallar las reducidas sucesivas de:

$$\begin{array}{r} \text{II} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{25 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4}}}}}}} \end{array}$$

$$a_1 = 3; a_2 = 7; a_3 = 15; a_4 = 1; a_5 = 25; a_6 = 1; a_7 = 7; a_8 = 4$$

sus reducidas son:

$$\frac{3}{1} ; \frac{22}{7} ; \frac{333}{106} ; \frac{355}{113} ; \frac{9208}{2931} ; \frac{9563}{3044} ; \frac{76149}{24239} ; \frac{380745}{100000} \dots$$

6.7. PROPIEDADES MAS IMPORTANTES DE LAS REDUCIDAS

Admitiremos sin demostrar, las siguientes propiedades:

I) El numerador de la diferencia de dos reducidas consecutivas de una fracción continua es igual a (-1) elevado a una potencia igual al orden de la reducida sustraendo, o bien, igual a $(+1)$ ó (-1) según que la reducida minuendo sea de lugar par o impar.

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n}{Q_{n+1} \cdot Q_n}$$

II) Una reducida de rango par es mayor que la precedente y la siguiente.

Si $R_o^n = \frac{P_n}{Q_n}$ es una reducida de rango u orden par, deberá tenerse:

$$\frac{P_n}{Q_n} > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad y \quad \frac{P_n}{Q_n} > \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

III) Las reducidas de rango u orden par forman una sucesión creciente y las reducidas de rango impar una sucesión decreciente.

$$\frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \frac{P_6}{Q_6} < \dots < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$$

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \dots > \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$$

IV) El valor de una fracción continua que está comprendido entre el de dos reducidas consecutivas, es mayor que el de dos reducidas de rango impar y menor que el de las reducidas de rango par.

Si con A indicamos a una fracción continua es:

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} < A < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$$

V) Entre los valores de dos reducidas consecutivas que comprenden el valor de la fracción continua total, se aproxima más el valor de la reducida de mayor rango que el de la menor.

VI) Todas las reducidas convergen hacia un mismo límite.

6.8.- ERROR QUE SE COMETE AL TOMAR UNA REDUCIDA CUALQUIERA COMO VALOR DE LA FRACCION CONTINUA TOTAL

Si la fracción continua total se indica con A y P_n es la reducida que se ha tomado como valor Q_n de A, será

$$E = A - \frac{P_n}{Q_n}$$

el error que se comete. Se demuestra, que en valor absoluto es:

$$A - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{(Q_n \cdot x + Q_{n-1})Q_n}$$

en donde

$$x = a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} + \dots}}$$

es el valor despreciado, que es mayor que la unidad, pues por lo menos $a_{n+1} \geq 1$; luego si suprimimos a x obtenemos que:

$$E = A - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{(Q_n + Q_{n-1})Q_n}$$

es decir que: El error que se comete tomando al valor de una reducida cualquiera como valor de la fracción continua, total, es menor que la unidad dividida por el producto del denominador de dicha reducida por la suma de los dos últimos denominadores.

Si además se prescinde también de Q_{n-1} , se mantiene la desigualdad con mayor razón, pues $Q_{n-1} \geq 1$ luego, quedaría:

$$E = A - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{Q_n^2}$$

luego el error es menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida.

Si se desea calcular el valor de una fracción continua dada, con una aproximación de $\frac{1}{\alpha}$ fijada de antemano, ese valor sería

el de la reducida $\frac{P_r}{Q_r}$ cuyo denominador Q_r cumple la condición de que:

$$Q_r \geq \sqrt{\alpha}$$

En efecto:

$$E = \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{Q_r^2} \therefore \alpha \leq Q_r^2$$

o sea

$$Q_r^2 \geq \alpha$$

$$\therefore \boxed{Q_r \geq \sqrt{\alpha}}$$

Ejemplo: Calcular el valor de π con una aproximación de $\frac{1}{85.264}$

$$\text{siendo } \pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{25 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}}$$

y las reducidas sucesivas:

$\frac{3}{1}; \frac{22}{7}; \frac{333}{106}; \frac{355}{113}; \frac{9208}{2931}; \frac{9563}{3044}; \frac{76.149}{24.239}; \frac{380.745}{100.000}; \dots$

siendo el error que se comete al tomar una reducida $\frac{P_n}{Q_n}$ igual a:

$$E = A - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{(Q_n Q_{n-1})Q_n} < \frac{1}{Q_{n-1} \cdot Q_n}$$

o bien

$$E < \frac{1}{Q_n^2} \therefore Q_n^2 \geq 85.264$$

$$Q_n \geq \sqrt{85.264}$$

$$Q_n \geq 292$$

deteniéndonos en la reducida finita: $\frac{9.208}{2.931}$ que corresponde al desarrollo

$$A = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{25}}}}$$

se tiene una aproximación:

$$\frac{1}{(2931)^2} = \frac{1}{8.590.761} < \frac{1}{1.000.000}$$

que es superior a la aproximación pedida:

$$\frac{1}{85.264} < \frac{1}{10.000}$$

De lo anterior observamos que para hallar el valor de una fracción continua en menos de una cantidad $\frac{1}{\alpha}$, bastará llegar hasta una reducida cuyo denominador sea igual o mayor que la raíz cuadrada de α .

6.9.- FRACCIONES CONTINUAS ILIMITADAS

Las fracciones continuas ilimitadas provienen de los números irracionales, o como se dice corrientemente, de las cantidades inconmensurables.- En efecto, toda raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto da origen a una fracción continua ilimitada, por en caso contrario, esta raíz sería equivalente a una fracción racional y por lo tanto conmensurable.-

Sea $\sqrt{6}$ el número dado que deseamos desarrollar en fracción continua, siguiendo el proceso indicado en 6.3, se tendrá:

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \frac{\sqrt{6} + 2}{(\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2)} = \frac{\sqrt{6} + 2}{2} = \frac{4 + \frac{1}{x_1}}{2} = 2 + \frac{1}{2x_1}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6} + 2}{2} = 2 + \frac{1}{2x_1}$$

$$\therefore \sqrt{6} + 2 = 4 + \frac{1}{x_1}$$

luego

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = 2 + \frac{1}{2x_2}$$

Análogamente, tendríamos:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = 2 + \frac{1}{2x_3}$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = 2 + \frac{1}{2x_4}$$

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = 2 + \frac{1}{2x_{m+1}}$$

sustituyendo estos valores sucesivamente, se obtiene:

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

EJEMPLO I:- Desarrollar 11 en fracción continua y calcular su valor en menos de $\frac{1}{10^4}$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{x}$$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} = \frac{\sqrt{11} + 3}{2} = 3 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{11} - 3} = \frac{2(\sqrt{11} + 3)}{2} = \sqrt{11} + 3 = 6 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} = 3 + \frac{1}{x_3}$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{11} - 3} = 6 + \frac{1}{x_4}$$

$$\therefore \sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \dots}}}}}$$

Reducidas:

$$R_0^1 = 3 \quad ; \quad R_0^2 = \frac{10}{3} \quad , \quad R_0^3 = \frac{63}{19} \quad ; \quad R_0^4 = \frac{199}{60} \quad ; \quad R_0^5 = \frac{1257}{397}$$

$$Q_n - 1 \quad Q_n = 60 \times 397 = 23.280 > 10.000$$

luego es:

$$\sqrt{11} = \frac{199}{60} \quad \text{la reducida pedida}$$

$$\text{o sea } \sqrt{11} = 3,31\hat{6}$$

$$\text{en menos de } E = \frac{1}{10^4}$$

Las demás fórmulas del error cometido:

$$Q_n^2 > 10^4$$

$$Q_n (Q_n + Q_{n-1}) > 10^4$$

nos hubiera dado la reducida siguiente:

$$11 = \frac{1257}{397}$$

pero la menor es la indicada.-

Se observa que estos desarrollos contienen cocientes incompletos que se repiten regularmente en forma de períodos sucesivos, a partir de la segunda fracción integrante; este hecho hace que se designen a las fracciones continuas ilimitadas como fracciones continuas periódicas puras o periódicas mixtas según que el período que se repite comprenda ó no al primer cociente incompleto.-

Así:

$$A = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}}}$$

es una fracción periódica pura

$$y \ B = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}}}}}}$$

es periódica mixta.-

Se demuestra que:

Todo número entero que no sea un cuadrado perfecto puede ser considerado como la generatriz de una fracción continua limitada, periódica mixta, cuyos cocientes incompletos comienzan a repetirse después que se llega a uno que es doble del primero.-

En efecto, en el desarrollo:

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

los cocientes incompletos se repiten a partir del séptimo

Ejemplo I:

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}$$

Los cocientes incompletos se repiten a partir del tercero

Ejemplo III:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

los cocientes incompletos se repiten a partir del sexto.

6.10.- EJERCICIOS

I) Calcular las reducidas sucesivas de:

$$1) \quad 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}}}}$$

$$2) \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}}}}}}$$

$$\begin{array}{ll}
 3) & 3 + \frac{1}{3+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{9} \\
 4) & 4 + \frac{1}{7+} \frac{1}{1+} \frac{1}{10} \quad R_0^4 = \frac{359}{27} \\
 5) & \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{87} \quad R_0^5 = \frac{351}{965} \\
 6) & 0 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{4} \quad R_0^7 = \frac{52}{323} \\
 7) & \frac{1}{348+} \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \frac{1}{5+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{3} \quad R_0^7 = 0,00287 \\
 8) & 23 + \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{10+} \frac{1}{3} \quad R_0^8 = 23,387 \\
 9) & 1 + \frac{1}{4+} \frac{1}{9+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{4} \quad R_0^7 = \frac{1103}{887} \\
 10) & 0 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{16+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \frac{1}{13} \quad R_0^8 = \frac{4575}{6796}
 \end{array}$$

II) EXPRESAR LAS SIGUIENTES FRACCIONES ORDINARIAS COMO FRACCIONES CONTINUAS Y FORMAR LAS REDUCIDAS.

$$1) \frac{27}{19} = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2} ; \frac{1}{1} ; \frac{3}{2} ; \frac{7}{5} ; \frac{10}{7} ; \frac{27}{19}$$

$$2) \frac{49}{204} = \frac{1}{4+} \frac{1}{6+} \frac{1}{8} ; \frac{1}{4} ; \frac{6}{25} ; \frac{49}{204}$$

$$3) \frac{130}{421} = \frac{1}{3+} \frac{1}{4+} \frac{1}{5+} \frac{1}{6} ; \frac{1}{3} ; \frac{4}{13} ; \frac{21}{68} ; \frac{130}{421}$$

$$4) \frac{271}{108} = \frac{1}{2+} \frac{1}{4+} \frac{1}{9+} \frac{1}{2+} \frac{1}{3} ; \frac{1}{2} ; \frac{4}{9} ; \frac{37}{83} ; \frac{78}{175} ; \frac{271}{108}$$

$$5) \frac{157}{972} = \frac{1}{6+} + \frac{1}{5+} + \frac{1}{4+} + \frac{1}{3+} + \frac{1}{2} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{31} ; \frac{21}{130} ; \frac{68}{421} ; \frac{157}{972}$$

$$6) \frac{907}{18564} = \frac{1}{20+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{7+} + \frac{1}{5+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{1+} + \frac{1}{3} ; \frac{1}{20} ; \frac{2}{41} ; \frac{15}{307} ;$$

$$\frac{77}{1576} ; \frac{169}{3459} ; \frac{246}{5035} ; \frac{907}{18564}$$

$$7) 0,37 =$$

$$8) 1,139 ;$$

$$9) 0,3029 = \frac{1}{3+} + \frac{1}{3+} + \frac{1}{3+} + \frac{1}{6+} + \frac{1}{1+} + \frac{1}{2+} + \frac{1}{1+} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{3} ; \frac{3}{10} ; \frac{10}{33} ; \frac{63}{208} ;$$

$$10) 3,215 = \frac{3215 - 32}{990} = \frac{1061}{330} =$$

$$= 3 + \frac{1}{4+} + \frac{1}{1+} + \frac{1}{1+} + \frac{1}{1+} + \frac{1}{5+} + \frac{1}{4+} ,$$

$$\frac{3}{1} ; \frac{13}{4} ; \frac{16}{5} ; \frac{29}{9} ; \frac{45}{14} ; \frac{254}{79} ; \frac{1061}{330}$$

$$11) 4,316 = 4 + \frac{1}{3+} + \frac{1}{6+} + \frac{1}{7+} + \frac{1}{3+} + \frac{1}{2}$$

III) PROBLEMAS

1) Cuando el diámetro de un círculo es 1, se halla que la circunferencia es mayor que 3,1415926 y menor que 3,1415927; se pide la razón de la circunferencia al diámetro.-

$$3 + \frac{1}{7+} + \frac{1}{15+} + \frac{1}{1+} + \frac{1}{243+} \dots\dots\dots$$

$$3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{106} + \frac{1}{354} + \dots$$

$$\frac{3}{1} ; \frac{22}{7} ; \frac{333}{106} ; \frac{355}{113}$$

- 2) Hallar aproximadamente la razón de 24 horas a 5 horas, 48 minutos, 49 segundos.-

$$\begin{aligned} 5^h \quad 48^m \quad 49^{\text{seg}} &= 20929 \text{ segundos} \\ 24^h &= 86400 \text{ segundos} \end{aligned}$$

$$\frac{20929}{86400} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{16} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{4}; \frac{7}{29}; \frac{8}{33}; \frac{31}{128}; \frac{39}{161}; \frac{655}{2704}; \frac{694}{2865}; \frac{1349}{5569}; \frac{20929}{86400}$$

- 3) La duración del mes lunar que se ha obtenido por el promedio de 100 años ha sido de 27,321661 días; hallar una serie de fracciones comunes que se aproximen cada vez más a ésta cantidad.-

Es más conveniente para resolverlo, tomar a 1 como numerador y 27,321661 como denominador, e invertir las reducidas que resulten.-

$$\frac{27,321661}{1} = \frac{27 \ 321661}{1,000,000} =$$

$$= 27 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{27}{1} ; \frac{82}{3} ; \frac{765}{28} ; \frac{3907}{143} ; \dots$$

- 4) Hallar una serie de fracciones convergentes a 0,24226, que es la diferencia en días entre el año trópico y el año civil de 365 días.-

$$0,24226 = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \dots$$

$$\frac{1}{4} ; \frac{7}{29} ; \frac{8}{33} ; \frac{39}{161} ; \frac{47}{194} ; \dots\dots$$

- 5) Hallar los límites del error cometido al tomar $\frac{222}{203}$ yardas como el equivalente de un metro, sabiendo que 1 metro es igual a 1,0936 yardas.-

$$1 ; \frac{11}{10} ; \frac{12}{11} ; \frac{35}{32} ; \frac{222}{203} ; \frac{1367}{1250}$$

$$1 \text{ metro} = 39,37079 \times \frac{1}{36} \text{ yardas} = 1,0936 \text{ yardas}$$

$$1,0936 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{32} + \frac{1}{203} + \frac{1}{1250}$$

$$\text{Error} < \frac{1}{(203)^2}$$

$$\text{Error} > \frac{1}{2 (1250)^2}$$

- 6) Hallar una aproximación de:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots\dots$$

de manera que difiera del valor real en menos de 0,0001.-

$$\text{Reducidas: } 1 ; \frac{4}{3} ; \frac{21}{16} ; \frac{151}{115} ; \dots\dots$$

$$\text{Valor aproximado} = \frac{151}{115}$$

$$\text{Error} < \frac{1}{(115)^2} < \frac{1}{(100)^2} = 0,0001$$

IV) Desarrollar los siguientes radicales en fracción continua y calcular las reducidas

$$1) \quad \sqrt{14} = 3 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{6+} \dots$$

$$\frac{3}{1} ; \frac{4}{1} ; \frac{11}{3} ; \frac{15}{4} ; \frac{101}{27} ; \frac{116}{31} ; \dots$$

$$2) \quad \sqrt{22} = 4 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{4+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{8+} \dots$$

$$\frac{4}{1} ; \frac{5}{1} ; \frac{14}{3} ; \frac{61}{13} ; \frac{136}{29} ; \frac{197}{42} ; \dots$$

$$3) \quad {}_2\sqrt{3} = 3 + \frac{1}{2+} \frac{1}{6+} \frac{1}{2+} \frac{1}{6+} \dots$$

$$\frac{3}{1} ; \frac{7}{2} ; \frac{45}{13} ; \frac{97}{28} ; \frac{627}{181} ; \frac{1352}{390} ; \dots$$

$$4) \quad {}_3\sqrt{5} = 6 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{12+} \dots$$

$$\frac{6}{1} ; \frac{7}{1} ; \frac{20}{3} ; \frac{47}{7} ; \frac{114}{17} ; \frac{161}{24} ; \dots$$

$$5) \quad \sqrt{160} = 12 + \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{5+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{24+} \dots$$

$$\frac{12}{1} ; \frac{13}{1} ; \frac{25}{2} ; \frac{38}{3} ; \frac{215}{17} ; \frac{253}{20} ; \dots$$

$$6) \quad \sqrt{21} = 4 + \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{8+} \dots$$

$$\frac{4}{1} ; \frac{5}{1} ; \frac{9}{2} ; \frac{23}{5} ; \frac{32}{7} ; \frac{55}{12} ; \dots$$

$$7) \frac{1}{\sqrt{33}} = \frac{1}{5+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{10+} - - - -$$

$$\frac{1}{5} ; \frac{1}{6} ; \frac{3}{17} ; \frac{4}{23} ; \frac{43}{247} ; \frac{219}{1258} ; - - - -$$

$$8) \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5} = 1 + \frac{1}{10+} \frac{1}{2+} - - - -$$

$$\frac{1}{1} ; \frac{11}{10} ; \frac{23}{21} ; \frac{241}{220} ; \frac{505}{461} ; \frac{5291}{4830} - - - -$$

$$9) \sqrt{\frac{7}{11}} = \frac{7}{\sqrt{77}} \therefore \frac{\sqrt{77}}{7} = 1 + \frac{\sqrt{77} - 7}{7}$$

$$\frac{1}{1+} \frac{1}{3+} \frac{1}{1+} \frac{1}{16+} \frac{1}{1+} \frac{1}{3+} \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \frac{1}{1+} - - - -$$

$$\frac{1}{1} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5} ; \frac{67}{84} ; \frac{71}{89} ; \frac{280}{351}$$

$$10) \frac{3+\sqrt{7}}{2} = 2 + \frac{1}{1+} \frac{1}{4+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{4+} - - - -$$

$$\frac{10}{4} ; \frac{201}{20} ; \frac{4030}{401} ; \frac{80801}{8040} ; - - - -$$

6.11.- BIBLIOGRAFIA.

- 1) JULIO REY PASTOR: "Elementos de Análisis Algebraico"
Madrid- 1930.-
- 2) JUAN DE LA C. PUIG: "Complementos de Algebra"
Ed. Biedma-Bs.Aires- 1909.-
- 3) P. ENRIQUEZ CHACON: "Análisis Matemático" y "Ejercicios"
Ed. "El Mensajero del Corazón de Jesús"-Bilbao-
1946.-

- 4) GIUSEPPE VITALI: "Límiti, Serie, Frazioni continue, Prodotti Infiniti".-
Enciclopedia delle Matematiche Elementari Vol. I
parte II-Ed. Hoepli- Milán 1932.-
- 5) H.S.HALL y S.R.KNIGHT: "Algebra Superior " y " Ejercicios".- Traducc. de Rafael García Díaz.-
Ed. U.T.E.H.A.- México-1948
- 6) B.SANCHEZ VIDAL: "Lecciones de Algebra" Tomo I.-
Ed. Sucesores de Hernando-Madrid-1916.-
- 7) A.TERRY y RIVAS: "Ejercicios de Algebra"
Ed. M.Moyá- Madrid 1914.-

7.- ALGORITMO DE LOS DETERMINANTES

7.1.- NOTA HISTORICA.-

El estudio de los determinantes fue iniciado casi contemporaneamente en el Japón y en Europa, en la segunda mitad del siglo XVII.-

En efecto, el matemático japonés, SEKI SHINSUKE KOWA (1642-1708), en su obra manuscrita titulada FU - KUDAI-WO-KAISURU-HO, en 1683, llegó a obtener los determinantes y descubrió una regla para su desarrollo al tratar de eliminar una incógnita entre $n+1$ ecuaciones de grado n .-

En 1678, en el manuscrito del matemático alemán, GOTTFRIED WILHELM LEIBNITZ (1646-1716), conservado en la Biblioteca de Hannover (Alemania), considera a los determinantes como funciones racionales enteras de los coeficientes de $n+1$ ecuaciones lineales con n incógnitas, que igualadas a cero expresan el resultado de la eliminación de dichas incógnitas entre las ecuaciones dadas.-

En el estudio de la fórmula de resolución de n ecuaciones lineales con n incógnitas, condujo a GABRIEL CRAMER (1704-1752) a la consideración y formación de los determinantes bajo la forma de fracciones, en su obra titulada: INTRODUCTION a 1^{re} ANALYSE DES COURBES ALGEBRIQUES, 1750.- Crámer puede ser considerado como el segundo inventor de los determinantes; este geómetra halló la ley de formación de los determinantes al resolver un sistema constituido por

dos ecuaciones con dos incógnitas, de primer grado, y un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.--ETIENNE BEZOUT (1730-1783) extendió esta ley para un número cualquiera de ecuaciones con igual número de incógnitas, dando al mismo tiempo, en una memoria de la HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, 1764, un método rápido para resolver estos sistemas de ecuaciones.-

En los trabajos de Pierre Simón de Laplace (1749-1827) ; Alexandra Théophile Vandermonde (1735-1796) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813), la ley de Crámer se halla confirmada y en ellos se enuncian y demuestran varias propiedades de los determinantes.-

Al ilustre KARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) se debe la denominación de determinante para este algoritmo, su perfeccionamiento y extensión al cálculo algebraico.-

Una exposición completa de las propiedades fundamentales fué dada por LUIS AGUSTIN CAUCHY (1789-1857) en el JOURNAL DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, XVII, 1815 que generalizó el vocablo determinante dado por Gauss, y dió nuevas propiedades y aplicaciones, facilitando el uso de los determinantes a cálculos mas complicados.- Sin embargo, es gracias a CSRL GUSTAV JACOB JACOBI (1804-1851) el que en su memoria DE FORMATIONE ET PROPIETATIBUS DETERMINANTIUM, en 1841 da las bases de un tratado de la teoría de los determinantes, haciéndola una rama accesible a todos los matemáticos. Un trabajo sistemático sobre este asunto se debe a W. SPOTTISWOODE, en 1856 y el primer tratado que se publicó sobre los determinantes es el de FRANCESCO BRIOSCHI (1824-1897), titulado La teorica dei determinanti e le sue principali applicazioni, Pavia, 1854.- Después de esta época han sido muchas y variadas las búsquedas de propiedades de los determinantes, hallándose importantes aplicaciones en la Teoría de los números, Teoría de las

ecuaciones y Análisis en general; así como también en la Geometría y en la Mecánica.-

7.2.- DEFINICIONES Y PROPIEDADES FUNDAMENTALES

7.2.1.- MATRICES

Dado un cuadro de $m.n$ números, distribuidos en una tabla de m filas u horizontales y n columnas o verticales, designaremos a todos ellos por una misma letra a con dos sub-índices i, k , que indican respectivamente el orden de la fila, contando de arriba hacia abajo; y el que indica la columna, contando de izquierda a derecha. Los $m.n$ números se llaman elementos. Así a_{65} indica el elemento perteneciente a la sexta fila y quinta columna. Con esta notación la tabla o cuadro numérico viene representada así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & & \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & & \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & &
 \end{array} \tag{1}$$

El cuadro, formado por los $m.n$ números dados, se llama matriz rectangular. Esta denominación es debida a JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814-1897) que la usó en su obra *An essay on canonical forms*, Londres, 1851.

Cuando $m = n$, la matriz o sistema de elementos, se llama matriz cuadrada de orden n , y adopta la forma siguiente:

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \dots \dots \dots a_{1n}$$

$$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \dots \dots \dots a_{2n}$$

$$a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \dots \dots \dots a_{3n}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

(2)

$$a_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{n3} \dots \dots \dots a_{nn}$$

conteniendo n^2 elementos.-

Se dice que los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, que tiene iguales sub-índices, pertenecen a la diagonal principal, y aquellos elementos $a_{1n}, a_{2, n-1}, a_{3, n-2}, \dots, a_{n1}$, en los cuales la suma de los sub-índices da $n+1$, pertenecen a la diagonal secundaria .-

Dos elementos, tales como a_{ik} y a_{ki} , que tienen los mismos sub-índices, pero permutados entre sí, se llaman elementos conjugados, nombre con que las designó LUIS AGUSTIN CAUCHY.-

Dos líneas tales como las siguientes:

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \dots \dots a_{1n}$$

$$a_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{n3} \dots \dots a_{nn}$$

simétricas con respecto a la diagonal principal, se llaman líneas conjugadas.- En general, serán conjugadas, las siguientes líneas:

$$a_{h1k1} \quad a_{h2k2} \quad a_{h3k3} \dots \dots a_{hnhn}$$

M.m.XIII.-

$$a_{k1h1} \quad a_{k2h2} \quad a_{k3h3} \dots \dots a_{knhn}$$

7.2.2.- DETERMINANTES.-

Consideremos una matriz cuadrada de orden n y formemos un producto con n de tres elementos, tomados de tal modo que haya uno y solo uno de cada fila, uno y solo uno de cada columna. Un producto de esta forma será, por ejemplo, si $n = 5$:

$$a_{35} \cdot a_{42} \cdot a_{51} \cdot a_{24} \cdot a_{13}$$

Entre estos n elementos hay necesariamente uno de cada fila, de modo que, los primeros sub-índices formarán una permutación de los números $1, 2, 3, \dots, n$, y análogamente, será también una permutación de estos mismos números los segundos sub-índices.- En el producto anterior, estas permutaciones de los sub-índices son:

$$34521 \quad 52143$$

DEFINICION: Formados todos los productos posibles de n elementos elegidos entre los n^2 de la matriz dada, de modo que en cada producto haya un factor de cada fila y uno de cada columna, y anteponiendo a cada producto el signo $+$ o el $-$, según que las permutaciones que indican las filas y las columnas sean de la misma o distinta clase, el polinomio que tiene como términos todos los productos así formados con las signos correspondientes, se llama DETERMINANTE de la matriz dada.-

Puesto que $n!$ es el número de permutaciones de los números $1, 2, 3, \dots, n$, un determinante de orden n , contiene $n!$ términos.- Uno de estos términos es $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ se llama término principal;

cualquier otro es:

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad (-1)^{a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{nl}}$$

la mitad de ellos tienen signo + y la otra mitad el signo - ; Al término principal corresponde siempre el signo + ,.- El signo que corresponde a cada término del determinante no depende del orden de los factores, pues, al permutar dos factores cualesquiera cambian de clase las permutaciones que indican las filas y las columnas; luego, si eran de la misma clase, par o impar, siguen siéndolo después de cada permutación; y si eran de distinta clase, lo mismo acontecerá después.

Convendrá ordenar los elementos por filas, es decir, escribiremos sucesivamente, el elemento que pertenece a la primera fila, el de la segunda, el de la tercera, el de la n-ésima, con lo que siendo 1, 2, 3, n la primera permutación, por tanto, de clase par, basta considerar la segunda para saber el signo que corresponde al término que consideramos.-

Si el término es:

$a_{35} \cdot a_{42} \cdot a_{51} \cdot a_{24} \cdot a_{13}$
ordenando los términos por fila, se obtiene:

$$a_{13} \quad a_{24} \quad a_{35} \quad a_{42} \quad a_{51}$$

la primera permutación es:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

y la segunda:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1$$

En esta última permutación existen las siguientes inversiones de los términos de la primera:

3 con 2 ; 3 con 1 -----2 inversiones
4 con 2 ; 4 con 1 -----2 inversiones

5 con 2 ; 5 con 1 ----- 2 inversiones
 2 con 1 ----- 1 inversión ..
 Total 7 inversiones

es decir, tenemos una permutación de orden impar y al término le corresponde el signo menos.-

Si entre los términos de la matriz hay números negativos, el signo de cada término se modifica al sustituir cada elemento por su valor, y, en consecuencia, en el desarrollo, no habrá el mismo número de términos positivos y negativos.- Si además, alguno o algunos de los elementos son nulos, el número de términos del desarrollo es inferior a $n!$.-

Para representar un determinante, se puede usar la notación de ARTHUR CAYLEY (1821-1899):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \dots \dots a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots \dots \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

encerrando a la matriz cuadrada (2) entre dos barras verticales; o la siguiente:

$$S + \begin{pmatrix} + & a_{11} & a_{22} & a_{33} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de Agustín Luis Cauchy; o bien esta otra equivalente:

$$\sum \begin{pmatrix} + & a_{11} & a_{22} & a_{33} \dots \dots \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

debida a Carl Gustav Jacob Jacobi ; o también ésta:

$$|a_{ik}|$$

de HENRY JOHN STEPHEN SMITH (1826-1883) y LEOPOLD KRONECKER (1823-1891).-

7.2.3.- DETERMINANTES DE SEGUNDO Y TERCER ORDEN

Consideremos el determinante de segundo orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Los únicos productos que se pueden formar con la condición en 7.2.2. son:

$$a_{11} \cdot a_{22} \quad \text{y} \quad a_{12} \cdot a_{21}$$

a los que le corresponde signo + al primero y - al segundo

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) =$$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{60} = -\frac{2}{60}$$

consideremos ahora, el determinante de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

su desarrollo, con la condición impuesta en 7.2.2, es:

$$+ a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

corresponde el signo + a los tres primeros términos y el - a los tres últimos, por ser de clase par las permutaciones;

$$123 ; 231 ; 312$$

y de clase impar los:

$$321 ; 132 ; 213$$

7.2.4.- REGLA DE SARRUS

Puede observarse que el primer término está compuesto por los elementos de la diagonal principal, y cada paralela a ella, con el elemento del vértice opuesto, compone otro término con signo + .- Del mismo modo se deducen los otros términos que llevan el signo - , partiendo de la otra diagonal llamada secundaria.-

El siguiente esquema permite facilitar este cálculo:



Signo +



Signo -

SARRUS Profesor de la Universidad de Strasburgo ha ideado la siguiente regla que lleva su nombre, y que permite calcular con rapidez los distintos términos del desarrollo:

- REGLA:
- 1) se escribe debajo del determinante las dos primeras filas, o a continuación las dos primeras columnas.-
 - 2) Se efectúan los productos de los elementos que se hallan en las diagonales, sumándolos.-
 - 3) las diagonales de izquierda a derecha poseen signo + y las de derecha a izquierda, el signo - .-

EJEMPLO:

$$\begin{array}{c}
 + \\
 + \\
 +
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{vmatrix}
 -
 \begin{array}{c}
 + \quad + \quad + \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32}
 \end{vmatrix}$$

$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$

EJEMPLO:

$$\begin{array}{c}
 + \\
 + \\
 +
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 -1 & 0 & 3 \\
 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\
 4 & -3 & 2 \\
 -1 & 0 & 3 \\
 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5}
 \end{vmatrix}
 -
 \begin{array}{c}
 - \\
 - \\
 -
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (-1) \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \\
 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4} - (-1) \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) - 2 \cdot 0 \cdot 2 \\
 = 1 - \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = -\frac{4}{5}
 \end{array}$$

7.2.5.- TRANSFORMACIONES DE UN DETERMINANTE

Vamos admitir, sin demostrar, las siguientes propiedades:

1) El valor de un determinante no varía si se sustituye cada elemento por su conjugado, es decir, si se cambian las filas por columnas, y éstas por aquellas, sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una.-

En efecto se puede verificar que:

$$\begin{vmatrix}
 -42 & 9 & -3 \\
 -14 & -63 & 21 \\
 70 & 45 & -10
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 -42 & -14 & 70 \\
 9 & -63 & 45 \\
 -3 & 21 & -10
 \end{vmatrix}
 = 13.860$$

II) Si se cambian entre sí dos filas, o dos columnas, sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una, el valor absoluto del determinante no varía, pero cambia su signo.-

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}
 = -
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1h} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2h} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

En efecto, se verifica que:

$$\begin{vmatrix}
 -1 & 0 & \frac{3}{4} \\
 2 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\
 4 & -3 & 2
 \end{vmatrix}
 = -
 \begin{vmatrix}
 0 & -1 & \frac{3}{4} \\
 \frac{1}{2} & 2 & -\frac{2}{5} \\
 -3 & 4 & 2
 \end{vmatrix}
 = \frac{4}{5}$$

III) Un determinante que tiene dos filas o dos columnas idénticas es nulo.-

Si $\triangle$ es el determinante dado, cambiando entre sí estas dos filas o columnas resulta un determinante $-\triangle$; pero siendo idénticas estas dos filas o columnas, se verifica que :

$$\triangle = -\triangle$$

$$0 = 2\triangle \quad \triangle = 0 \quad \therefore \triangle = 0$$

IV) Si se multiplican todos los elementos de una línea (fila o columna) por un mismo número λ , el valor del determinante queda multiplicado por λ .

En efecto, en cada término del desarrollo figura un elemento y solo uno de la línea en cuestión; al quedar multiplicados sus elementos por λ , aparecen también multiplicados por λ todos los términos del desarrollo y en consecuencia su suma total. - Esta propiedad permite separar como factor del determinante un factor común a todos los elementos de una línea cualquiera, quedando simplificada esta.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 24 & -3 & 0 \\ 16 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 8.5 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8.5.3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

V) Un determinante es nulo si los elementos de una línea son proporcionales a los términos de una paralela a ella.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 7 & -47 & 29 \\ -\frac{9}{2} & 1 & 3 \\ -3 & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

pues la tercera fila se puede obtener de la segunda multiplicándola por $\frac{2}{3}$

7.3.- DESARROLLO DE UN DETERMINANTE EN SUMA DE VARIOS

7.3.1.- ADJUNTOS

Si en una matriz cuadrada de orden n se suprimen la fila que ocupa el lugar j y la columna del lugar k , se obtiene una matriz cuadrada de orden $n-1$, cuyo determinante se llama menor complementario del elemento a_{jk} común a la fila y columna suprimidas. Se indicará con A_{jk} .

Ejemplo:

El menor complementario del elemento a_{22} en el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{es:} \quad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

En general, si de una matriz cuadrada de orden n se suprimen m filas y m columnas cualesquiera, quedará un determinante de orden $n-m$ que se llama menor de orden $n-m$ del dado; también se lo suele llamar subdeterminante o determinante parcial o determinante derivado del dado.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

al suprimir las: 2ª y 4ª filas; 3ª y 4ª columnas, se obtiene el determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ menor de } = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}$$

menor del Δ de orden $5 - 2 = 3$.

Si el menor obtenido tiene por elementos de la diagonal principal elementos que pertenecieron a la diagonal principal del determinante dado, entonces recibe el nombre de menor principal o diagonal.

Un menor es de clase par o impar según que sea par o impar la suma de los números de orden correspondientes a las filas y a las columnas que forman el menor. Así en el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

suprimiendo la 2ª y 3ª fila, y la 2ª y 4ª columna, queda el menor de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Formado por elementos de la 1ª y 3ª columnas y de 1ª y 4ª filas; la suma de estos cuatro números da:

$$1 + 3 + 1 + 4 = 9$$

luego este menor es de clase impar

En cambio este menor, también de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

en el que sus elementos son de las columnas 1 y 2 de las filas 1 y 4:

$$1 + 2 + 1 + 4 = 8$$

es de clase par.

Las m filas y m columnas que suprimimos en un determinante se cortan en m^2 elementos del mismo determinante, que formará también un menor del n dado, ya que se obtendría dejando las filas y columnas suprimidas y en cambio, suprimiendo las otras. Este menor es de orden m y tiene elementos que no figuran en el menor anterior de orden $n-m$. Uno se denomina menor complementario del otro.

Por ejemplo: los menores complementarios de:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

son respectivamente:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Es evidente, que la suma de las ordenes de dos menores, uno complementario del otro, es siempre igual al orden del determinante de donde se han sacado, es decir, n .

Dados dos menores, uno complementario del otro, los dos serán de clase par o bien de clase impar. En efecto, sumando los números que representan los órdenes de las filas y columnas contenidas en un menor y en el otro, aparecen dos veces, cada fila y cada columna, obteniéndose un número par, que solo puede ser el resultado de dos números pares o dos números:

$$\begin{aligned} 2n - 1 + 2m - 1 &= 2(m+n) - 2 = 2 \\ 2n + 2m &= 2(m+n) = 2 \end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores:

$$\begin{aligned} \text{1er Caso} \quad & 1 + 3 + 1 + 4 = 9 \\ & 2 + 4 + 2 + 3 = 11 \\ & \hline & 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2do Caso} \quad & 1 + 2 + 1 + 4 = 8 \\ & 3 + 4 + 2 + 3 = 12 \\ & \hline & 20 \end{aligned}$$

Al menor complementario de otro, considerado con signo + o - según sea de clase par o impar, se llama ADJUNTO O COMPLEMENTO AL MENOR DADO.

Si solo se suprime una fila y una columna se obtiene un menor de orden $n-1$ y su menor complementario se reduce a un solo elemento, común a la fila y columna suprimida, que se llama ADJUNTO del elemento dado, con el signo que le corresponda.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{es} \quad \Delta_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

el adjunto de a_{23} , que es de clase impar, pues:

$$3 + 2 = 5$$

es la clase que le corresponde.-

$$\therefore \Delta_{23} = (-1)^{3+2} \Delta = -\Delta$$

NOTACION: El adjunto de a_{lk} lo designaremos con A_{lk} , de manera que:

$$A_{lk} = (-1)^{l+k} \cdot \Delta_{lk}$$

Ejemplo: El adjunto del elemento $\begin{pmatrix} - & 2 \\ - & 3 \end{pmatrix}$ en el determinante:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & 2 & \frac{1}{3} & -4 \\ 2 & -3 & 7 & \\ -\sqrt{2} & 2 & -8 & \end{vmatrix} \quad \text{es:} \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

7.3.2.- DESARROLLO POR ELEMENTOS DE UNA LINEA

Lo desarrollado en 7.3.1, permite demostrar:

I) El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

Sea la fila de lugar i , en el determinante:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En cada término del desarrollo de A hay siempre un elemento de la fila i y solo uno; luego, podemos clasificar los términos así: todos los que contienen a_{i1} forman el producto $a_{i1} \cdot A_{i1}$, los que contienen a_{i2} forman $a_{i2} \cdot A_{i2}$, ..., los que contienen a_{in} componen $a_{in} \cdot A_{in}$. Luego es:

$$A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}.$$

La aplicación de esta regla, para el desarrollo del determinante A , se simplifica teniendo en cuenta que siendo $(-1)^{i+k}$ el signo que lleva el menor complementario de a_{ik} , y además siendo i constante, (A_{ik} se desarrolla por los elementos de una columna) pues se elige una fila, entonces k va tomando los valores $1, 2, 3, \dots, n$ y el signo del menor es alternativamente $+$ y $-$.

Ejemplo: Desarrollar A por los elementos de la 2ª fila:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) (-18 + 8) + (-24 + 14) - 5(16 - 21) =$$

$$= 5 - 10 + 25 = 20$$

$$\therefore \underline{A = 20}$$

II) La suma de los elementos de una línea, multiplicados por los adjuntos de los elementos de una paralela a ella, es cero.-

En efecto, la suma

$$a_{\lambda 1} \cdot A_{11} + a_{\lambda 2} \cdot A_{12} + \dots + a_{\lambda n} \cdot A_{1n} = 0$$

Al poner en el desarrollo del determinante A , en vez de la fila

$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \dots a_{1n}$, la fila $a_{\lambda 1} \quad a_{\lambda 2} \quad a_{\lambda 3} \dots$

$a_{\lambda n}$, indica que este determinante tiene la fila 1 idéntica a la

λ , luego es nulo, por 7.2.5-III.-

7.3.3.- DESCOMPOSICION DE UN DETERMINANTE EN SUMA DE VARIOS DE IGUAL ORDEN

I) Si los elementos de una línea son polinomios de p términos, se puede descomponer el determinante en suma de p determinantes que tienen las mismas restantes líneas, y, en lugar de aquélla, la formada por los primeros sumandos, por los segundos,, y por los p -ésimos, respectivamente.-
Supongamos que el determinante A :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots \dots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2n} \\ \hline x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & \dots \dots \dots x_n + y_n + z_n \\ \hline a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

tenga la fila 1 formada por elementos que son trinomios.-

Haciendo

$$a_{11} = x_1 + y_1 + z_1 \quad ; \quad a_{12} = x_2 + y_2 + z_2 \quad ; \dots ; a_{1n} = x_n + y_n + z_n$$

y desarrollándolo por los elementos de esa fila, se tiene:

$$A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n} =$$

$$= (x_1 + y_1 + z_1)A_{11} + (x_2 + y_2 + z_2)A_{12} + \dots + (x_n + y_n + z_n)A_{1n} =$$

$$= x_1 A_{11} + x_2 A_{12} + \dots + x_n A_{1n} +$$

$$+ y_1 A_{11} + y_2 A_{12} + \dots + y_n A_{1n} +$$

$$+ z_1 A_{11} + z_2 A_{12} + \dots + z_n A_{1n}$$

pero cada una de estas tres sumas no es más que el desarrollo del determinante A sustituyendo los elementos de la fila 1 por sus primeros sumandos, por los segundos, o por los terceros.-

II) TEOREMA DE JACOBI: Un determinante no varía al sumar a los elementos de una línea los correspondientes de otra paralela, multiplicados por un número cualquiera λ , los de otra multiplicados por un número arbitrario μ , etc.-

En efecto, consideremos la fila 1; al sustituirla por la obtenida sumándole los elementos de la fila λ multiplicados por λ , más los de la fila m multiplicados por μ , aparecen, en lugar de los elementos:

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}$$

los siguientes:

$$a_{11} + \lambda a_{l1} + \mu a_{m1} ; a_{12} + \lambda a_{l2} + \mu a_{m2} ; \dots ; a_{1n} + \lambda a_{ln} + \mu a_{mn}$$

y el determinante que así se obtiene es la suma de tres determinantes: el primero tiene por fila 1 los elementos $a_{11} a_{12} \dots a_{1n}$, es el determinante anterior A ; el 2º tiene por fila 1 los elementos $\lambda a_{l1} \lambda a_{l2} \dots \lambda a_{ln}$; es nulo, pues es el A con dos filas l e 1 idénticas (7.2.5 - III y IV) ; y finalmente , el 3º tiene en lugar de la fila 1 los elementos $\mu a_{m1} \mu a_{m2} \dots \mu a_{mn}$, y también es nulo, pues es el A con las dos filas m e 1 idénticas (7.2.5 - III y IV)

III) Si una línea de un determinante es suma de varias paralelas a ella, multiplicada cada una por un número cualquiera, el determinante es nulo.-

En efecto, descompuesto el determinante A en suma de otros, que tengan en lugar de dicha línea, la formada por los primeros sumandos, por los segundos, etc., todos estos determinantes son nulos, por tener dos líneas paralelas formadas por elementos proporcionales (7.2.5 -IV y III)

7.3.4 : DESARROLLO DE UN DETERMINANTE REBAJÁNDOLO DE GRADO .-

El teorema (II - 7.3.3.) de Jacobi permite simplificar el cálculo de un determinante, reduciendo a cero varios elementos de una línea por convenientes adiciones y sustracciones; al desarrollar por di-

cha línea, varios productos son nulos. Si se logra anular todos los elementos de una línea, menos uno, el producto de este elemento por su adjunto nos da el valor del determinante total.

Según esto, los métodos para desarrollar un determinante serán:

Primer Método : Sumar a cada línea, otra u otras paralelas convenientemente multiplicadas o divididas, para ir anulando todos los elementos de esa línea menos uno,-

Ejemplo: Sea el determinante siguiente:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & 4 & -6 \\ -9 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$

Dejamos inalterada la cuarta fila, y hagamos las siguientes sumas:

- 1) A la 1^a fila le restamos la 4^a multiplicada por 4 .-
- 2) A la 2^a fila le restamos la 4^a multiplicada por 6 .-
- 3) A la 3^a fila le sumamos la 4^a multiplicada por 9 .-

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3+8 & -2-32 & 5+20 \\ 0 & -1+12 & 4-48 & -6+30 \\ 0 & 7-18 & 3+72 & 4-45 \\ 1 & -2 & 8 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & -34 & 25 \\ 0 & 11 & -44 & 24 \\ 0 & -11 & 75 & -41 \\ 1 & -2 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos ahora por los elementos de la primera columna, con lo que se obtiene:

$$A = -1 \begin{vmatrix} 11 & -34 & 25 \\ 11 & -44 & 24 \\ -11 & 75 & -41 \end{vmatrix}$$

Sacamos a 11 como factor común de la primera columna:

$$A = -11 \begin{vmatrix} 1 & -34 & 25 \\ 1 & -44 & 24 \\ -1 & 75 & -41 \end{vmatrix}$$

Dejamos ahora fija la primera columna y:

1) Restamos a la 2ª la 1ª .-

2) Sumamos a la 3ª la 1ª .-

$$A = -11 \begin{vmatrix} 1 & -34 & 25 \\ 0 & -44 + 34 & 24 - 25 \\ 0 & 75 - 34 & -41 + 25 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} 1 & -34 & 25 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & 41 & -16 \end{vmatrix}$$

que desarrollamos por la primera columna, quedando:

$$A = -11 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ 41 & -16 \end{vmatrix} = -11 \left[(-10)(-16) - (-1) \cdot 41 \right]$$

$$= -11 (160 + 41) = -2211$$

Segundo Método: Se reduce previamente una línea elegida de modo que todos sus elementos resulten iguales a 1 ; se procede así:

Elegida la línea que se quiere reducir, por ejemplo una fila, se halla su mínimo común múltiplo y se multiplica cada columna por el cociente de dividir el m.c.m. de la fila por el elemento que corresponde a la columna de que se trata, con lo cual, todos los elementos de la fila serán iguales al m.c.m. , pero en tal caso, el determinante quedará multiplicado por todos los factores por los que hemos multiplicado cada una de las columnas, siendo necesario divi-

dir por ese producto para que su valor no altere; obtenido éste se saca el m.c.m. como factor común, quedando la línea elegida con sus elementos iguales a 1 .-

Ejemplo: Consideremos el mismo determinante anterior:

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & 4 & -6 \\ -9 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$

Tratemos de reducir los elementos de la segunda fila a 1, para ello siendo m.c.m. (6,1,4,6) = 12 dividimos ese m.c.m. por cada elemento de la fila que consideramos, multiplicando a la columna a la cual pertenece, por ese cociente, obteniéndose:

$$A = \begin{vmatrix} 4 \cdot 2 & 3 \cdot 12 & -2 \cdot 3 & 5 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 & -1 \cdot 12 & 4 \cdot 3 & -6 \cdot 2 \\ -9 \cdot 2 & 7 \cdot 12 & 3 \cdot 3 & 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & -2 \cdot 12 & 8 \cdot 3 & -5 \cdot 2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$A = \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 2} \begin{vmatrix} 8 & 36 & -6 & 10 \\ 12 & -12 & 12 & -12 \\ -18 & 84 & 9 & 8 \\ 2 & -24 & 24 & 10 \end{vmatrix} = \frac{12}{2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 2} \begin{vmatrix} 8 & 36 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -18 & 84 & 9 & 8 \\ 2 & -24 & 24 & 10 \end{vmatrix}$$

Saquemos todavía a 2 como factor común de la 1^a y 4^a fila:

$$A = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 2} \begin{vmatrix} 4 & 18 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -18 & 84 & 9 & 8 \\ 1 & -12 & 12 & -5 \end{vmatrix}$$

Restamos o sumamos la 1ª columna a las otras tres:

$$A = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 4 & 22 & -7 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 66 & 27 & -10 \\ 1 & -11 & 11 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 22 & -7 & 9 \\ 66 & 27 & -10 \\ -11 & 11 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{11}{3} \begin{vmatrix} 2 & -7 & 9 \\ 6 & 27 & -10 \\ -1 & 11 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{11}{3} \begin{vmatrix} 2 & -7+22 & 9-8 \\ 6 & 27+66 & -10-24 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{11}{3} \begin{vmatrix} 2 & 15 & 1 \\ 6 & 93 & -34 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{11}{3} \begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 93 & -34 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2211}}$$

Ejemplo I.-

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 14 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 6 & 12 \\ 1 & 0 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -5 \\ 3 & 6 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

3ª col - 4ª col

4ª fila - (1ª, 2ª, 3ª)

$$\begin{array}{c}
 = - \left| \begin{array}{ccc} 5 & 9 & -1 \\ 2 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 5 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{array} \right| = 3 \left| \begin{array}{ccc} 5 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right| = 3 \left| \begin{array}{ccc} 5 & -10 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = \\
 = 3 \left| \begin{array}{cc} -10 & -4 \\ -2 & 3 \end{array} \right| = -3 \cdot 2 \left| \begin{array}{cc} 5 & -4 \\ 1 & 3 \end{array} \right| = -6 (15 + 4) = -6 \cdot 19 = \underline{\underline{-114}}
 \end{array}$$

Ejemplo II:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} 5 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & -9 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & -9 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{array} \right| = \\
 \qquad \qquad \qquad 2^{\text{a}} \text{ fil.} \times 2 - 1^{\text{a}} \qquad \qquad 3^{\text{a}} \text{ fil.} - 2^{\text{a}} \qquad \qquad 2^{\text{a}} \text{ fil.} - 3^{\text{a}} \\
 = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 7 & -16 \\ 1 & -2 & 7 \\ 0 & 6 & -9 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cc} 7 & -16 \\ 6 & 9 \end{array} \right| = \underline{\underline{-33}}
 \end{array}$$

M.m.XV

8.- SIMBOLO8.1.- DEFINICION

Cuando los sumandos de una suma se deducen todos de una misma expresión, dando valores sucesivos a un número indeterminado que en ella figura, se representa abreviadamente escribiendo delante de dicha expresión el signo de sumación SIGMA: $\sum$, poniendo debajo y encima del mismo los valores primero y último que toma dicho índice.-

Ejemplos:

$$\sum_{i=1}^{i=5} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979$$

$$\sum_{k=1}^6 2k = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$$

$$\sum_{k=0}^5 (2k+1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 = 286$$

A veces se usa el signo de sumación en un sentido más general, para representar la suma de todos los valores que toma una expresión, cuando varios índices que en ella figuran cumplen condiciones determinadas.-

+

Empleando el signo $\sum$, el cuadro anterior puede escribirse así:

$$= \sum_{i=1}^m a_i b_1 + \sum_{i=1}^m a_i b_2 + \sum_{i=1}^m a_i b_3 + \dots + \sum_{i=1}^m a_i b_n$$

Observando ahora que todas las sumatorias difieren solo en el índice de la b , y que éste varía de 1 a n , podemos escribir finalmente:

$$= \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_i b_j \right) \quad (2)$$

Si hubiéramos sumado, en el cuadro anterior, por columnas, resultaría la expresión:

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j \right) \quad (3)$$

Puede observarse que el orden de las dos sigmas puede invertirse sin alterar el resultado. Como no hay lugar a confusión, se puede suprimir el paréntesis, sobreentendiéndose que primero se ha de aplicar la sigma inmediata al término general $a_i b_j$, y luego la otra.-

Si en lugar de sumar por filas o por columnas, se hubiese hecho en una forma cualquiera, dando a los subíndices i , j del término general $a_i b_j$ todos los valores de i y de j a n , combinando uno de i con uno de j , se puede escribir:

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \quad (4)$$

que se llama suma doble.-

Resulta, para el producto de dos sumas, las expresiones extraídas de (1) (2) (3) y (4):

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i b_j =$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

8.3.- PRODUCTO DE VARIAS SUMAS.-

El producto de varias sumas es la suma de todos los productos que se pueden formar tomando como factores un término de cada una de las sumas.-

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^p c_k \right) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^p c_k \right) = \\ & = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i b_j c_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_i b_j c_k \end{aligned}$$

Esta última expresión da los términos del producto en cualquier orden; la anterior los ordena respecto de las

a , de las b y de las c .-

8.4.- POTENCIA DE UN POLINOMIO .-

Por la fórmula de Leibnitz puede escribirse que:

$$(a + b + c + \dots + l)^m = \sum \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda!} a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots l^\lambda$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, reciben todos los sistemas posibles de valores naturales, en que se puede descomponer el número m , es decir,

que:

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m.$$

sea por ejemplo, desarrollar

$(a + b + c + d)^5$. Las descomposiciones posibles de 5 en 4 sumandos, son las siguientes:

| α | β | γ | δ |
|----------|---------|----------|----------|
| 5 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |

$$(a + b + c + d)^5 = \frac{5!}{5! 0! 0! 0!} a^5 + \frac{5!}{4! 1! 0! 0!} a^4 b + \dots$$

$$\frac{5!}{3! 2! 0! 0!} \sum a^3 b^2 + \frac{5!}{3! 1! 1! 0!} \sum a^3 b c +$$

$$+ \frac{5!}{2! 2! 1! 0!} \sum a^2 b^2 c + \frac{5!}{2! 1! 1! 1!} \sum a^2 b c d$$

Se obtienen todos los términos del desarrollo permutando las letras que sirven de bases a los exponentes fijos $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, obteniéndose el siguiente desarrollo:

$$(a+b+c+d)^5 = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 +$$

$$+ 5 (a^4 b + a^4 c + a^4 d + b^4 a + b^4 c + b^4 d + c^4 a + c^4 b + c^4 d + d^4 a + d^4 b + d^4 c) +$$

$$+ 10 (a^3 b^2 + a^3 c^2 + a^3 d^2 + b^3 a^2 + b^3 c^2 + b^3 d^2 + c^3 a^2 + c^3 b^2 + c^3 d^2 + d^3 a^2 + d^3 b^2 + d^3 c^2) +$$

$$+ 20 (a^3 bc + a^3 bd + a^3 cd + b^3 ac + b^3 ad + b^3 cd + c^3 ab + c^3 ad + c^3 bd + d^3 ab + d^3 ac + d^3 bc) +$$

$$+ 30 (a^2 b^2 c + a^2 b^2 d + a^2 c^2 b + a^2 c^2 d + a^2 d^2 b + a^2 d^2 c + b^2 c^2 a + b^2 c^2 d + b^2 d^2 a + b^2 d^2 c + c^2 d^2 a + c^2 d^2 b) +$$

$$+ 60 (a^2 bcd + b^2 acd + c^2 abd + d^2 abc) .-$$

Si $a = b = c = d = 1$

es $(a+b+c+d)^4 = 1024$

$$\sum a_0 \quad \sum a_1 \quad \sum a_2 \dots \dots \sum a_1 \dots \dots \dots$$

$$\sum^2 a_0 \quad \sum^2 a_1 \quad \sum^2 a_2 \dots \sum^2 a_1 \dots \dots \dots$$

$$\sum^n a_0 \quad \sum^n a_1 \quad \sum^n a_2 \dots \sum^n a_1 \dots$$

cuya ley de formación, que se recuerda fácilmente por la expresión:

$$\sum^{n+1} a_1 = \sum^n a_1 + \sum^n a_{1+1}$$

Todo término del cuadro de sumas está determinado conocida la primera fila; pero basta calcular los de la primera columna, pues los demás se hallan incrementando todos los subíndices en un mismo número. Los primeros términos calculados de dicha primera columna:

$$\sum a_0 = a_0 + a_1$$

$$\sum^2 a_0 = a_0 + 2a_1 + a_2$$

$$\sum^3 a_0 = a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3$$

que nos recuerda el desarrollo de:

$(1+a)^1$; $(1+a)^2$; $(1+a)^3$, etc., sin otra modificación que la

de poner subíndices a la a en vez de exponentes. Supongamos cierta esta ley hasta el orden n y sea:

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 + \dots + \binom{n}{n} a_n. \quad (1)$$

e incrementando todos los subíndices en 1,

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1 + \binom{n}{1} a_2 + \dots + \binom{n}{n-1} a_n + \binom{n}{n} a_{n+1}$$

sumando término a término, y recordando la relación fundamental de los números combinatorios:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

se podrá escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k &= a_0 + \binom{n+1}{1} a_1 + \binom{n+1}{2} a_2 + \dots + \binom{n+1}{n} a_n + \\ &+ \binom{n+1}{n+1} a_{n+1} \end{aligned}$$

lo cual implica demostrar que la relación (1) es cierta para cualquier valor de n .-

9. CALCULO DE LAS PROBABILIDADES

9.1.- Evolución histórica

Aún cuando los antiguos discutieron mucho sobre la necesidad y contingencia de las cosas, parece ser que el tratamiento matemático de las probabilidades era desconocido.-

Aparte de algunas consideraciones debidas a Galileo (1564-1642) referentes a la estimación correcta de las probabilidades en el juego de los dados, se halla el verdadero origen de esa rama de las matemáticas en la correspondencia mantenida por dos eminentes hombres de ciencia franceses del siglo XVII: Pascal Blas (1623-1662) y P. Fermat (1601-1665). He aquí su origen: Un noble francés, Chevalier de Méré, hombre de gran habilidad y experiencia en los juegos de azar, pidió a Pascal que le explicase algunas contradicciones aparentes entre su razonamiento teórico y las observaciones que había recogido en el juego. Su colega, Fermat, al tener noticia de las soluciones halladas por Pascal se interesó por ellas estableciéndose una correspondencia privada entre ambos y en la misma se halla los gérmenes de esta ciencia.-

C. Huygens (1629-1695) notable hombre de ciencia holandés se dedica al estudio de las probabilidades al tener conocimiento de las investigaciones de Pascal y Fermat y publica en 1654 el primer libro de las probabilidades, titulado "De ratiociniis in ludo aleae" donde resuelve interesantes problemas sobre los juegos de azar, y donde aparece por primera vez el concepto de esperanza matemática.-

Jacobo Bernoulli (1654-1705) estudió esta nueva ciencia durante veinte años, preparando su gran tratado titulado Ars conjectandi que aparece en 1713, ocho años después de su muerte por su sobrino Nicolás Bernoulli. Encara el problema desde un punto de vista más general y elevado, saliendo del estrecho círculo de los juegos de azar.- A él se debe el descubrimiento de uno de los teoremas más importantes conocido con el nombre de teorema de Bernoulli. -

Abraham de Moivre (1667-1754) publicó su notable obra sobre probabilidades titulado "La doctrina del azar" en 1718, volviéndose a reimprimir en 1738 y 1756. Contribuyó mucho al desarrollo de esta nueva ciencia, dotándola de poderosos recursos de cálculo, y algunos resultados importantes atribuidos posteriormente a Laplace y Poisson se hallan tratados en el libro de este matemático.-

Pedro Simón Laplace (1749-1827) ya famoso por sus estudios de mecánica celeste, desde sus comienzos se interesó por las probabilidades. Publicó en 1812 su gran obra titulada Théorie analytique des probabilités destinada al pueblo culto de su época, con nuevas ideas y nuevos métodos analíticos; puede considerarse como la contribución más importantes en el progreso de esta ciencia.- Esta obra ejerció una gran influencia sobre sus sucesores en el dominio de la teoría de las probabilidades en Europa, cuya labor se redujo en la aclaración y desarrollo de los temas contenidos en el libro de Laplace.-

De esta manera, en los principales centros científicos europeos fué retardado el desarrollo posterior de la teoría de las probabilidades.- Se debe a la escuela rusa la etapa inmediata en el progreso de estos estudios. Gracias a la obra de Tshebysheff (1821-

1897) y sus primeros discípulos, A. Markoff (1856-1922) y A. Liapounoff (1858-1918) esta ciencia adquiere notable desarrollo como lo hace notar B. Castelnuovo en su libro "Calcole delle probabilita" en donde considera correctamente las contribuciones debidas a los matemáticos rusos como las más importantes desde la época de Laplace.-

En la actualidad, se nota un gran interés por la teoría de las probabilidades, pero también, ahora, como en los comienzos de este siglo, las contribuciones mas importantes han sido realizadas en Rusia, principalmente por obra de tres eminentes matemáticos: S. Bernstein, A. Kintchine, y A. Kolmogoroff.-

En la moderna teoría se debe citar a Markoff al que se le debe el concepto de probabilidades encaenadas que se refieren a cadenas de probabilidades sucesivas en las que el valor de la probabilidad de una variable en un lugar dado de la cadena depende de los valores obtenidos para las variables anteriores.- Las escuelas rusa y francesa han investigado muy ampliamente estas probabilidades.-

De la escuela francesa cabe citar a Maurice Fréchet (1878.....) que generalizó la teoría clásica de las probabilidades como aplicación de sus espacios abstractos.- De la misma escuela, Emile Borel (1871.....) ha hecho importantes estudios, demostrando el asombroso teorema de que la mentalidad humana no puede imitar al azar.-

La teoría pura pareció en la década de 1930 a 1940 estar a punto, con el fin de engendrar matemáticas esencialmente nuevas por primera vez en la historia de las probabilidades.- En su análisis de los "colectivos", R. von Mises (1883,.....) encontró problemas nue

vos de convergencia.- Para soslayar inacabables discusiones metafísicas sobre el significado de igualmente probable y azar consideré las sucesiones que se pueden presentar, por ejemplo, al echar un dado, tales como 6,6,2,1,4,3,... se dice que esa sucesión es un colectivo, y se postula que si entre los primeros n números de un colectivo se presenta m veces un número determinado, entonces $\frac{m}{n}$ tiende a un límite. "El azar" se reemplaza por el postulado que expresa: que si se forma un colectivo partiendo de otro por selección sin conocer el valor del término elegido, los límites descriptos no cambian. En consecuencia, puede ser posible reemplazar la metafísica dudosa de la probabilidad por matemáticas bien fundadas.-

9.2.- DEFINICIONES DE LA PROBABILIDAD

Hasta el presente han sido dadas varias definiciones sobre la probabilidad y el origen de cada una de ellas se lo encuentra en la definición de una cuestión concreta dada de antemano enunciada para un fin determinado.-

Los más antiguos problemas de probabilidad se refieren a los juegos de azar, y la práctica ha conducido a que en ellos sea fácil discernir cuales son los casos igualmente posibles, por ejemplo, en un dado no se ve la razón, para la cual sea el punto 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 a obtener.-

a) Definición clásica

La primera definición dada reposa sobre la doble hipótesis siguiente:

- I) que las diversas modalidades del resultado de cada prueba puedan ser repartidas sobre un número fijo IV de casos igualmente posibles que se excluyen mutuamente.-
- II) que el suceso esperado E se produce necesariamente en R casos llamados favorables, y no puede producirse en otros, llamados desfavorables.-

La probabilidad del suceso, es por definición, igual al cociente del número de casos favorables R al número de casos posibles N:

$$\text{probabilidad} = \frac{R}{N}$$

esta es la definición que ha sido hecha clásica por Laplace.-

Hay dos objeciones principales a esta definición:

- 1ª) si ella reduce la definición del valor de la probabilidad a la de la igualdad de dos posibilidades, ella no define esta igualdad.-
- 2ª) no se aplica cuando el número de casos igualmente posibles se hace infinito.-

b) Definiciones basadas en la frecuencia

La segunda categoría de problemas de orden práctico donde se introduce la noción de posibilidad en los problemas de la teoría de los ~~seguros~~ y mas tarde se hizo necesario aplicarla en la Estadística.- En estos problemas, así como en aquellos en los cuales intervienen las probabilidades llamadas geométricas o continuas, generalmente no hay forma de repartir todas las modalidades posibles del resultado de una prueba en un número finito de casos igualmente posibles, cada uno de ellos favorable o desfavorable.-

rable, o en tres palabras, la probabilidad no es necesariamente un número fraccionario.- La práctica nos enseña a considerar como valor empírico de la probabilidad de un suceso fortuito, su presencia en una larga serie de pruebas.-

c) Los colectivos

M. de von Mises en "Théorie des probabilités. Fondements et applications" (Annales Inst. H. Poincaré, vol.III,1932, p. 137-190), ha querido fundar una teoría axiomática de la probabilidad poniendo como base de ella, la noción de los colectivos.-

Veamos que entiende Von Mises por colectivo: supongamos que en una serie de pruebas un suceso E se ha presentado r veces en los n ensayos, su frecuencia relativa es $\frac{r}{n}$; si la serie de frecuencias obtenidas en otras series de n ensayos tiende a un límite determinado, dicho límite se llamará la probabilidad de E en el colectivo considerado. /En "Probabilidad, Estadística y Verdad" expresa: Diremos que un colectivo significa un fenómeno de masa o acontecimiento repetible, o, brevemente, una larga serie de observaciones para las que hay razones suficientes para creer en la hipótesis de que la frecuencia relativa de un atributo tendería a un límite fijo si esa larga serie continuara indefinidamente.- Este límite se llamará la probabilidad del atributo dentro del colectivo dado.

Esta tentativa de von Mises de coordinar la teoría y la práctica debe mirarse con simpatía; aún cuando ella no ha adquirido una forma definitiva, como su autor lo expresa en "Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Verhandl d. Internat. Math. Kongr Zürich 1932, Bd. II, p.221-228) .-Con respecto a ella se han hecho importantes objeciones por parte de M.M.Khintchine, Cantelli y M.m.XVI

Copeland que han conducido a contradicciones lógicas; para evitarlas se han sugerido modificaciones convenientes por parte de M. Copeland y M. Wald en "Sur la notion de collectif dans le calcul des Probabilités" (C.R.Acad. Sec/, t. 202, 1936, pag.180-182) que permiten restituir a la teoría de von Mises a una forma exenta de contradicciones.

d) Definición Estadística

En un grupo determinado de n pruebas, un suceso fortuito se ha producido r veces; llamaremos a r la repetición de este suceso y a $\frac{r}{n}$, la frecuencia en el grupo de la n pruebas.- Vamos a admitir como un postulado lo que la experiencia diaria lo confirma, y al que llamaremos:

Ley experimental del azar: se constata que en una serie de pruebas, en las cuales se determina en cada serie, la frecuencia del suceso esperado, dichas frecuencias son practicamente iguales o poco diferentes entre sí cuando el número de ellas es muy grande.

Diremos entonces que:

Las frecuencias de un suceso fortuito E en los grupos que comprenden cada uno numerosas pruebas, perteneciendo todas a una misma categoría C son los valores experimentales de una misma constante física determinada por la naturaleza del suceso E y por la categoría C.-

Es esta constante física que llamaremos la probabilidad del suceso fortuito E en la categoría de pruebas C, tal es la definición empírica de la probabilidad adoptada por M. Fréchet.-

Se puede aún agregar, que la presición de la medida de la probabilidad p del suceso E por su frecuencia, es tanto ma-

por cuanto más grande sea el número n de las pruebas efectuadas; sin embargo, debe distinguirse bien esta observación de aquella extraída de la expresión.-

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

donde f_n es la frecuencia; la cual, tomada en el sentido estricto del análisis, es falsa.-

9.3.- CERTEZA e IMPOSIBILIDAD

Como toda frecuencia relativa es la relación entre el número de veces que se presenta el suceso y el número total de pruebas que evidentemente es mayor que el anterior, dicha frecuencia es menor que 1, y oscila en 0 y 1, de modo, que cuando no se presenta el suceso, su repetición es cero, y hay imposibilidad en su presentación, pero en cambio; si en cada prueba se presenta y ello sucede en todas las experiencias, hay certeza en el mismo que quede caracterizado por 1.-

9.4.- Probabilidades de los sucesos opuestos

La no verificación de un suceso E puede considerarse como la presentación de un nuevo suceso F, contrario u opuesto al E ya que si no se presenta el E debe presentarse necesariamente el F, puede decirse que las probabilidades de dos sucesos opuestos dan por suma a 1, pues si en n casos posibles, r son favorables a E, el resto ($n-r$) son favorables a F y sus respectivas probabilidades son

$$p_E = \frac{r}{n} \quad ; \quad p_F = \frac{n-r}{n}$$

$$\text{y es} \quad p_E + p_F = \frac{r}{n} + \frac{n-r}{n} = 1$$

9.5.- Cálculo de las probabilidades por enumeración directa de los casos.

Haciendo uso de la definición clásica, puede hallarse la probabilidad de un suceso, por aplicación directa de la misma, cuando es posible realizar una enumeración completa de todos los casos igualmente probables y el número de los casos favorables a dicho acontecimiento.

M.m.

17ª Conferencia

11/10/1955

9.6.- CALCULO DE LAS PROBABILIDADES POR ENUMERACION DIRECTA DE LOS CASOS.-

JUEGO DE DADOS

Nº 1

Se arrojan dos dados: Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 8 puntos?

(J.V. Uspensky pag. 17)

Con el primer dado tenemos 6 casos posibles y cada uno de estos casos puede ir acompañado con cualquiera de los 6 posibles números del segundo dado.

Casos distintos: $6 \times 6 = 36$

Admitiendo a los dados idealmente regulares en cuanto a su forma y perfectamente homogéneos, hay razones para considerar a dichos 36 casos como igualmente probables.

1) Obtención de 7 puntos: Cálculo del número de casos favorables:

| | | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---------|
| Primer dado | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
| Segundo dado | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 6 casos |

2) Obtención de 8 puntos: Cálculo del número de casos favorables:

| | | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---------|
| Primer dado | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | — | Total |
| Segundo dado | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | — | 5 casos |

3) Probabilidad de obtener 7 puntos:

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

4) Probabilidad: de obtener 8 puntos:

$$P_8 = \frac{5}{36}$$

— N^o 2 —

Cuál es la probabilidad de sacar un ambo de unos al arrojar los dados?

- 1) Número de casos posibles: Cada uno de los números del primer dado pueden ir acompañados con cada uno de los 6 del segundo, luego, el número de casos posibles es $6 \times 6 = 36$.
- 2) Número de casos favorables: La aparición de un doble ~~los~~ posible solo una vez; el número de casos favorables es 1.-
- 3) Probabilidad del ambo:

$$P_1 = \frac{1}{36}$$

— N^o 3 —

Calcular las probabilidades que se obtienen al arrojar dos dados de obtener un punto dado.-

(R. de Montessus pag.19)

- 1) Combinaciones posibles: con los puntos de los dos dados:

| | | | |
|------------|------------|-----------|------------|
| 1 y 1 = 2 | 2 y 1 = 3 | 3 y 1 = 4 | 4 y 1 = 5 |
| 1 y 2 = 3 | 2 y 2 = 4 | 3 y 2 = 5 | 4 y 2 = 6 |
| 1 y 3 = 4 | 2 y 3 = 5 | 3 y 3 = 6 | 4 y 3 = 7 |
| 1 y 4 = 5 | 2 y 4 = 6 | 3 y 4 = 7 | 4 y 4 = 8 |
| 1 y 5 = 6 | 2 y 5 = 7 | 3 y 5 = 8 | 4 y 5 = 9 |
| 1 y 6 = 7 | 2 y 6 = 8 | 3 y 6 = 9 | 4 y 6 = 10 |
| | | | |
| 5 y 1 = 6 | 6 y 1 = 7 | | |
| 5 y 2 = 7 | 6 y 2 = 8 | | |
| 5 y 3 = 8 | 6 y 3 = 9 | | |
| 5 y 4 = 9 | 6 y 4 = 10 | | |
| 5 y 5 = 10 | 6 y 5 = 11 | | |
| 5 y 6 = 11 | 6 y 6 = 12 | | |

2) Número de casos posibles:

$$6 \times 6 = 36$$

3) Número de casos favorables para obtener 2 :

Combinación de 1 y 1 total = 1

4) Número de casos favorables para obtener 3:

Combinaciones de 1 y 2, 2 y 1 total = 2

5) Número de casos favorables para obtener 4:

Combinaciones de 1 y 3 ; 2 y 2 ; 3 y 1 total = 3

6) Número de casos favorables para obtener 5:

Combinaciones de

1 y 4 ; 2 y 3 ; 3 y 2 ; 4 y 1 total = 4

7) Número de casos favorables para obtener: 12

Combinaciones de 6 y 6 total = 1

8) Probabilidades de los puntos:

| | | | | | | | | | | | |
|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Puntos: : | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Probabilidad: | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

9) Observaciones:

Esta divergencia en las probabilidades de los distintos puntos explica la moderación aparente del propietario de un pequeño juego que los aficionados de carreras han visto frecuentemente practicar en los hipódromos. En un rincón del césped (Pelouse), apartado de la vista de los agentes (los juegos públicos de azar están prohibidos en Francia) un individuo instala una mesa plegadiza, sobre la cual figuran en dos columnas

| | |
|---|----|
| 2 | 8 |
| 3 | 9 |
| 4 | 7 |
| 5 | 10 |
| 6 | 11 |
| | 12 |

los números 2, 3, 4, 5, 6 y 8, 9, 10, 11, 12; el número 7 está colocado en el medio..

A B El punto es apostado sobre una de las columnas A ó B, A por ejemplo, y se arrojan los dos dados sobre el tapiz.-

Si uno de los números de la columna A sale, la apuesta gana una vez su postura, es decir, el doble de lo que ha jugado. Si uno de los números de la columna B o el número 7 sale, el banquero se guarda la apuesta colocada en la columna A.

10) Razonamientos que efectúa el jugador.

Instintivamente el jugador razona así "Tengo para mí los números 2, 3, 4, 5, 6 y contra mí los números 7, 8, 9, 10, 11, 12. Tengo pues 5 chances sobre 11 de ganar. Si gano retiro $-\frac{11}{5}-$ de mi juego (apuesta), o sea un poco más de doble. Pero es necesario que el banquero viva y yo le permita una pequeña concesión. Un poco de suerte y saldré ganancioso".-

El jugador hace un razonamiento falso. El no tiene 5 chances sobre 11 de ganar. El, tiene en efecto, para él los números 2, 3, 4, 5, 6 que figuran

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \text{ veces}$$

en la tabla T) apartado (1), mientras que los números que pueden salir, es decir, los casos posibles, son 36.- Tiene solamente 15 chances de ganar sobre 36 ó 5 chances sobre 12.-

El banquero paga 1 vez la postura. Puesto que la chance del jugador está representada por la fracción $-\frac{5}{12}-$, debería pagar la postura multiplicada por $-\frac{12}{5}-$, o sea 1 vez más $-\frac{2}{5}-$ de la apuesta.

El jugador que ha jugado 1 franco deberá retirar, si gana, no 2 francos, sino:

$$2 \text{ francos} + \frac{2}{5} \text{ franco} = 2.40 \text{ francos}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad del jugador} &= \frac{5}{12} \\ \text{Probabilidad del Banquero} &= 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

11) Ganancia media del banquero:

El jugador tiene 5 chances y el banquero 7; 5 de las 7 chances equilibran las 5 chances del jugador. Le quedan al banquero 2 chances sobre 12: sobre 12 tiradas el banquero ganará 5, el jugador ganará 5 también, pero el banquero ganará aún 2 veces más. El banquero obtendrá, como beneficio 2 tiradas sobre 12, ó, 1 sobre 6 y, si todas las posturas son iguales, ganará la sexta parte de las mismas. Una postura doble, triple, equivalen a 2,3 posturas simples, el banquero del pequeño juego ganará, en promedio, $\frac{1}{6}$ de las sumas empeñadas.

Si él tiene suerte, ganará $\frac{1}{6}$ de las sumas apostadas
Si él no tiene suerte, ganará menos, puede perder. Supuesto eso,
la experiencia nos enseña que sobre un gran número las jugadas
con suerte o sin ella, se neutralizan, Es la ley de Bernocelli:
 Los parroquianos que juegan, todos los días, en el café, el mismo juego, no saben, que en promedio ellos pagan el gasto diario?. Al final de la "estación", el banquero del pequeño juego habrá obtenido un beneficio seguro. El que no se quiera convencer, no tiene nada más que observar los resultados de la experiencia. - El banquero conoce a su manera la ley de Bernocelli.

— N^o 4 —

Cuál es la probabilidad de sacar con tres dados 9, 10, 11, 12, puntos ? (Uspensky Ej. N^o 1 pag. 28 - Kuopf Ej. N^o 4 pag.12)

1) Números de casos posibles.-

Como cada una de las caras del primer dado se pueden

combinar con cada una de las 6 caras del segundo, tendríamos $6 \times 6 = 36$ casos posibles con 2 dados. Cada uno de los 36 casos posibles anteriores se pueden combinar con cada una de las 6 caras del tercer dado y tendríamos:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216 \text{ casos posibles}$$

2) Número de los casos favorables.-

Razonemos con el punto 9. Para que en la tirada de 3 dados salga este valor, supongamos que el primero dé 1 punto; entonces el segundo no puede salir con 1 punto, porque el tercero debería dar 7, lo que es imposible, - pero en cambio, el número de puntos correspondiente a cada dado puede ser 1, 2, 6, que se obtendrían en dicho orden o en uno de los siguientes:

1, 6, 2 ; 2, 6, 1 ; 2, 1, 6 ; 6, 1, 2; 6, 2, 1

Resulta, por tanto, que sacar 9 puntos con 3 dados y dichos números pueden conseguirse de seis maneras: tenemos hasta ahora 6 casos favorables.-

Pero la suma 9 también puede aparecer cuando las caras superiores de los dados muestren los números 1, 3, 5, lo que cabe que ocurra de seis maneras diferentes.-

Además también saldrán 9 puntos si los tres dados enseñan las caras marcadas con 1, 4, 4 puntos, cosa posible de 3 maneras diferentes, que son además de la indicada

4, 1, 4 y 4, 4, 1

Los restantes casos favorables y, además, los correspondientes a las sumas 10, 11, 12, se especifican en la siguiente tabla:

| 9 | | | | 10 | | | | 11 | | | | 12 | | | |
|-------|---|---|-------|-------|---|---|-------|-------|---|---|-------|-------|---|---|-------|
| Suma | | | Casos | Suma | | | Casos | Suma | | | Casos | Suma | | | Casos |
| 1 | 2 | 6 | 6 | 1 | 3 | 6 | 6 | 1 | 4 | 6 | 6 | 1 | 5 | 6 | 6 |
| 1 | 3 | 5 | 6 | 1 | 4 | 5 | 6 | 1 | 5 | 5 | 3 | 2 | 4 | 6 | 6 |
| 1 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 6 | 3 | 2 | 3 | 6 | 6 | 2 | 5 | 5 | 3 |
| 2 | 2 | 5 | 3 | 2 | 3 | 5 | 6 | 2 | 4 | 5 | 6 | 3 | 3 | 6 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 6 | 2 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 5 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 1 |
| Total | | | 25 | Total | | | 27 | Total | | | 27 | Total | | | 25 |

3) Probabilidades

$$P_9 = P_{12} = \frac{25}{216}; \quad P_{10} = P_{11} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

4) Otros puntos

De la misma manera obtendríamos

$$P_8 = P_{13} = \frac{21}{216} = \frac{7}{72} \quad P_7 = P_{14} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72};$$

$$P_6 = P_{15} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108} \quad P_5 = P_{16} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

$$P_4 = P_{17} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72} \quad P_3 = P_{18} = \frac{1}{216}$$

5) Verificación

$$\begin{aligned}
 P_3 + P_4 + P_5 + \dots + P_{17} + P_{18} &= \frac{1}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{10}{216} + \frac{15}{216} + \\
 &+ \frac{21}{216} + \frac{25}{216} + \frac{27}{216} + \frac{27}{216} + \frac{25}{216} + \frac{21}{216} + \frac{15}{216} + \frac{10}{216} + \frac{6}{216} + \\
 &+ \frac{3}{216} + \frac{1}{216} = \frac{2 \times 108}{216} = \frac{216}{216} = 1
 \end{aligned}$$

Cuál es la probabilidad de sacar K puntos con n dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$? (R. de Montessus, pag. 21) (Poincaré N^o 19 pag. 49)

1) Número de casos posibles.—

Cada uno de los números α puede recibir 6 valores. .
Luego el número de las combinaciones posibles es aquél dado por las variaciones con repetición de 6 elementos y de clase k (Knoff pag. 19 y 20) o sea 6^n .-

2) Número de casos favorables.—

Calculemos el número N de combinaciones $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ donde se verifique la condición

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k ;$$

para ello consideremos la identidad

$$\sum_{\alpha_i=1}^{\alpha_i=6} t_1^{\alpha_1} \cdot t_2^{\alpha_2} \cdot t_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot t_n^{\alpha_n} = (t_1 + t_1^2 + \dots + t_1^6) (t_2 + t_2^2 + \dots + t_2^6) \cdot \dots \cdot (t_n + t_n^2 + \dots + t_n^6)$$

$$\dots (t_n + t_n^2 + \dots + t_n^6) = \frac{t_1 - t_1^7}{1 - t_1} \cdot \frac{t_2 - t_2^7}{1 - t_2} \cdot \dots \cdot \frac{t_n - t_n^7}{1 - t_n}$$

el signo $\sum$ designa la suma de todos los monomios obtenidos dando a los distintos números α los valores 1, 2, 3, ..., n .-

$$\text{Si } t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t_n$$

$$\text{es } \sum t^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \sum N t^k = \left(\frac{t - t^7}{1 - t} \right)^n = \frac{(t - t^7)^n}{(1-t)^n}$$

$$= (t - t^7)^n (1 - t)^{-n}$$

y el coeficiente de t^k en el segundo miembro será el número N
M.m.XVII

3) Aclaración sobre la identidad

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha_i=1}^6 t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n} = (t_1 + t_1^2 + t_1^3 + \dots + t_1^6) (t_2 + t_2^2 + \dots + t_2^6) \dots \\
 & \dots (t_n + t_n^2 + t_n^3 + \dots + t_n^6) \\
 & = t_1 (1 + t_1 + t_1^2 + \dots + t_1^5) \cdot t_2 (1 + t_2 + t_2^2 + \dots + t_2^5) \dots \\
 & \dots t_n (1 + t_n + t_n^2 + \dots + t_n^5) = \\
 & = t_1 t_2 \dots t_n \frac{1 - t_1^6}{1 - t_1} \cdot \frac{1 - t_2^6}{1 - t_2} \dots \frac{1 - t_n^6}{1 - t_n} = \\
 & \frac{t_1 - t_1^7}{1 - t_1} \cdot \frac{t_2 - t_2^7}{1 - t_2} \dots \frac{t_n - t_n^7}{1 - t_n}
 \end{aligned}$$

4) probabilidades

$$P_k = \frac{N}{6^n}$$

5) Calcular la probabilidad de sacar el punto 7 con 3 dados:

Del segundo miembro de la identidad del apartado (2) para

$$k = 7 ; n = 3$$

$$\begin{aligned}
 (t - t^7)^3 (1 - t)^{-3} &= (t^3 - 3t^9 + 3t^{15} - t^{21}) \left(1 + \frac{3}{1}t + \right. \\
 &+ \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} t^2 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \dots \dots \dots)
 \end{aligned}$$

y t^7 tiene por coeficiente

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

La probabilidad pedida es

$$P_7 = \frac{15}{63} = \frac{15}{216}$$

Nº 6

Cuál es la probabilidad de que aparezca la suma 7 al tirar dos dados simultáneamente ?. Cuál es la probabilidad de la suma 11 ?.
Probar que el tiro más probable es el de suma 7.- (Sokolnikoff.pag. 491- Ej. Nº 1)

Utilizando el razonamiento del Ej. Nº 3 pag.2 se tiene:

1) Número de casos posibles : $6 \times 6 = 36$

2) Número de casos favorables para obtener 7 :

1 y 6 = 7 ; 2 y 5 ; 3 y 4 ; 4 y 3 ;

5 y 2 ; 6 y 1

Total = 6 casos

3) Número de casos favorables para obtener 11:

5 y 6 ; 6 y 5

Total = 2 casos

4) Probabilidades:

$$P_7 = \frac{6}{36} ; \quad P_{11} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

5) Tiro más probable: Del apartado 8) Ej. Nº 3 pag. 3 se obtienen los puntos y las probabilidades siguientes:

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Puntos | : | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Probabilidades: | | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

El tiro mas probable es aquél que da la suma 7

Nº 7

JUEGO DE CARA Y CRUZ

Una moneda se arroja al azar 3 veces sucesivamente.

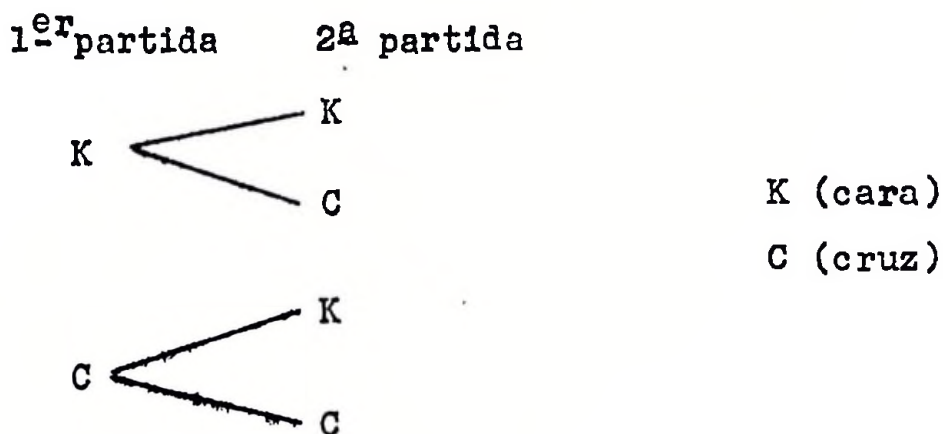
Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?. Cuál es la proba-
M.m.XVII

bilidad de obtener dos cruces, por lo menos una vez ? (Wapensky Nº 2 pag. 18).- (Borel pag. 9) (Borel y Deltheil pag.3).

En el primer tiro hay dos casos posibles: cara o cruz. Dejando de lado las objeciones relativas a la identidad de las dos caras, las que suponemos iguales, los dos casos pueden considerarse como igualmente probables. En el juego de una sola partida, la probabilidad de sacar cara o bien cruz, es para ambos casos igual a $\frac{1}{2}$.

Cualquiera sea el resultado de la primer partida, la segunda puede dar como resultado cara o cruz, y cada una de estas hipótesis son igualmente probables, pues el resultado de la primera no tiene influencia sobre la segunda, según la expresión de J. Bertrand, "la pieza de moneda no tiene conciencia ni memoria".-

Combinando los resultados de la primera partida con los de la segunda obtenemos:



Los cuatro resultados son igualmente posibles: se pueden representar por los símbolos:

KK ; KC ; CK; CC

que son los términos obtenidos efectuando el producto

$$(K + C) (C + K) = KK + KC + CK + CC$$

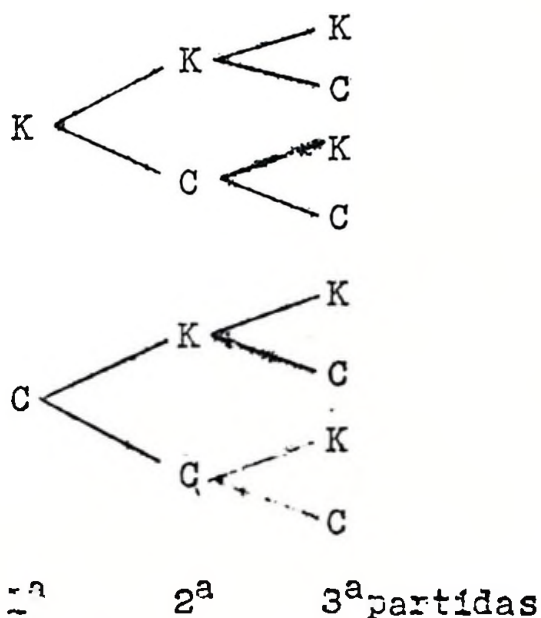
se dirá que las probabilidades de cada una de ellas es $\frac{1}{4} = 0.25$. Po-
M.m.XVII

dremos escribir:

| | | | |
|--|----|-----|-----------|
| | KK | 1/4 | |
| | KC | 1/4 | 2:4 = 1:2 |
| | CK | 1/4 | |
| | CC | 1/4 | |

Hemos reunido con un trazo las dos combinaciones KC y CK, pues ellas son idénticas cuando no se tiene en cuenta el orden.

Una tercera partida puede dar cara o cruz, cualesquiera que sean los cuatro resultados dados las dos primeras partidas. Una serie de tres partidas puede dar ocho resultados diferentes, todos igualmente probables, como puede verse en el siguiente esquema.



que nos da la tabla siguiente:

| | | |
|---------|-------|-------|
| KKK | 1 : 8 | |
| { KK C | 1 : 8 | 3 : 8 |
| { K C K | 1 : 8 | |
| { C K K | 1 : 8 | |
| { K C C | 1 : 8 | 3 : 8 |
| { C K C | 1 : 8 | |
| { C C K | 1 : 8 | |
| CCC | 1 : 8 | |

que son los términos del desarrollo del producto

$$(K+C) (K+C) (K+C)$$

Para obtener dos caras se ve ello puede solo suceder de 3 maneras, siendo luego 3 el número de casos favorables, la probabilidad buscada es

$$P_{2k} = \frac{3}{8}$$

Para la segunda pregunta observemos que hay un solo caso en el cual no se presentan cruces, por lo tanto, el número de casos favorables para obtener cruces, por lo menos una vez es $8-1 = 7$, de modo que la probabilidad pedida es:

$$P_c = \frac{7}{8}$$

$$N^{\circ} \quad 8$$

Cuál es la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces cuando se arrojan simultáneamente 4 monedas? (Usperensky, N^o 2, pag.28) , - (Borel, pag. 14) (Bores y Deltheil pag.4).-

El problema se reduce al anterior pues el hecho de arrojar 4 monedas simultáneamente es lo mismo que arrojar una cuatro veces, pues las cuatro acontecimientos son independientes. Aprovechando los resultados del Ej. N- 7 resulta que en una cuarta jugada obtendremos la siguiente tabla siguiendo el mismo proceso de las jugadas anteriores:

| | | | | |
|---|---|-----------|----------|--------------|
| 4 | K | K K K K | 1 : 16 | |
| | | (K K K . | 1 : 16) | |
| 3 | K | (K K . K | 1 : 16 | 4 : 16 = 1:4 |
| | | (K . K K | 1 : 16 | |
| | | (. K K K | 1 : 16 | |
| | | (. K K K | 1 : 16 | |
| | | (K K . . | 1 : 16 | |
| | | (K . K . | 1 : 16 | |
| 2 | K | (K . . K | 1 : 16 | 6 : 16 = 3:8 |
| | | (. K K . | 1 : 16 | |
| | | (. K . K | 1 : 16 | |
| | | (. . K K | 1 : 16 | |

$$\begin{array}{lcl}
 1 \text{ K} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{K} \cdot \cdot \cdot & 1 : 16 \\ \cdot \text{K} \cdot \cdot & 1 : 16 \\ \cdot \cdot \text{K} \cdot & 1 : 16 \\ \cdot \cdot \cdot \text{K} & 1 : 16 \end{array} \right\} & 4 : 16 = 1 : 4 \\
 0 \text{ K} & \left\{ \begin{array}{ll} \cdot \cdot \cdot \cdot & 1 : 16 \end{array} \right\} &
 \end{array}$$

Se ve que el jugador a cara solamente tiene 1 chance sobre 16 de ganar las 4 partidas; 4 chances sobre 16 (0 1 sobre 4) de ganar 3 caras; 6 chances sobre 16 (0 sobre 8) de ganar dos caras, 4 sobre 16 (0 1 sobre 4) de ganar una cara y finalmente 1 sobre 16 de no ganar nada.-

$$P_{2k \ 6 \ 2c} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{N^o}{9}$$

Cuál es la probabilidad de obtener k caras en n partidas arrojando una moneda ?. (Borel y Deltheil pag. 4) (Borel El azar pag. 34).-

En la primera partida:

$$\begin{array}{ll}
 K + C & \text{Total: 1 cara} \\
 \text{Casos posibles} = 2^1 = 2
 \end{array}$$

En la segunda partida:

$$(K+C) (K+C) = KK + KC + CK + CC$$

$$\text{Casos posibles} = 2^2 = 4 \qquad \text{Total: 2 caras}$$

En la tercera partida:

$$(K+C) (K+C) (K+C) = (K+C)^3$$

$$= KKK + 3 KKC + 3 KCC + CCC$$

$$\text{Casos posibles} = 2^3 = 8 ; \qquad \text{Total: 3 caras}$$

El mismo razonamiento, repetido tantas veces como se desee, muestra que si se considera los resultados dados por una serie de n M.m.XVII

partidas, hay 2^n casos posibles, todos igualmente probables; estos casos están representados por los términos del producto

$$(K+C) (K+C) \dots (K+C)$$

de n factores, que supuesto desarrollado, toma la forma:

$$\underbrace{KK \dots KK}_n + KK \dots KC + \dots$$

Si se consideransolamente, en los resultados de una serie de n partidas, el número total de caras o cruces, los casos posibles son $(n+1)$: n caras y 0 cruces : $(n-1)$ caras y 1 cruces, etc. hasta 0 caras y n cruces. Pero las probabilidades de estos diferentes casos no son iguales; se hallan entre sí como los coeficientes del binomio:

$$(K+C)^n = K^n + C_n^1 K^{n-1} C + \dots + C_n^k K^{n-k} C^k + \dots + C^n$$

En efecto, entre las 2^n combinaciones, cuántas habrán dado k veces cara ?, designemos su número con C_n^k y notemos que para obtener k veces cara hace falta que: o bien las $(n-1)$ primeras pruebas hayan dado k veces cara y la n ésima de cruz, o bien que las $(n-1)$ primeras pruebas hayan dado $k-1$ veces cara y que la n ésima de cara.

La primera alternativa, comprende tantas combinaciones como hay que dan k caras entre $n-1$ pruebas, es decir. C_{n-1}^k , combinaciones; del mismo modo, la segunda alternativa da C_{n-1}^{k-1} combinaciones; se tiene por lo tanto,

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

la probabilidad de obtener k caras en n partidas es pues:

$$P_k = \frac{1}{2^n} \cdot C_n^k$$

$$P_k = \frac{n!}{2^n k! (n-k)!}$$

apliquemos esta fórmula en el Ej. N^o 7 pag. 133

$$n = 3 \quad k = 2$$

$$\therefore P_2 = \frac{3!}{2^3 \cdot 2! \cdot (3-2)!} = \frac{3}{8}$$

Apliquémosle el Ej. nº 8 pag. 135

$$n = 4 \quad k = 2$$

$$P_2 = \frac{4!}{2^4 \cdot 2! \cdot (4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2}{16 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

Nº 10

(Borel: El azar pag.36)

Un jugador de cara y cruz, tiene más probabilidades de ganar 3 partidas entre 4 ó de ganar 5 entre 8 ?.

Conviene precisar este enunciado indicando si el jugador debe ganar precisamente 3 partidas y 5 partidas respectivamente o si debe ganar por lo menos 3 partidas / ^{o 5 partidas;} en otros términos, si el jugador gana 6 partidas debe considerarse que ha ganado 5?. Esto es evidentemente una cuestión a convenir; examinemos sucesivamente los dos casos.-

Primer caso: El enunciado se toma en sentido extricto, es decir, que los números de partidas ganadas deben ser precisamente 3 y 5.

Del Ej. Nº 9, la probabilidad de ganar 3 partidas en 4 es:

$$n = 4 \quad k = 3$$

$$P_3 = \frac{4!}{2^4 \cdot 3! \cdot (4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{16 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de ganar 5 partidas entre 8 es:

$$n = 8$$

$$k = 5$$

$$P_5 = \frac{8!}{2^8 \cdot 5! \cdot (8-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{16 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7}{32}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{7}{32} \text{ es decir } P_3 > P_5$$

Se tiene más ventaja en aportar que se ganarán 3 partidas entre 4 que en apostar que se ganarán 5 partidas entre 8.-

Segundo caso: El enunciado se toma en un sentido amplio, es decir, que los números de partidas ganadas deben ser por lo menos 3 y 5.

Del Ej. N^o 9, la probabilidad de ganar 3 partidas entre 4 es $P_3 = \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$

vale decir, que hay 4 casos favorables en 16 casos posibles; y para ganar 4 partidas entre 4 es: $n = k = 4$:

$$P_4 = \frac{4!}{2^4 \cdot 4! \cdot (4-4)!} = \frac{1}{16}$$

es decir: 1 caso favorable en 16 casos posibles, luego

$$P_{3 \text{ ó } 4} = \frac{1 + 4}{16} = \frac{5}{16}$$

Para ganar 8, 7, 6, ó 5 partidas hay:

$$n = k = 8 \quad P_8 = \frac{8!}{2^8 \cdot 8! \cdot (8-8)!} = \frac{1}{256}$$

1 caso favorable en 256 posibles

$$n = 8 ; k = 7 ; P_7 = \frac{8!}{2^8 \cdot 7! \cdot (8-7)!} = \frac{8}{256}$$

8 casos favorables en 256 posibles

$$n = 8 ; k = 6 ; P_6 = \frac{8!}{2^8 \cdot 6! \cdot (8-6)!} = \frac{7 \cdot 8}{256 \cdot 2} = \frac{28}{256}$$

28 casos favorables en 256 posibles

$$n = 8 \quad k = 5 \quad P_5 = \frac{8!}{2^8 \cdot 5! \cdot (8-5)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{256 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{56}{256}$$

56 casos favorables en 256 posibles.-

Luego para ganar por lo menos 5 partidas entre 8 hay

$$1 + 8 + 28 + 56 = 93 \text{ casos favorables}$$

y
256 casos posibles

$$\therefore P_5 = \frac{93}{256}$$

pero $\frac{5}{16} < \frac{93}{256}$

es decir $P_3 < P_5$

hay más ventaja en apostar que se ganarán por lo menos 5 partidas entre 8 que en apostar que se ganarán por lo menos 3 partidas entre 4.-

Nº 11

Se sacan al azar 2 cartas de un mazo bien barajado de cartas. Cuál es la probabilidad de que las dos cartas que se han sacado sean ases ? (Uspensky, pag. 18, Nº 3).-

1) Casos probables:

Puesto que existen 52 cartas en el mazo habrá 52 maneras distintas de extraer una primera carta. Después de extraída la primera carta, la segunda debe ser una de las 51 restantes. Por lo tanto, el número total de maneras distintas de sacar dos cartas es

52 x 51 y consideraremos a todos esos casos como igualmente probables.-

2) Casos favorables:

Dado que existen 4 ases en la baraja, hay 4 maneras de sacar el primer as. Después que éste ha sido extraído, hay 3 maneras de obtener el segundo as, y el número total de maneras distintas de obtener dos ases es 4×3 .

3) Probabilidad:

$$P_a = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{13 \times 17} = \frac{1}{221}$$

Nº 12

Dos cartas se sacan de un mazo completo, volviéndose a poner en el mismo la primera carta que se ha sacado antes de sacar la segunda.

Cuál es la probabilidad de que ambas cartas extraídas pertenezcan al mismo palo ? (Uspensky, pag. Nº 19- Nº 4)

1) Casos probables:

Hay 52 maneras distintas de obtener la primera carta. Para la segunda, también existen 52 maneras distintas debido a que hemos vuelto a poner en el mazo la primera carta sacada, con lo cual tenemos el número original 52. El número total de maneras distintas de extraer 2 cartas es 52×52 .

2) Casos favorables:

Como hay 13 cartas de cada palo, el número de casos favorables a la obtención de 2 cartas de un palo dado es 13×13 .-

3) Probabilidad

$$P_a = \frac{13 \times 13}{52 \times 52} = \frac{1 \times 1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

Nº 13

Se toman 13 cartas al azar de un mazo de 52 cartas. Cuál es la probabilidad para que los 4 ases se hallen entre las 13 cartas extraídas?
(Borel y Deltheil: Nº 2, pag.6).-

1) Casos posibles:

Consideramos como igualmente probables todas las combinaciones de 13 cartas tomadas entre las 52 cartas del mazo. El número total de los casos posibles vendrá dado por

$$C_{52}^{13} = \frac{52!}{13! (52-13)!} = \frac{52!}{13! 39!}$$

2) Casos favorables:

Un grupo de 13 cartas que contengan 4 ases se obtiene por la agregación de los 4 ases a cada combinación de 9 cartas tomadas entre las 48 en las que se han sacado los ases; y ésto sin omisión ni repetición. El número de los casos favorables es pues:

$$C_{48}^9 = \frac{48!}{9! (48-9)!} = \frac{48!}{9! 39!}$$

3) Probabilidad

$$P_4 = \frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}} = \frac{48! 13!}{52! 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{11}{4165}$$

$$P_4 = \frac{1}{378}$$

Buscar la probabilidad de que al extraer 4 cartas de una baraja de 40 para obtener 3 reyes y un caballo.-

(Chacón: Análisis matemático pag. 140)

1) Casos posibles:

Los casos posibles se componen de :

$$C_{40}^4 = \frac{40!}{4! 36!}$$

2) Casos favorables:

Se compone de C_4^3 (modos distintos de obtener 3 reyes) por las C_4^1 modos distintos de obtener 1 caballo.-

3) Probabilidad:

$$p = \frac{C_4^3 \cdot C_4^1}{C_{40}^4} = \frac{\frac{4!}{3! 1!} \cdot \frac{4!}{1! 3!}}{\frac{40!}{4! 36!}} = \frac{16}{\frac{40!}{4! 36!}}$$

$$p = \frac{8}{45.695}$$

Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 negras. Se saca una bola. Cuál es la probabilidad de que sea negra? (Uspensky. Nº 5, pag. 19).-

1) Número de casos posibles

El número total de bolas de la urna es 8. Para distinguirlas entre sí imaginemos que las hemos numerado. En cuanto al número que puede llevar la esfera que se saque, hay 8 casos posibles que pueden considerarse razonablemente como igualmente probables.-

2) Número de casos favorables:

Hay 5 casos favorables al color negro de la esfera que se saque.

3) Probabilidad:

$$P = \frac{5}{8}$$

Nº 16

El contenido de la urna es el mismo que en el problema anterior. Supongamos ahora que se retira una esfera y que se deja a un lado sin ver su color. Sacamos entonces otra bola y pedimos que se calcule la probabilidad de que esta nueva esfera sea negra y cual de que sea blanca, (Uspensky, Nº 6, pag. 19).-

1) Número de casos posibles:

Supongamos nuevamente que las esferas están numeradas de modo tal que las blancas tengan los número 1, 2 y 3; y que las negras tengan los números 4, 5, 6, 7, y 8. Evidentemente, existen 8 maneras de sacar la primera bola, y cualquiera que sea la que se saque, existen solo 7 maneras distintas de retirar la segunda bola. El número total de casos igualmente probables es $8 \times 7 = 56$.

2) Número de casos favorables:

Es algo más difícil calcular el número de casos favorables a la extracción de una bola blanca o negra en el segundo ensayo.

Caben dos hipótesis:

a) Supongamos que la primera bola sea blanca . ' . llevará los números 1 a 3.

Cualquiera que sea ese número, la segunda bola si es blanca,

solo puede llevar una de las cifras restantes, luego el número de casos favorables es

$$3 \times 2 = 6$$

b) Supongamos que la primera bola sea negra. Se tienen 5 posibilidades distintas respecto a la cifra que lleve, y, correspondientemente a cualquiera de esas posibilidades, existen 3 respecto del número que tenga la bola blanca que debe sacarse en el segundo ensayo, de modo que el número de casos favorables es:

$$5 \times 3 = 15$$

El número total de casos favorables para la obtención de una bola blanca en el segundo ensayo es:

$$6 + 15 = 21$$

Veamos el número total de casos favorables para la obtención de una bola negra

c) si la primera bola es negra

Hay 5 posibilidades distintas respecto a la cifra que lleve, y correspondientemente a cualquiera de esas posibilidades, existen 4 respecto del número que tenga la bola negra que debe extraerse en el segundo ensayo, de modo que el número de casos favorables es

$$5 \times 4 = 20$$

d) si la primera bola es blanca

Hay 3 posibilidades distintas respecto a la cifra que lleve, y a cualquiera de ellas le corresponde 5 posibilidades respecto a la cifra de la bola negra que ha de extraerse en el segundo ensayo, luego el número de casos favorables es

$$3 \times 5 = 15$$

El número total de casos favorables para la obtención de una bola negra es:

$$20 + 15 = 35$$

3) Probabilidades:

a) Para la obtención de una bola blanca

$$P_b = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

b) Para la obtención de una bola negra

$$P_n = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$$

OBSERVACION:

La situación es completamente distinta si conocemos el color de la primera bola.

Supongamos por ejemplo que es blanca. El número total de casos igualmente provables será

$$3 \times 7 = 21$$

el número de casos favorables para la obtención de otra bola blanca es

$$3 \times 2 = 6$$

$$P = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

